

# 内点法

半場 滋

2004年7月23日(金)\*

## 1 はじめに

本項は、琉球大学工学部電気電子工学科の4年次専門実験で提供されている「線形計画法」の追加資料として作成されたものである。実験指導書では内点法において解の存在性などに関する数学的事実を詳しく述べる余裕がなかったため、興味のある学生向けに、本項で必要な事項を証明つきで説明する。

本項の解説の対象となるのは、内点法の一形態である、主-双対内点法と呼ばれるアルゴリズムである。本稿の構成は以下の通りである。第2節で、歪対称問題と呼ばれる問題を定式化し、内点法のアルゴリズムの解析で中心的な役割を果たす中心パスと強相補解について述べる。最初に歪対称問題という特別な問題について議論する理由は、与えられた線形計画問題を歪対称問題に帰着させて解くことがつねに可能だからである。この事実については第3節で議論する。さらに、第4で、歪対称問題の数値解法および収束の速さと数値解に含まれる誤差について議論する。また、付録AにScilabによるショートステップパス追跡法のプログラムを、付録Bにロングステップパス追跡法のプログラムを示す。

典拠について述べておこう。第2節と第3節はおおむね文献[3]により、第4はおおむね文献[4]による。日本語の用語については[1]を参考にした。凸関数に関する記述は[2]によった。

本項では次のような記号を用いる。記号 $\mathbb{R}^n$ によって $n$ 次元空間をあらわす。ベクトルおよび行列にはボールド体を用いる。特に断らない限りベクトルは縦ベクトルである。記号 $T$ によってベクトルや行列の転置をあらわす。記号 $\mathbf{0}$ は零ベクトルや零行列を、 $\mathbf{1}$ は全要素が1のベクトルを、 $\mathbf{I}$ は単位行列をあらわす。 $n$ 次のベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ に対し、 $\mathbf{xy}$ という記号で、各ベクトルを成分ごとに掛けあわせて得られるベクトルをあらわす。すなわち、 $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ と $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_n]$ に対し、 $\mathbf{xy} = [x_1y_1, \dots, x_ny_n]^T$ である。また、 $\mathbf{x}^2 = [x_1^2, \dots, x_n^2]^T$ 、 $1/\mathbf{x} = [1/x_1, \dots, 1/x_n]^T$ 、 $\mathbf{x}^{-1/2} = [1/\sqrt{x_1}, \dots, 1/\sqrt{x_n}]^T$ という記号を用いることがある。特に断らない限り、ベクトルのノルムはユークリッドノルムであるものとし、これを $\|\cdot\|$ であらわす( $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ である)。記号 $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ によって、1から $n$ までのすべての $i$ に対し $x_i \geq y_i$ となることをあらわす。 $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ 、 $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ 、 $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ についても同様である。ベクトルに対応する大文字の記号

で、そのベクトルの各要素を対角要素としてならべた対角行列をあらわすことがある。たとえば、ベクトル $\mathbf{x}$ に対し、

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x_n \end{bmatrix}$$

である。これを $\text{diag}(\mathbf{x})$ 、 $\text{diag}(x_1, \dots, x_n)$ などと書き表すこともある。最小化問題を書き下すときには、

$$\min\{\text{目的関数} : \text{制約条件}\}$$

という記法を用いる。記号 $\min$ はminimizeの略である。同様に、最大化問題を書き下すときには、

$$\max\{\text{目的関数} : \text{制約条件}\}$$

という記法を用いる。記号 $\max$ はmaximizeの略である。行列 $\mathbf{M}$ が歪対称行列であるとは、 $\mathbf{M}$ が正方行列で、 $\mathbf{M}^T = -\mathbf{M}$ となることをいう。関数 $f(\mathbf{x})$ が凸関数であるとは、任意の $\mathbf{x}$ 、 $\mathbf{y}$ と $t \in (0, 1)$ に対し、

$$f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) \leq tf(\mathbf{x}) + (1-t)f(\mathbf{y}) \quad (1)$$

となることをいう。(1)が等号を除いて成り立つとき、関数 $f(\mathbf{x})$ は狭義凸関数であるという。

## 2 歪対称問題

$n$ 次の歪対称行列 $\mathbf{M}$ と非負のベクトル $\mathbf{q}$ が与えられているとき、これらに対応する歪対称問題は、

$$(\text{SP}) \quad \min\{\mathbf{q}^T \boldsymbol{\xi} : \mathbf{M}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{q} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\xi} \geq \mathbf{0}\} \quad (2)$$

によって定義される。ただし、ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ はベクトル $\mathbf{q}$ と同じ次元のベクトルである。

$\mathbf{q} \geq \mathbf{0}$ かつ $\boldsymbol{\xi} \geq \mathbf{0}$ から、(2)において $\mathbf{q}^T \boldsymbol{\xi} \geq 0$ であるが、 $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ とおくと $\mathbf{q}^T \boldsymbol{\xi} = 0$ となる。すなわち、 $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ は(SP)のひとつの最適解である。一方、一般に(2)は零ベクトル以外の最適解を持ち、それらの解が内点法において重要な役割を果たす。

本節では歪対称問題の性質について述べる。

\* (2013.12.22) 記号の定義を追加し、若干の字句の誤りを訂正した

まず, (2) の制約条件を満たす領域を  $SP$  とおく. すなわち,

$$SP = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi \geq \mathbf{0}, M\xi + q \geq \mathbf{0}\} \quad (3)$$

である. また, (2) の制約条件を等号抜きで満たす点 (内点) を  $SP^+$  とおく. すなわち,

$$SP^+ = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi > \mathbf{0}, M\xi + q > \mathbf{0}\} \quad (4)$$

である.

歪対称問題の最適解は  $q^T \xi = 0$  を満たす点の集合であるが, この集合を  $SP^*$  とおく. すなわち,

$$SP^* = \{\xi \in SP : q^T \xi = 0\} \quad (5)$$

である.  $SP^*$  は零ベクトルを含むことを注意しておく. さらに,

$$s(\xi) = M\xi + q \quad (6)$$

と定義する. 記号の簡単のため, 曖昧さが生じる余地がないときには,  $s(\xi)$  を単に  $s$  と書くことがある. また,  $\xi^0$  などに対応して (6) が取る値を,  $s^0$  などと書くことがある. すなわち,  $s^0 = M\xi^0 + q$  である.

最初に, いくつか技術的な補題を準備しておく.

**補題 1**  $M$  が  $n$  次の歪対称行列であるとき, 任意の  $n$  次のベクトル  $\xi$  に対し,  $\xi^T M \xi = 0$  となる.

[証明]  $M^T = -M$  だから,

$$\xi^T M \xi = (\xi^T M \xi)^T = \xi^T M^T \xi = \xi^T (-M) \xi$$

となる. ゆえに  $\xi^T M \xi = 0$  である. ///

**補題 2**  $q^T \xi = \xi^T s(\xi)$  が成り立つ.

[証明] (6) より,  $\xi^T s(\xi) = \xi^T M \xi + \xi^T q$  である. よって, 補題 1 により,  $q^T \xi = \xi^T s(\xi)$  となる. ///

**補題 3** 任意の  $\xi, \eta$  に対し,  $(\xi - \eta)^T (s(\xi) - s(\eta)) = 0$  が成り立つ.

[証明] (6) より,  $s(\xi) - s(\eta) = M(\xi - \eta)$  である. したがって, 補題 1 より,  $(\xi - \eta)^T (s(\xi) - s(\eta)) = 0$  となる. ///

**補題 4**  $\xi$  および  $\eta$  がともに歪対称問題の最適解であるための必要十分条件は,  $\xi^T s(\eta) = \eta^T s(\xi) = 0$  となることである.

[証明] 補題 3 より, 任意の  $\xi, \eta$  に対し, 等式

$$\xi^T s(\xi) + \eta^T s(\eta) = \xi^T s(\eta) + \eta^T s(\xi) \quad (7)$$

が成り立つ. (7) を利用して補題を示そう. 補題 2 により,  $\xi, \eta$  がともに最適解であるための必要十分条件は,  $\xi^T s(\xi) = \eta^T s(\eta) = 0$  となることである. ところで,  $\xi$  と  $\eta$  は最適解

だから,  $\xi \geq \mathbf{0}, \eta \geq \mathbf{0}, s(\xi) \geq \mathbf{0}, s(\eta) \geq \mathbf{0}$  である. したがって, (7) より

$$\begin{aligned} \xi^T s(\xi) = \eta^T s(\eta) = 0 &\Leftrightarrow \xi^T s(\eta) + \eta^T s(\xi) = 0 \\ &\Leftrightarrow \xi^T s(\eta) = \eta^T s(\xi) = 0 \end{aligned}$$

となる. ///

**補題 5**  $s = M\xi + q, \xi > \mathbf{0}, s > \mathbf{0}$  のとき,  $\Xi = \text{diag}(\xi), S = \text{diag}(s)$  とすると, 行列  $M\Xi + S$  は正則である.

[証明]  $\xi > \mathbf{0}, s > \mathbf{0}$  より,  $\Xi$  および  $S$  は正則である. よって, もし  $\Xi M \Xi + S \Xi$  が正則であれば, これに正則行列  $\Xi^{-1}$  を右から乗じた結果得られる  $\Xi M + S$  も正則となる. ところで, 任意のベクトル  $\eta \neq \mathbf{0}$  に対し,  $M$  が歪対称行列であることから,

$$\eta^T (\Xi M \Xi + S \Xi) \eta = \eta^T \Xi M \Xi \eta + \eta^T S \Xi \eta = \eta^T S \Xi \eta$$

となる. ところで, 行列  $S \Xi$  の対角要素は  $s\xi$  の成分であり,  $s\xi > \mathbf{0}$  だから,  $S \Xi$  は正定対称行列である. したがって,  $\eta^T S \Xi \eta > 0$  である. ゆえに  $\forall \eta \neq \mathbf{0}, \eta^T (\Xi M \Xi + S \Xi) \eta \neq 0$  であり, したがって行列  $\Xi M \Xi + S \Xi$  は正則である. ///

**補題 6** 関数  $f(x)$  が 2 階連続微分可能で,  $\nabla^2 f$  が正定値なら,  $f$  は狭義凸関数である.

[証明] Taylor の定理により, ある  $\theta \in [0, 1]$  に対し,

$$f(x+h) = f(x) + (\nabla f(x))h + h^T (\nabla^2 f(x+\theta h))h \quad (8)$$

となる. 仮定より,  $\nabla^2 f$  は正定値だったから,  $x_2 \neq x_1$  なら, (8) において  $x = x_1, h = x_2 - x_1$  とおくと,

$$f(x_2) > f(x_1) + (\nabla f(x_1))(x_2 - x_1) \quad (9)$$

が成り立つ.  $t \in (0, 1)$  とし, (9) において  $x_2 = x, x_1 = tx + (1-t)y$  とすると,  $x_2 - x_1 = (1-t)(x - y)$  より,

$$f(x) > f(x_1) + (1-t)(\nabla f(x_1))(x - y) \quad (10)$$

となる. 一方, (9) において  $x_2 = y, x_1 = tx + (1-t)y$  とすると,  $x_2 - x_1 = t(y - x)$  より,

$$f(y) > f(x_1) + t(\nabla f(x_1))(y - x) \quad (11)$$

(10) の両辺に  $t$  を, (11) の両辺に  $(1-t)$  を乗じてから足し合わせ,  $x_1 = tx + (1-t)y$  を代入すると,

$$tf(x) + (1-t)f(y) > f(tx + (1-t)y) \quad (12)$$

となる. これが証明すべき不等式であった. ///

本節では, これ以降で, 中心パスと強相補解と呼ばれる解を定義してからその存在を証明するのだが, そのためには, 以下で述べる対数障壁関数と呼ばれる関数が必要となる.

定義 7 (対数障壁関数) 集合  $SP^+$  が空でないとき,  $SP^+$  において

$$f_\mu(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^n \psi \left( \frac{\xi_i s_i(\boldsymbol{\xi})}{\mu} - 1 \right) \quad (13)$$

$$\psi(t) = t - \log(1+t)$$

によって定義される関数  $f_\mu$  を対数障壁関数と呼ぶ。

関数  $\psi(t)$  の形状を図 1 に示す。

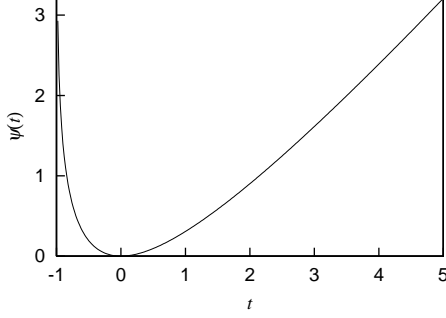


図 1: 関数  $\psi(t)$  の形状

$f_\mu$  が一定値  $K$  以下となる  $SP^+$  の点の集合を  $\mathcal{L}_K$  とおく。すなわち,  $\mathcal{L}_K = \{\boldsymbol{\xi} \in SP^+ : f_\mu(\boldsymbol{\xi}) \leq K\}$  である。

対数障壁関数に関するいくつかの補題を述べよう。

補題 8  $\psi(t)$  は非負の狭義凸関数であり,  $t = 0$  において最小値 0 を取る。また,  $t \rightarrow -1$  と  $t \rightarrow \infty$  の極限で無限大となる。

[証明]  $d^2\psi/dt^2 = 1/(1+t)^2 > 0$  だから, 補題 6 より,  $\psi$  は狭義凸関数である。また,  $d\psi/dt = 1 - 1/(1+t)$  より,  $\psi$  は  $t = 0$  において唯一の極小値 (すなわち最小値) を取る。この最小値は零である。  $t \rightarrow -1$  としたとき,  $\log(1+t) \rightarrow -\infty$  だから,  $\lim_{t \rightarrow -1} (t - \log(1+t)) = \infty$  である。一方,  $t = \log e^t$  に注意すると,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (t - \log(1+t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \log \frac{e^t}{1+t} = \infty$$

である。 //

補題 9 対数障壁関数  $f_\mu$  は  $\boldsymbol{\xi} > \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{s} > \mathbf{0}$  の範囲で狭義凸関数である。

[証明] (13) を整理すると

$$f_\mu(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i s_i}{\mu} - \sum_{i=1}^n \log \xi_i s_i - n(1 - \log \mu) \quad (14)$$

となるが, ここで,  $\sum_{i=1}^n \xi_i s_i = \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{s} = \mathbf{q}^T \boldsymbol{\xi}$  に注意すると, (14) は

$$f_\mu(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\mathbf{q}^T \boldsymbol{\xi}}{\mu} - \sum_{i=1}^n \log \xi_i s_i - n(1 - \log \mu) \quad (15)$$

と書き直される。さて, ここで (15) の第 2 項を  $(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{s})$  の関数と見て,

$$g(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{s}) = - \sum_{i=1}^n \log \xi_i s_i \quad (16)$$

とおくと,

$$\nabla^2 g = \text{diag}(1/\xi_1^2, \dots, 1/\xi_n^2, 1/s_1^2, \dots, 1/s_n^2) \quad (17)$$

であるが,  $\boldsymbol{\xi} > \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{s} > \mathbf{0}$  であればこれは正定値である。よって, 補題 6 より,  $g(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{s})$  は狭義凸関数である。

さて, (16) の  $\mathbf{s}$  に  $\mathbf{s} = M\boldsymbol{\xi} + \mathbf{q}$  を代入した関数を

$$h(\boldsymbol{\xi}) = g(\boldsymbol{\xi}, M\boldsymbol{\xi} + \mathbf{q}) \quad (18)$$

とする。  $\boldsymbol{\xi}^\sharp > \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\xi}^\sharp > \mathbf{0}$  を適当に取り,  $\mathbf{s}^\sharp = M\boldsymbol{\xi}^\sharp + \mathbf{q}$ ,  $\mathbf{s}^\sharp = M\boldsymbol{\xi}^\sharp + \mathbf{q}$  とおく。  $t \in (0, 1)$  に対し,  $\boldsymbol{\xi} = t\boldsymbol{\xi}^\sharp + (1-t)\boldsymbol{\xi}^\sharp$ ,  $\mathbf{s} = t\mathbf{s}^\sharp + (1-t)\mathbf{s}^\sharp$  とすると,  $\mathbf{s} = M\boldsymbol{\xi} + \mathbf{q}$  であり, したがって  $g(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{s}) = h(\boldsymbol{\xi})$  である。一方,  $g$  が狭義凸関数であったことから,

$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{\xi}) &= h(t\boldsymbol{\xi}^\sharp + (1-t)\boldsymbol{\xi}^\sharp) = g(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{s}) \\ &= g(t\boldsymbol{\xi}^\sharp + (1-t)\boldsymbol{\xi}^\sharp, t\mathbf{s}^\sharp + (1-t)\mathbf{s}^\sharp) \\ &= g(t(\boldsymbol{\xi}^\sharp, \mathbf{s}^\sharp) + (1-t)(\boldsymbol{\xi}^\sharp, \mathbf{s}^\sharp)) \\ &< tg(\boldsymbol{\xi}^\sharp, \mathbf{s}^\sharp) + (1-t)g(\boldsymbol{\xi}^\sharp, \mathbf{s}^\sharp) \\ &= th(\boldsymbol{\xi}^\sharp) + (1-t)h(\boldsymbol{\xi}^\sharp) \end{aligned} \quad (19)$$

である。よって  $h$  は狭義凸関数である。

さて, (18) を使って (15) を書き直すと

$$f_\mu(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\mathbf{q}^T \boldsymbol{\xi}}{\mu} + h(\boldsymbol{\xi}) - n(1 - \log \mu) \quad (20)$$

となる。(20) の第 1 項は線形だから,

$$\mathbf{q}^T (t\boldsymbol{\xi}^\sharp + (1-t)\boldsymbol{\xi}^\sharp) = t\mathbf{q}^T \boldsymbol{\xi}^\sharp + (1-t)\mathbf{q}^T \boldsymbol{\xi}^\sharp \quad (21)$$

である。また, (20) の第 3 項は定数である。したがって, (19) と (21) を合わせると,

$$f_\mu(t\boldsymbol{\xi}^\sharp + (1-t)\boldsymbol{\xi}^\sharp) < tf_\mu(\boldsymbol{\xi}^\sharp) + (1-t)f_\mu(\boldsymbol{\xi}^\sharp) \quad (22)$$

となるから,  $f_\mu$  は狭義凸関数である。 //

続いて, 内点法に理論的な根拠を与える重要な定理を述べる。

定理 10  $\mu > 0$  を固定する。このとき, 以下の 1) から 5) は等価である。

- 1)  $SP^+$  は空集合でない。
- 2) ある  $K \geq 0$  に対し,  $\mathcal{L}_K$  は空でない有界閉集合となる。
- 3)  $f_\mu$  は点  $\boldsymbol{\xi}^0$  において最小値を取り, この点で  $\boldsymbol{\xi}^0 > \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{s}^0 > \mathbf{0}$  が満たされる。

4)  $\xi$  と  $s$  に関する方程式

$$M\xi + q = s, \quad \xi s = \mu \mathbf{1} \quad (23)$$

は  $\xi, s > \mathbf{0}$  の範囲で解を持つ。

5) 任意の  $K > 0$  に対し,  $\mathcal{L}_K$  は空でない有界閉集合となる。

[証明] これ以降で, まず1から4までが等価であることを示し, 続いて5から2が導けることと, 1から4までを使うと5が導けることを示す。

$1 \Rightarrow 2$ :  $\xi^0 \in SP^+$  を取り, 対応する  $f_\mu$  の値を  $K = f_\mu(\xi^0)$  とおく。

$$\mathcal{L}_K = \{\xi : f_\mu(\xi) \leq K\} \quad (24)$$

とする。  $\mathcal{L}_K$  が空でない有界閉集合であることが言えればよい。ところで,  $\xi^0 \in \mathcal{L}_K$  より  $\mathcal{L}_K$  は空ではない。  $\mathcal{L}_K$  が有界であることを見よう。  $\xi \in \mathcal{L}_K$  とする。  $f_\mu(\xi) = \sum_{i=1}^n \psi(\xi_i s_i / \mu - 1) \leq K$  だから, それぞれの  $i$  に対して,  $\psi(\xi_i s_i / \mu - 1) \leq K$  でなければならない。したがって, ある正数  $a, b$  が存在して ( $a < 1$ ),

$$\xi_i s_i / \mu - 1 \in [-a, b] \quad (25)$$

となる (図1 参照)。ゆえに, 各  $i$  に対し,  $\xi_i s_i \leq 1 + \mu b$  であり, したがって  $\xi^T s \leq n\mu(1+b)$  となる。次に, 補題3より,

$$\xi^T s^0 + s^T \xi^0 = (\xi^0)^T s^0 + \xi^T s \leq (\xi^0)^T s^0 + n\mu(1+b) \quad (26)$$

であり,  $\xi \geq \mathbf{0}, s \geq \mathbf{0}, \xi^0 > \mathbf{0}, s^0 > \mathbf{0}$  から,

$$\xi_i \leq \frac{(\xi^0)^T s^0 + n\mu(1+b)}{s_i^0} \quad (27)$$

となる。同様にして,

$$s_i \leq \frac{(\xi^0)^T s^0 + n\mu(1+b)}{\xi_i^0} \quad (28)$$

が示される。一方, (25) から,  $\xi_i s_i \geq \mu(1-a)$  である。したがって  $s_i \neq 0$  であり,

$$\xi_i \geq \frac{\mu(1-a)}{s_i} \geq \frac{\xi_i^0 \mu(1-a)}{(\xi^0)^T s^0 + n\mu(1+b)}$$

となる。よって,

$$\xi_i \in \left[ \frac{\xi_i^0 \mu(1-a)}{(\xi^0)^T s^0 + n\mu(1+b)}, \frac{(\xi^0)^T s^0 + n\mu(1+b)}{s_i^0} \right] \quad (29)$$

となる。同様に,

$$s_i \geq \frac{\mu(1-a)}{\xi_i} \geq \frac{s_i^0 \mu(1-a)}{(\xi^0)^T s^0 + n\mu(1+b)}$$

より,

$$s_i \in \left[ \frac{s_i^0 \mu(1-a)}{(\xi^0)^T s^0 + n\mu(1+b)}, \frac{(\xi^0)^T s^0 + n\mu(1+b)}{\xi_i^0} \right] \quad (30)$$

となる。(29) は  $\mathcal{L}_K$  が有界であることを意味する。また,  $f$  は連続関数だから,  $\mathcal{L}_K$  は  $SP^+$  の閉集合, すなわち  $\mathbb{R}^n$  の

閉集合と  $SP^+$  の交わりである。ところで,  $\mathcal{L}_K$  は (29), (30) によって定まる2個の閉集合に含まれるので,  $\mathbb{R}^n$  の閉集合とこれら2個の閉集合の交わりに一致し, したがって  $\mathbb{R}^n$  の閉集合である。以上によって  $\mathcal{L}_K$  が有界閉集合であることが示された。

$2 \Rightarrow 3$ : ある  $\mathcal{L}_K$  が有界閉集合であると仮定する。  $f_\mu$  は連続だから,  $\mathcal{L}_K$  上で最小値を取る。この点を  $\xi^0$  とする。  $f_\mu(\xi^0)$  は有限だから, 各  $i$  に対し,  $\xi_i^0 s_i^0 \neq 0$  であり, したがって  $\xi^0 > \mathbf{0}, s^0 > \mathbf{0}$  となる。

$3 \Rightarrow 4$ :  $f_\mu$  が  $\xi^0$  において最小値を取るものとする。すると,  $\partial f_\mu / \partial \xi_i$  は  $\xi^0$  において零となる。

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial \xi_j} = \frac{s_j}{\mu} + \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n \xi_i m_{ij} - \frac{1}{\xi_j} - \sum_{i=1}^n \frac{m_{ij}}{s_i},$$

より,

$$\begin{aligned} \nabla f_\mu &= \frac{s}{\mu} - \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\mu} M^T \xi - M^T \frac{1}{s} \\ &= \frac{s}{\mu} - \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\mu} M \xi + M \frac{1}{s} \end{aligned}$$

となる。よって,  $\xi^0$  において

$$\frac{s^0}{\mu} - \frac{1}{\xi^0} = M \left( \frac{1}{\mu} \xi^0 - \frac{1}{s^0} \right)$$

となる。この両辺に  $((1/\mu)\xi^0 - 1/s^0)^T$  を掛けると

$$\left( \frac{1}{\mu} \xi^0 - \frac{1}{s^0} \right)^T \left( \frac{s^0}{\mu} - \frac{1}{\xi^0} \right) = 0$$

となり, したがって,  $\Xi^0 = \text{diag } \xi^0, S^0 = \text{diag } s^0$  とすると,

$$\left( \frac{\xi^0 s^0}{\mu} - \mathbf{1} \right)^T (\Xi^0)^{-1} (S^0)^{-1} \left( \frac{\xi^0 s^0}{\mu} - \mathbf{1} \right) = 0 \quad (31)$$

となる。  $\Xi^0 S^0$  は正定対称行列だから,  $\xi^0$  と  $s^0$  が (31) を満たしているということは,  $(\xi^0 s^0) / \mu = \mathbf{1}$  であることを意味する。

$4 \Rightarrow 1$ : (23) の解を  $(\xi, s)$  とすると,  $s = M\xi + q$  であり, かつ  $\xi s = \mu \mathbf{1}$  より,  $\xi > \mathbf{0}, s > \mathbf{0}$  である。よって,  $\xi \in SP^+$  であり, したがって  $SP^+$  は空でない。

$5 \Rightarrow 2$ : 2 は 5 の特別な場合だから明らか。

$1 \sim 4 \Rightarrow 5$ : (23) の解  $(\xi, s)$  は  $f_\mu(\xi) = 0$  を満たすから, 任意の  $K \geq 0$  に対し,  $\mathcal{L}_K$  は空でない。  $\mathcal{L}_K$  が有界閉集合となることは,  $1 \Rightarrow 2$  の証明から明らか。 ///

補題5を利用すると, (23) の解の一意性を示すことができる。

系 11  $\mu > 0$  に対し, (23) の  $\xi > \mathbf{0}, s > \mathbf{0}$  を満たす解は一意的である。

[証明] 定理10により (32) が少なくともひとつ解を持つことは保証されている。そこで, (23) が2個以上の解を持つと仮定して矛盾を導く。  $(\xi^\sharp, s^\sharp), (\xi^\natural, s^\natural)$  を (23) の各成分が0よ

り大きい解とする。このとき、(23)の第2式より、 $f_\mu(\xi^\#) = 0$ 、 $f_\mu(\xi^\#) = 0$ である。また、補題8により、 $f_\mu$ が負の値を取ることはない。ところで、 $t \in [0, 1]$ とし、 $\xi = t\xi^\# + (1-t)\xi^\natural$ 、 $s = ts^\# + (1-t)s^\natural$ とおくと、 $s = M\xi + q$ となる。すなわち、このようにして定められた $(\xi, s)$ は(23)の第1式を満たす。一方、補題9により、 $f_\mu$ は狭義凸関数だったから、

$$\begin{aligned} f_\mu(\xi) &= f_\mu(t\xi^\# + (1-t)\xi^\natural) \\ &< tf_\mu(\xi^\#) + (1-t)f_\mu(\xi^\natural) = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

でなければならない。(32)は $f_\mu$ が非負であることと矛盾する。 ///

**補題 12** 集合 $SP^+$ が空でないとき、集合 $SP^*$ は有界となる。

[証明] 適当な $\xi^0 \in SP^+$ を取る。また、 $\xi^* \in SP^*$ とする。すると、 $(\xi^0 - \xi^*)^T (s^0 - s^*) = 0$ および $(\xi^*)^T s^* = 0$ より、

$$(\xi^0)^T s^* + (\xi^*)^T (s^0) = (\xi^0)^T s^0$$

であるが、 $\xi^0 > 0$ 、 $s^0 > 0$ 、 $\xi^* \geq 0$ 、および $s^* \geq 0$ から、

$$(\xi^0)^T s^* \leq (\xi^0)^T s^0, \quad (\xi^*)^T (s^0) \leq (\xi^0)^T s^0$$

となる。よって、

$$s_j^* \leq \frac{(\xi^0)^T s^0}{\xi_j^0}, \quad \xi_j^* \leq \frac{(\xi^0)^T s^0}{s_j^0} \quad (33)$$

となり、したがって $SP^*$ は有界である。 ///

$SP^+$ が空でないとき、任意の $\mu > 0$ に対し、系11より、(23)を満たす $\xi$ が一意的に定まる。これを $\xi(\mu)$ と書く。また、 $s(\mu) = s(\xi(\mu))$ と定義する。(23)より、 $\xi(\mu)s(\mu) = \mu \mathbf{1}$ だから、

$$q^T \xi(\mu) = s(\mu)^T \xi(\mu) = n\mu \quad (34)$$

である。よって、 $\mu \rightarrow 0$ とすると、目的関数 $q^T \xi(\mu)$ の値は単調に減少する。

**定義 13** 集合 $\{\xi(\mu) : \mu > 0\}$ を中心パスと呼ぶ。

**補題 14** 集合 $SP^+$ が空でないとき、 $\xi(\mu)$ を $\mu$ の関数と見ると、これは連続かつ微分可能である。

[証明] 系11により、どのような $\mu > 0$ に対しても(23)をみたく $\xi > 0$ が唯一存在することはすでに保証されているので、関数 $\xi(\mu)$ が微分可能性であることのみ示せばよい。(23)の第2式の解は、 $f_i = s_i \xi_i - \mu$ とし、 $f = [f_1, \dots, f_n]^T$ とおくと、 $f = 0$ の解である。 $f$ は無回連続微分可能だから、陰関数定理により、 $\xi$ が微分可能であるためには、 $\partial f / \partial \xi$ が(23)のある解 $(\xi, \mu)$ の近傍で正則であることがいえればよい。

$$\frac{\partial f_i}{\partial \xi_i} = s_i + \xi_i m_{ii}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial \xi_k} = \xi_i m_{ik} (k \neq i)$$

により、

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \Xi M + S \quad (35)$$

であるが、補題5より、行列 $\Xi M + S$ は正則である。 ///

**補題 15** 集合 $SP^+$ が空でないとき、任意の $\mu > 0$ に対し、 $(\xi(\mu), s(\mu))$ は有界となる。

[証明] 適当な $\xi^0 \in SP^+$ を取る。このとき、

$$(\xi^0 - \xi(\mu))^T (s^0 - s(\mu)) = 0$$

から、

$$\begin{aligned} s_j^0 \xi_j(\mu) &\leq (s^0)^T \xi(\mu) + s(\mu)^T \xi^0 \\ &= (s^0)^T \xi^0 + s(\mu)^T \xi(\mu) \\ &= (s^0)^T \xi^0 + n\mu \end{aligned} \quad (36)$$

となる。 $s_j^0 \neq 0$ だから、

$$\xi_j(\mu) \leq \frac{(s^0)^T \xi^0}{s_j^0} + \frac{n\mu}{s_j^0} \quad (37)$$

となり、 $\xi(\mu)$ の有界性が示された。 $s(\mu)$ の有界性も同様にして示される。 ///

以上の準備のもとで、強相補解と呼ばれる(SP)に対する特別な形の解を定義し、続いて実際に強相補解が存在することを示す。

**定義 16** (SP)に対する $\xi^* + s(\xi^*) > 0$ を満たす最適解を、強相補解と呼ぶ。

**定理 17** 集合 $SP^+$ が空でなければ強相補解が存在する。

[証明] 正の値を取り0に収束する点列 $(\mu_k)$ を取り、各 $\mu_k$ に対応する(23)の解を $(\xi_k, s_k)$ とする。補題15により、点列 $(\xi_k, s_k)$ は有界であり、集積点を持つ。また、点 $(\xi^*, s^*)$ が点列 $(\xi_k, s_k)$ の集積点であれば、この点列は $(\xi^*, s^*)$ に収束する部分列 $(\xi_{k_j}, s_{k_j})$ を持つ。記法の簡単のため、 $(\mu_k)$ の部分列 $(\mu_{k_j})$ を新たに $(\mu_k)$ と取り直し、各 $\mu_k$ に対応する(23)の解を改めて $(\xi_k, s_k)$ とおく。このとき、 $(\mu_k)$ は零に収束する非負の点列であり、 $(\xi_k, s_k)$ は $(\xi^*, s^*)$ に収束する。さて、 $(\xi_k, s_k)$ は(23)の解だったから、 $\xi_k > 0$ 、 $s_k > 0$ であり、よって、 $\xi^* \geq 0$ 、 $s^* \geq 0$ である。また、 $\xi_k^T s_k = n\mu_k$ で、 $\mu_k$ が零に収束するから、 $(\xi^*)^T s^* = 0$ となる。さらに、 $s_k = M\xi_k + q$ より、さらに、 $s^* = M\xi^* + q$ である。したがって、 $\xi^*$ は(SP)の最適解である。また、補題3と $\xi_k^T s_k = n\mu_k$ から、

$$\xi_k^T s^* + \xi^{*T} s_k = n\mu_k \quad (38)$$

となる。

ここで、 $B = \{j : \xi_j^* > 0\}$ 、 $N = \{j : s_j^* > 0\}$ と定義する。また、ベクトル $\xi_k$ 、 $s_k$ の第 $i$ 成分を $\xi_{ki}$ 、 $s_{ki}$ と書く。 $\xi^* s^* = 0$ より、 $B \cap N = \emptyset$ である。また、 $\xi^*$ と $s^*$ はそれぞれ $\xi_k$ と $s_k$ の極限だから、ある $N$ が存在し、すべての $k > N$ に対し、 $j \in B$ なら $\xi_{kj} > 0$ 、 $j \in N$ なら $s_{kj} > 0$ となる。このような $k$ を取り、(38)の両辺を $\mu_k$ で割ると、

$$\sum_{j \in N} \frac{\xi_{kj} s_j^*}{\mu_k} + \sum_{j \in B} \frac{\xi_j^* s_{kj}}{\mu_k} = n \quad (39)$$

が得られる。(39)の各項に $\mu_k = \xi_{kj} s_{kj}$ を代入し、続いて $B$ に関する和では $\xi_{kj}$ を消去し、 $N$ に関する和では $s_{kj}$ を消去すると、

$$\sum_{j \in N} \frac{s_j^*}{s_{kj}} + \sum_{j \in B} \frac{\xi_j^*}{\xi_{kj}} = n \quad (40)$$

が得られる。ところで、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{s_j^*}{s_{kj}} = 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\xi_j^*}{\xi_{kj}} = 1$$

だから、(40)により、 $B \cup N = \{1, \dots, n\}$ である。したがって、 $\xi_j^* = 0$ なら $s_j^* > 0$ であり、 $s_j^* = 0$ なら $\xi_j^* > 0$ である。以上によって定理が示された。///

さて、定理17では中心パス上にとった点列の極限から強相補解を求めたのであるが、実はこの極限は一意的であることが示せる。これを証明するために、補題を準備する。

**補題 18**  $n$ 個の変数 $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ に関する最小化問題

$$\min \left\{ \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} : \mathbf{1}^T \mathbf{x} = n, \mathbf{x} > \mathbf{0} \right\} \quad (41)$$

の唯一の解は $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ である。

[証明] 議論の簡単のために、 $f(\mathbf{x}) = 1/x_1 + \dots + 1/x_n$ とする。また、

$$\begin{aligned} D &= \{\mathbf{x} : \mathbf{1}^T \mathbf{x} = n, \mathbf{x} > \mathbf{0}\}, \\ E_0 &= \{\mathbf{x} : \mathbf{1}^T \mathbf{x} = n(1 - \varepsilon), \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \\ E &= \{\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{1} : \mathbf{x} \in D_0\} \end{aligned}$$

とする。ただし、 $\varepsilon$ は正の定数である。以下の議論では、 $D$ 、 $E$ を $n-1$ 次元空間 $\{\mathbf{x} : \mathbf{1}^T \mathbf{x} = n\}$ の部分集合とみなす。

$E$ は $f$ の定義域 $D$ に含まれる有界閉集合である。 $f$ は $E$ における連続関数であるから、有限の最大値と最小値を取る。一方、 $\mathbf{x} \in E$ なら $\forall i, x_i \geq \varepsilon$ であり、したがって $\mathbf{x} \in D \setminus E$ なら $\exists i, x_i \leq \varepsilon$ 、ゆえに、 $f > 1/\varepsilon$ である。一方、 $\mathbf{1} \in E$ であり、 $f$ の $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ における値は $n$ であるので、 $\varepsilon > 0$ を十分小さく取れば、 $f$ の $E$ における最小値は $D$ における最小値と考えてよい。また、このことから、 $f$ は $E$ の境界では最小とならないことがわかる。よって、 $f$ は $E$ の内部で最小値を取る。

さて、Lagrange関数 $L$ を $L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda(\mathbf{1}^T \mathbf{x} - n)$ によって定義すると、 $f$ が定義域の内点で $\mathbf{x}$ で最小となるための必要条件は、 $\partial L / \partial \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 、 $\partial f / \partial \lambda = 0$ である。ところで、 $\partial L / \partial x_i = -1/x_i^2 + \lambda$ であるから、 $x_i > 0$ と合わせて、 $\forall i, x_i = \sqrt{\lambda}$ かつ $\lambda > 0$ となる。これを $\partial L / \partial \lambda = \mathbf{1}^T \mathbf{x} - n = 0$ に代入すると $n\sqrt{\lambda} = n$ 、すなわち $\sqrt{\lambda} = 1$ 、したがって $\forall i, x_i = 1$ となる。さて、 $E$ において $f$ が最小となる点が少なくとも1個あることはすでにわかっている、さらに最小となる点の候補は $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ のみであることから、実際に $f$ は $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ において最小値 $n$ を取ることがわかる。///

**定理 19** 中心パスは $\mu \rightarrow 0$ としたとき唯一の極限に収束する。

[証明] 定理17の証明で述べられた手順によって得られる集積点が一意的であることをいえばよい。 $\tilde{\mu}_k \rightarrow 0$ 、 $\hat{\mu}_k \rightarrow 0$ に対応する点列 $(\tilde{\xi}_k, \tilde{s}_k)$ 、 $(\hat{\xi}_k, \hat{s}_k)$ から得られた極限をそれぞれ $(\tilde{\xi}, \tilde{s})$ および $(\hat{\xi}, \hat{s})$ とする。このとき、 $\tilde{\xi}^T \tilde{s} = 0$ 、 $\hat{\xi}^T \hat{s} = 0$ である。一方、 $(\tilde{s} - \hat{s})^T (\tilde{\xi} - \hat{\xi})$ だから、

$$\tilde{s}^T \tilde{\xi} + \hat{\xi}^T \hat{s} = 0 \quad (42)$$

である。さて、ここで $\tilde{B} = \{i : \tilde{\xi}_i \neq 0\}$ 、 $\tilde{N} = \{i : \tilde{\xi}_i = 0\}$ 、 $\hat{B} = \{i : \hat{\xi}_i \neq 0\}$ 、 $\hat{N} = \{i : \hat{\xi}_i = 0\}$ とおく。 $(\tilde{\xi}, \tilde{s})$ および $(\hat{\xi}, \hat{s})$ はともに強相補解であることに注意すると、(42)より、 $i \in \tilde{B}$ なら $\tilde{\xi}_i \neq 0$ ゆえに $\hat{s}_i = 0$ 、したがって $\hat{\xi}_i \neq 0$ であり、ゆえに $i \in \hat{B}$ である。逆に、 $i \in \hat{B}$ なら、 $\hat{\xi}_i \neq 0$ ゆえに $\tilde{s}_i = 0$ 、したがって $\tilde{\xi}_i \neq 0$ 、ゆえに $i \in \tilde{B}$ である。以上により、 $\tilde{B} = \hat{B}$ 、 $\tilde{N} = \hat{N}$ である。以下では、記号の簡単のために $B = \tilde{B} = \hat{B}$ 、 $N = \tilde{N} = \hat{N}$ とおく。

さて、 $(\tilde{s}_k - \hat{s})^T (\tilde{\xi}_k - \hat{\xi}) = 0$ より、

$$n\tilde{\mu}_k = \tilde{s}_k^T \tilde{\xi} + \hat{\xi}_k^T \hat{s} \quad (43)$$

であるが、 $\tilde{\xi}_k$ 、 $\tilde{s}_k$ の第 $i$ 成分をそれぞれ $\tilde{\xi}_{ki}$ 、 $\tilde{s}_{ki}$ と書くと、(43)は

$$\sum_{i \in B} \tilde{\xi}_i \tilde{s}_{ki} + \sum_{i \in N} \hat{s}_i \tilde{\xi}_{ki} = n\tilde{\mu}_k \quad (44)$$

となる。 $\forall i, \tilde{s}_{ki} \tilde{\xi}_{ki} = \tilde{\mu}_k$ だから、(44)の左辺の和の各項を $\tilde{s}_{ki} \tilde{\xi}_{ki}$ で割ることにより、

$$\sum_{i \in B} \frac{\tilde{\xi}_i}{\tilde{\xi}_{ki}} + \sum_{i \in N} \frac{\hat{s}_i}{\tilde{s}_{ki}} = n \quad (45)$$

となる。(45)において $k \rightarrow \infty$ とすると

$$\sum_{i \in B} \frac{\hat{\xi}_i}{\xi_i} + \sum_{i \in N} \frac{\hat{s}_i}{\tilde{s}_i} = n \quad (46)$$

が得られる。また、同様の手順により、

$$\sum_{i \in B} \frac{\tilde{\xi}_i}{\xi_i} + \sum_{i \in N} \frac{\tilde{s}_i}{\tilde{s}_i} = n \quad (47)$$

も得られる。

さて、ここで $x_i = \hat{\xi}_i / \tilde{\xi}_i$  ( $i \in B$ )、 $x_i = \hat{s}_i / \tilde{s}_i$  ( $i \in N$ )とおくと、 $\forall i, x_i > 0$ であり、(46)、(47)は

$$\sum_{i=1}^n x_i = n, \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = n \quad (48)$$

と書ける。補題18より、(48)が成り立つためには、 $\forall i, x_i = 1$ でなければならない。ゆえに、 $\forall i (\tilde{\xi}_i = \hat{\xi}_i)$ 、 $\forall i (\tilde{s}_i = \hat{s}_i)$ であり、したがって $\tilde{\xi} = \hat{\xi}$ 、 $\tilde{s} = \hat{s}$ である。以上によって集積点が一意的であることが示された。///

中心パスの極限を解析的中心と呼ぶ。定理19で示されたように、解析的中心は一意的に定まる。これに対し、強相補解は一意的とは限らない。

例 20 2 変数の歪対称問題

$$\min \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (49)$$

を考える。

(49) の制約条件は、 $0 \leq \xi_1, 0 \leq \xi_2 \leq 1$  と書き直される。目的関数は  $\xi_1$  なので、 $\xi_1 = 0$  を満たす任意の点で目的関数は最小となる。

$f_\mu(\xi) = 1$  なる等高線が  $\mu = 0.6, 1.0, 1.4, 1.8$  としたときにどのように変わるかを図 2 に示す。図 2 より、 $f_\mu(\xi) = 1$  なる等高線は  $(\xi_1, \xi_2)$  空間における閉曲線を定め、 $\mu$  が小さくなるにしたがってこの閉曲線が全体的に左に移動してゆくとわかる。

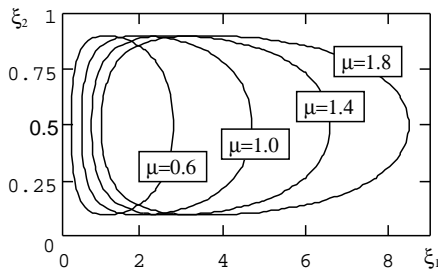


図 2:  $f_\mu(\xi) = 1$  を満たす等高線の  $\mu$  に対する変化

$0 < \theta < 1$  なる任意の  $\theta$  に対し、 $\mathbf{x} = [0, \theta]^T$  とすると、 $\mathbf{x} \geq 0, \mathbf{s}(\xi) = [1 - \theta, 0]^T \geq 0$  で、 $\xi^T \mathbf{s}(\xi) = 0, \xi + \mathbf{s}(\xi) = [1 - \theta, \theta]^T > 0$  となる。すなわち、このような  $(\xi, \mathbf{s}(\xi))$  は強相補解である。

(49) の中心パスを求めてみよう。 $\xi \mathbf{s}(\xi) = \mu \mathbf{1}$  を成分ごとに書き下すと、

$$\xi_1(1 - \xi_2) = \mu, \xi_1 \xi_2 = \mu \quad (50)$$

となる。(50) の第 2 式を第 1 式に代入することにより、 $\xi_1 = 2\mu$  が得られる。これを (50) の第 2 式に代入すると、 $\xi_2 = 1/2$  が得られる。すなわち、(49) の中心パスは

$$(\xi_1, \xi_2) = (2\mu, 1/2), 0 < \mu < \infty \quad (51)$$

を満たす点の集合である。(51) から直ちに、(49) の解析的中心が  $(\xi_1, \xi_2) = (0, 1/2)$  であることがわかる。

(49) の制約条件を満たす領域、中心パス、解析的中心と強相補解を図 3 に示す。

なお、この例では中心パスは直線であるが、これは偶然であって、ふつうは中心パスは直線にはならない。

### 3 双対定理

基準形 で記述された最適化問題

$$(P) \min \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{A} \mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0 \} \quad (52)$$

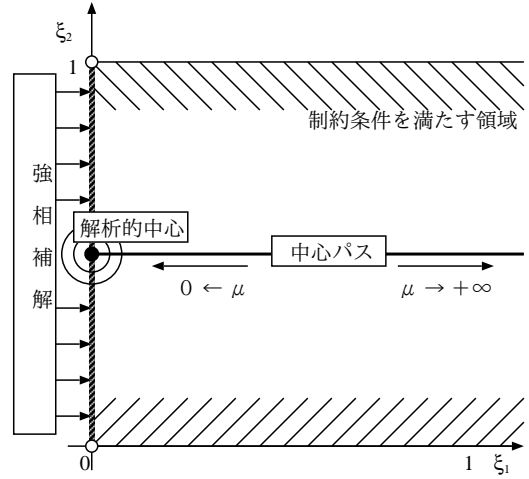


図 3: 2 次の歪対称問題の中心パスと強相補解

を考える。ただし、 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  であり、その他のベクトルは適合する次元を持つものとする。

問題 (P) の双対問題は、

$$(D) \max \{ \mathbf{b}^T \mathbf{y} : \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq 0 \} \quad (53)$$

によって定義される。

双対問題は、一見すると、主問題から恣意的に作成された無意味な問題に見えるかもしれない。しかし、実際には、主問題と双対問題には密接な関係がある。本節では、以下で、その関係について見てゆく。

まず弱双対定理と呼ばれる事実を述べる。

**定理 21 (弱双対定理)** 主問題  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  をそれぞれ主問題 (P) と双対問題 (D) の制約条件を満たすベクトルとする。このとき、

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{y} \geq 0. \quad (54)$$

が成り立つ。

[証明]  $\mathbf{y}^T \mathbf{b} \leq \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ . //

**系 22** 主問題 (P) と双対問題 (D) の制約条件を満たすベクトル  $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*$  が  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*$  を満たすならば、 $\mathbf{x}^*$  は主問題 (P) の最適解であり、 $\mathbf{y}^*$  は双対問題 (D) の最適解である。

[証明]  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  をそれぞれ主問題 (P) と双対問題 (D) の制約条件を満たすベクトルとする。このとき、定理 21 より、 $\mathbf{b}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*, \mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{b}^T \mathbf{y}^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$  となる。ゆえに、 $\mathbf{x}^*$  は主問題 (P) の最適解であり、 $\mathbf{y}^*$  は双対問題 (D) の最適解である。 //

実は、主問題 (P) が有限の最適解を持つときには必ず双対問題 (D) も有限の最適解を持ち、逆に双対問題 (D) が有限の最適解を持つときには必ず主問題 (P) も有限の最適解を持つ。この事実は、双対定理と呼ばれる。

この節では、最終的に双対定理を証明することを目標とするのだが、そのためにはかなりの準備が必要である。

まず、主問題と双対問題を同時に解くことを考えよう。このためには、 $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$  の条件の下で、

$$\mathbf{Ax} - \mathbf{b} \geq \mathbf{0}, -\mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{c} \geq \mathbf{0}, \mathbf{b}^T \mathbf{y} - \mathbf{c}^T \mathbf{x} = 0, \quad (55)$$

を連立させて解けばよい。ただし、この段階では、実際に (55) が解を持つか否かは明らかではない。

ところで、(55) は、第 3 式の等号を不等号で置き換えた連立不等式

$$\mathbf{Ax} - \mathbf{b} \geq \mathbf{0}, -\mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{c} \geq \mathbf{0}, \mathbf{b}^T \mathbf{y} - \mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq 0 \quad (56)$$

と等価である。この理由を説明しよう。(55) の解が (56) を満たすことは明らかである。逆に、(56) の解  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  が与えられているものとする。すると、定理 21 より、 $\mathbf{b}^T \mathbf{y} - \mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq 0$  かつ  $\mathbf{b}^T \mathbf{y} - \mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq 0$  となるから、したがって  $\mathbf{b}^T \mathbf{y} - \mathbf{c}^T \mathbf{x} = 0$  となる。

ここで、(56) を行列の形で書き直すと、

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A} & -\mathbf{b} \\ -\mathbf{A}^T & 0 & \mathbf{c} \\ \mathbf{b}^T & -\mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \quad (57)$$

となる。

ところで、(57) は必ずしも解を持つとは限らない。そこで、これを必ず解を持つ形に書き換えることを考える。そのために、(57) にあらわれたベクトル  $[\mathbf{y}^T, \mathbf{x}^T, 1]$  の最後の定数 1 を変数  $\kappa$  で置き換えた、

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A} & -\mathbf{b} \\ -\mathbf{A}^T & 0 & \mathbf{c} \\ \mathbf{b}^T & -\mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \\ \kappa \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \\ \kappa \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (58)$$

という問題を考える。問題 (58) は  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ,  $\kappa = 0$  という自明な解を持つ。よって、解の存在性について心配する必要はなくなる。また、 $\kappa \neq 0$  なる (58) の解がひとつ見付かった場合、そこから (57) の解を復元することができる。これはなぜかという、(58) の両辺を  $\kappa$  で割ると ( $\kappa > 0$  の場合はこれが可能である)、

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A} & -\mathbf{b} \\ -\mathbf{A}^T & 0 & \mathbf{c} \\ \mathbf{b}^T & -\mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}/\kappa \\ \mathbf{x}/\kappa \\ 1 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{\mathbf{x}}{\kappa} \geq \mathbf{0}, \frac{\mathbf{y}}{\kappa} \geq \mathbf{0}$$

となり、これは (57) そのものであるからである。

さて、以下では第 2 節の議論を援用して (58) の解について調べてゆきたいのであるが、ここで更に問題が生じる。それは、(58) の制約条件を等号抜きで満たす点 (内点) が存在するかどうか明らかでない、ということである。この問題を回避するため、(58) を内点が存在する問題に書き換えることを考える。

$\mathbf{x}^0 > \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{y}^0 > \mathbf{0}$  を決める。これは正であればどのように取っても構わない。次に、 $\mathbf{p}^0 = 1/\mathbf{x}^0$ ,  $\mathbf{t}^0 = 1/\mathbf{y}^0$  とおく。パ

ラメータ  $\bar{\mathbf{b}}$ ,  $\bar{\mathbf{c}}$ ,  $\beta$  を

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{b}} &= \mathbf{t}^0 + \mathbf{b} - \mathbf{Ax}^0 \\ \bar{\mathbf{c}} &= \mathbf{p}^0 - \mathbf{c} + \mathbf{A}^T \mathbf{y}^0 \\ \beta &= 1 - \mathbf{b}^T \mathbf{y}^0 + \mathbf{c}^T \mathbf{x}^0 \end{aligned} \quad (59)$$

と定義する。続いて、行列  $\mathbf{M}$  およびベクトル  $\mathbf{q}$  を

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} & -\mathbf{b} & \bar{\mathbf{b}} \\ -\mathbf{A}^T & \mathbf{0} & \mathbf{c} & \bar{\mathbf{c}} \\ \mathbf{b}^T & -\mathbf{c}^T & 0 & \beta \\ -\bar{\mathbf{b}}^T & -\bar{\mathbf{c}}^T & -\beta & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ n+m+2 \end{bmatrix} \quad (60)$$

と定義し、次の問題を考える。

$$\min \{ \mathbf{q}^T \boldsymbol{\xi} : \mathbf{M}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{q} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\xi} \geq \mathbf{0} \} \quad (61)$$

ここに、 $\boldsymbol{\xi} = [\mathbf{y}^T, \mathbf{x}^T, \kappa, \theta]^T$  は  $n+m+2$  次元のベクトルである。

$\boldsymbol{\xi}$  の初期値を

$$\boldsymbol{\xi}^0 := [\mathbf{y}^0, \mathbf{x}^0, 1, 1]^T \quad (62)$$

とおくと、 $\boldsymbol{\xi}^0$  は問題 (61) の内点となる。これを示そう。

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\xi}^0 + \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Ax}^0 - \mathbf{b} + \bar{\mathbf{b}} \\ -\mathbf{A}^T \mathbf{y}^0 + \mathbf{c} + \bar{\mathbf{c}} \\ \mathbf{b}^T \mathbf{y}^0 - \mathbf{c}^T \mathbf{x}^0 + \beta \\ -\bar{\mathbf{b}}^T \mathbf{y}^0 - \bar{\mathbf{c}}^T \mathbf{x}^0 - \beta + (n+m+2) \end{bmatrix} \quad (63)$$

であるが、 $\bar{\mathbf{b}}$ ,  $\bar{\mathbf{c}}$  および  $\beta$  の定義により、

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax}^0 - \mathbf{b} + \bar{\mathbf{b}} &= \mathbf{t}^0 \\ -\mathbf{A}^T \mathbf{y}^0 + \mathbf{c} + \bar{\mathbf{c}} &= \mathbf{p}^0 \\ \mathbf{b}^T \mathbf{y}^0 - \mathbf{c}^T \mathbf{x}^0 + \beta &= 1 \end{aligned} \quad (64)$$

である。最後に、

$$\begin{aligned} &-\bar{\mathbf{b}}^T \mathbf{y}^0 - \bar{\mathbf{c}}^T \mathbf{x}^0 - \beta + (n+m+2) \\ &= -\underbrace{(\mathbf{t}^0)^T (\mathbf{y}^0)}_{=m} - \mathbf{b}^T (\mathbf{y}^0) + (\mathbf{x}^0)^T \mathbf{A}^T \mathbf{y}^0 \\ &\quad - \underbrace{(\mathbf{p}^0)^T \mathbf{x}^0}_{=n} + \mathbf{c}^T \mathbf{x}^0 - (\mathbf{y}^0)^T \mathbf{Ax}^0 \\ &= -1 + \mathbf{b}^T \mathbf{y}^0 - \mathbf{c}^T \mathbf{x}^0 + n + m + 2 \\ &= 1 \end{aligned} \quad (65)$$

により、所望の結果が得られる。

以上によって、主問題と双対問題を解くことが内点を持つ歪対称問題を解くことに帰着されたことになる。

さて、(61) を利用して、本節の目標であった双対定理を示そう。

**定理 23** 主問題 (P) および双対問題 (D) に対し、次の 1, 2 のいずれかが成り立つ。

1. 主問題 (P), 双対問題 (D) は最適解  $\mathbf{x}^*$ ,  $\mathbf{y}^*$  を持ち、 $\mathbf{b}^T \mathbf{y}^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$  となる。



2. 主問題 (P), 双対問題 (D) のいずれか, あるいは両方も解を持たない.

[証明] (61) が自明な解  $\xi = \mathbf{0}$  を持ち, 目的関数の最適値が 0 であることと, 定理 17 により (61) が強相補解を持つことを利用する. (61) の強相補解を  $[\bar{\mathbf{y}}^T, \bar{\mathbf{x}}^T, \bar{\kappa}, \bar{\theta}]$  とする. 目的関数の最適値が 0 であることから,  $\bar{\theta} = 0$  である. よって, (61) の制約条件は

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A} & -\mathbf{b} \\ -\mathbf{A}^T & 0 & \mathbf{c} \\ \mathbf{b}^T & -\mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{y}} \\ \bar{\mathbf{x}} \\ \bar{\kappa} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (66)$$

に帰着される. 主問題と双対問題に解があるか否かは  $\bar{\kappa}$  の値に依存する.

$\bar{\kappa} > 0$  のとき: この場合, (66) の両辺を  $\bar{\kappa}$  で割ることにより, 主問題 (P) と双対問題 (D) の解が復元される. すなわち, 主問題 (P) と双対問題 (D) はともに有限の最適解を持つ.

$\bar{\kappa} = 0$  のとき:  $\bar{\kappa} = 0$  を (66) に代入すると  $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{A}^T\bar{\mathbf{y}} \leq \mathbf{0}$  が成り立つが, さらに, 強相補解の性質から,

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{y}} \\ \bar{\mathbf{x}} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A} & -\mathbf{b} \\ -\mathbf{A}^T & 0 & \mathbf{c} \\ \mathbf{b}^T & -\mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{y}} \\ \bar{\mathbf{x}} \\ 0 \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (67)$$

となる. このとき, もし  $\mathbf{b}^T\bar{\mathbf{y}} \leq 0$  かつ  $\mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}} \geq 0$  であれば,  $\mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}^T\bar{\mathbf{y}} \geq 0$  となり, これは (67) の第 3 式と矛盾する. したがって,  $\mathbf{b}^T\bar{\mathbf{y}} > 0$  と  $\mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}} < 0$  の少なくとも一方が成り立つ.

まず  $\mathbf{b}^T\bar{\mathbf{y}} > 0$  の場合を考える. このとき, 主問題 (P) は解を持たず, 双対問題 (D) は有限の最適解を持たない. これを示そう. まず, 主問題 (P) は解を持たないことを背理法によって示す. 主問題 (P) が解  $\mathbf{x}$  を持ったとすると,  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{A}^T\bar{\mathbf{y}} \leq \mathbf{0}$  より,

$$0 \geq \mathbf{x}^T(\mathbf{A}^T\bar{\mathbf{y}}) = (\mathbf{A}\mathbf{x})^T\bar{\mathbf{y}} \geq \mathbf{b}^T\bar{\mathbf{y}} > 0$$

であり,  $0 > 0$  となって矛盾である. したがって主問題 (P) は解を持たない. 続いて, 双対問題 (D) が解を持つときには有限の最適解が存在しないことを示す.  $\mathbf{y}$  が双対問題 (D) のひとつの解とする. このとき,  $\mathbf{A}^T\bar{\mathbf{y}} \leq \mathbf{0}$  より, 任意の正数  $\alpha$  に対し,  $\mathbf{y} + \alpha\bar{\mathbf{y}}$  も双対問題 (D) の解である. さて, 解  $\mathbf{y} + \alpha\bar{\mathbf{y}}$  に対する目的関数の値は  $\mathbf{b}^T(\mathbf{y} + \alpha\bar{\mathbf{y}})$  であるが,  $\mathbf{b}^T\bar{\mathbf{y}} > 0$  より, これは任意の大きい値を取りうる. したがって, この場合, 双対問題 (D) は有限の最適値を持たない.

続いて,  $\mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}} < 0$  の場合を考える. このとき, 双対問題 (D) は解を持たず, 主問題 (P) は有限の最適解を持たない. これを示そう. まず双対問題 (D) は解を持たないことを背理法によって示す. 双対問題 (D) が解  $\mathbf{y}$  を持ったとすると,  $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$  より,

$$0 \leq \mathbf{y}^T(\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}) = (\mathbf{A}^T\mathbf{y})^T\bar{\mathbf{x}} \leq \mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}} < 0$$

より,  $0 < 0$  となって矛盾である. よって双対問題 (D) は解を持たない. 続いて, 主問題 (P) に解があれば有限の最適解は存在しないことを見る.  $\mathbf{x}$  を主問題 (P) のひとつの解とする. このとき,  $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$  より, 任意の正数  $\alpha > 0$  に対し,  $\mathbf{x} + \alpha\bar{\mathbf{x}}$  も主問題 (P) の解である. この解に対応する目的関数の値は  $\mathbf{c}^T(\mathbf{x} + \alpha\bar{\mathbf{x}})$  であるが,  $\mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}} < 0$  より, 目的関数が任意の小さい値を取りうるということがわかる. したがって, この場合, 主問題 (P) は有限の最適解を持たない.

以上をまとめると,

- 主問題 (P) と双対問題 (D) にともに最適解がある
- 主問題 (P) は解を持たず, 双対問題 (D) は有限の最適解を持たない (解がないか, あるいは目的関数をいくらでも大きく取れるような解が存在する)
- 主問題 (P) は有限の最適解を持たず (解がないか, あるいは目的関数をいくらでも小さく取れるような解が存在する), 双対問題 (D) は解を持たない

という 3 種類の状況しかありえないことがわかる. これらをまとめて, 定理の結論が得られる. ///

定理 23 の証明から直ちに次の結論が導かれる.

系 24 ( $\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\kappa}, 0$ ) を (61) の強相補解とする. このとき,  $\bar{\kappa} \neq 0$  であれば,  $\bar{\mathbf{x}}/\bar{\kappa}$  は主問題 (P) の最適解であり,  $\bar{\mathbf{y}}/\bar{\kappa}$  は双対問題 (D) の最適解である.  $\bar{\kappa} = 0$  のときには, 主問題 (P) および双対問題 (D) はともに有限の最適解を持たない.

系 24 より, 与えられた線形計画問題 (主問題) を解くことは, 問題 (61) の強相補解をひとつ見つける問題に帰着されたことになる. では, どのようにして強相補解を数値的に求めたらよいのであろうか. この方法について議論することが次節の主題である.

## 4 歪対称問題の数値解法

### 4.1 アフィンスケーリング方向と中心化方向

前節までの議論により, 線形計画問題を解くことが歪対称問題の強相補解をひとつ見付けることに帰着されることが示された. 本節では, 強相補解を数値的に求める手法について議論する.

繰り返しになるが, 解くべき問題をあらためて明示しておこう. 解くべき問題は,

$$(\text{SP}) \quad \min\{\mathbf{q}^T\xi : \mathbf{M}\xi + \mathbf{q} \geq \mathbf{0}, \xi \geq \mathbf{0}\} \quad (68)$$

である. ただし,  $\mathbf{M}$  は  $n$  次の歪対称行列であり,  $\mathbf{q} \geq \mathbf{0}$ ,  $\xi$  と  $\mathbf{q}$  は  $n$  次のベクトルとする. また, 先に述べたように,  $\mathbf{s}(\xi) = \mathbf{M}\xi + \mathbf{q}$  とし, これをしばしば  $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\xi)$  と略記する. また, 求めるべきものは (68) の強相補解であり, 単に (68) の目的関数を最小とするのみの解では不十分である.

本節では、歪対称問題 (SP) は、第 3 節で述べた、主問題と双対問題の双方を内点が既知の問題に埋め込む手順 ((60), (61) に対応する) によって得られているものと仮定する。このような場合は  $\xi > \mathbf{0}$ ,  $s > \mathbf{0}$  かつ  $\xi s = \mathbf{1}$  を満たす点、すなわち  $\mu = 1$  に対応する中心パス上の点ですでに得られている。本節で述べるアルゴリズムはいずれもこの点を初期値として利用する。問題 (SP) の構成法から、内点が空でない ( $SP^+ \neq \emptyset$ ) ことは明らかである。よって、第 2 節で述べた議論の結果はすべて適用可能である。

第 2 節で述べたように、中心パスは歪対称問題の解析的中心に収束する軌道である。解析的中心は強相補解のひとつであったから、「目的関数を減少させ、なおかつ中心パスからなるべく離れないように解を動かす」という戦略で最適解を探索すれば、数値的に強相補解を求めることができそうに思える。実際に上述のような戦略を実行するのが内点法の一般的なアルゴリズムである。

さて、解析的中心は、非線形連立方程式  $M\xi - s + q$ ,  $\xi s = \mu \mathbf{1}$  の  $\mu \rightarrow 0$  としたときの極限であった。そこで、現在位置から解析的中心に向かう方向を定めるために、 $\mu = 0$  とし、非線形関数

$$F(\xi, s) = \begin{bmatrix} M\xi - s + q \\ s\xi \end{bmatrix} \quad (69)$$

の零点を求める問題を解くことを考える。点  $\xi$  と  $s = M\xi + q$  が与えられているとき、 $\xi' = \xi + \Delta\xi_a$  および  $s' = s + \Delta s_a$  として  $F(\xi', s') = \mathbf{0}$  を  $\Delta\xi_a$  と  $\Delta s_a$  について Taylor 展開によって近似的に解くと、 $\Delta\xi_a$  と  $\Delta s_a$  は方程式

$$\begin{bmatrix} M & -I \\ S & \Xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\xi_a \\ \Delta s_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -s\xi \end{bmatrix} \quad (70)$$

の解となる。(70) を解くことによって得られる探索ベクトル  $(\Delta\xi_a^T, \Delta s_a^T)^T$  をアフィンスケーリング方向と呼ぶ。

アフィンスケーリング方向は目的関数を減少させるには都合が良い。しかし、制約条件を満たす領域が「曲がって」いるときには、解をこの方向に動かすと、解は中心パスから逸脱し、さらに制約条件を満たす領域からも外れてしまう可能性がある。このような不都合を避けるためには、中心パス上のある点に向かう方向を定め、その方向に解を動かすのがよい。そこで、 $\mu = (1/n)s^T\xi$  とし、この  $\mu$  に対応する中心パス上の点を求める問題を解くことを考える。この問題も、先と同様に、関数

$$G(\xi, s) = \begin{bmatrix} M\xi - s + q \\ s\xi - \mu \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (71)$$

の零点を求める問題に帰着される。 $\xi' = \xi + \Delta\xi_c$ ,  $s' = s + \Delta s_c$  とし、(71) を Taylor 展開によって近似的に解くと、 $\Delta\xi_c$  と  $\Delta s_c$  は方程式

$$\begin{bmatrix} M & -I \\ S & \Xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\xi_c \\ \Delta s_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -s\xi + \mu \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (72)$$

の解となる。(72) を解くことによって得られる探索ベクトル  $(\Delta\xi_c^T, \Delta s_c^T)^T$  を中心化方向と呼ぶ。

さて、アフィンスケーリング方向が強相補解へ向かう方向で中心化方向が中心パスへ向かう方向であったことから、アフィンスケーリング方向と中心化方向の線形結合を取ると、中心パスからあまり離れずに目的関数を減少させるという目的が達成されることがわかる。ここで、(71) と (72) を一般化した、

$$\begin{bmatrix} M & -I \\ S & \Xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\xi \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -s\xi + \sigma\mu \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (73)$$

という式を考えよう。(71) は (73) の  $\sigma$  に零を代入したものであり、(72) は (73) の  $\sigma$  に 1 を代入したものである。よって、(73) の  $\sigma$  を 0 以上 1 以下の値に設定して解くことでアフィンスケーリング方向と中心化方向の組み合わせが得られ、 $\sigma$  が零に近いほどその方向はアフィンスケーリング方向に近く、1 に近いほど中心化方向に近くなることがわかる。

なお、(73) は  $\Delta\xi$  と  $\Delta s$  に関する線形方程式であるが、(73) の上半分は  $\Delta s$  について解けて  $\Delta s = M\Delta\xi$  となるので、実際にはこれを (73) の下半分に代入した

$$(S + \Xi M) \Delta\xi = -s\xi + \sigma\mu \mathbf{1} \quad (74)$$

を  $\Delta\xi$  について解いても同じ結果が得られる。補題 5 より、 $\xi > \mathbf{0}$ ,  $s > \mathbf{0}$  なら、行列  $S + \Xi M$  は正則だから、(74) はつねに解を持つ。

内点法のアルゴリズムには

- アフィンスケーリング方向と中心化方向をどのように組み合わせるか、
- 定まった方向にどの程度動くか

に依じていろいろなバリエーションがあるが、それらはおおむね以下に述べる一般形の特別な場合になる。

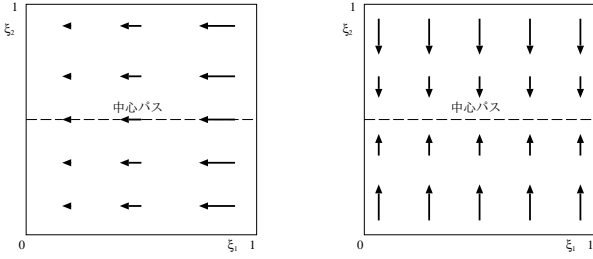
**アルゴリズム 25 (内点法 (一般形))** 精度パラメータ  $\varepsilon$  を適当に決め、中心パス上の初期値  $\xi = \xi^0$ ,  $s = s(\xi)$  を取った上で、以下のループを実行する。

```

while  $\xi^T s \geq \varepsilon$  do
   $\sigma$  を決める
   $\mu = s^T \xi / n$  とする
  (74) を解いて  $\Delta\xi$ ,  $\Delta s$  を決める
   $\alpha$  を決める
   $\xi = \xi + \alpha \Delta\xi$ 
   $s = s + \alpha \Delta s$ 
end

```

**例 26** 例 20 の問題における、各点におけるアフィンスケーリング方向と中心化方向を図 4 に示す。この例ではアフィンスケーリング方向は中心パスと平行になる。また、 $\mu = (1/2)s^T\xi$  の場合の中心化方向は中心パスと垂直となり、これを用いて解を更新すると目的関数は減少しない。



(a) アフィンスケーリング  
方向

(b) 中心化方向

図 4: 各点における探索ベクトルの方向

以下では、上述の一般形に分類されるアルゴリズムの中では比較的単純な、ショートステップパス追跡法とロングステップパス追跡法について述べる。

## 4.2 ショートステップパス追跡法

ショートステップパス追跡法は、アルゴリズム 25 において、

$$\sigma = 1 - \theta/\sqrt{n}, \quad \alpha = 1 \quad (75)$$

とすることによって得られるアルゴリズムである。パラメータ  $\theta$  は、たとえば 0.4 とすればよい (この数値の根拠については定理 32 で述べる)。

**アルゴリズム 27 (ショートステップパス追跡法)** 精度パラメータ  $\varepsilon$  を適当に決め、中心パス上の初期値  $\xi = \xi^0$ ,  $s = s(\xi)$  を取る。続いて、 $\sigma = 1 - 0.4/\sqrt{n}$  とおき、以下のループを実行する。

```
while  $\xi^T s \geq \varepsilon$  do
   $\mu := s^T \xi / n$ 
   $\xi := \xi + \Delta \xi$ 
   $s := s(\xi)$ 
end
```

end

ここに、 $\Delta \xi$ ,  $\Delta s$  は線形方程式 (73) の解である。

さて、以下ではショートステップパス追跡法において、解が中心パスのある近傍を外れることがないということと、 $\mu$  が零に収束することを示すのだが、そのためにはいくつか準備が必要である。

まず最初に、ある  $\mu$  に対する中心パスの  $\mathcal{N}_2(\theta)$  近傍を、

$$\mathcal{N}_2(\theta, \mu) = \{(\xi, s) : \|\xi s - \mu \mathbf{1}\| \leq \theta \mu, \xi > \mathbf{0}, s > \mathbf{0}, s = M\xi + q\} \quad (76)$$

と定義する。 $\sigma = 1 - \theta/\sqrt{n}$  としたときの (73) の解  $\Delta \xi$ ,  $\Delta s$  に対し、

$$\tilde{\xi} = \xi + \Delta \xi, \quad \tilde{s} = s + \Delta s, \quad \tilde{\mu} = \tilde{\xi}^T \tilde{s} / n \quad (77)$$

とおく。(73) の第 1 式と  $M$  が歪対称行列であることから、

$$\Delta s^T \Delta \xi = 0 \quad (78)$$

となることに注意する。また、 $\mathbf{1}^T \mathbf{1} = n$  であり、 $\mathbf{1}^T (\xi s) = n\mu$  である ( $\mu = \xi^T s / n$  に注意)。

まず  $\mu$  が零に収束することを見よう。

**定理 28** ショートステップパス追跡法により、 $\mu$  は指数関数の速さで零に漸近する。

[証明]  $\mu$  と  $\tilde{\mu}$  の関係を求めればよい。(77) と (78) より、

$$n\tilde{\mu} = (\xi + \Delta \xi)^T (s + \Delta s) = n\mu + (\xi^T \Delta s + s^T \Delta \xi) \quad (79)$$

である。ここで  $\xi^T \Delta s = \mathbf{1}^T \Xi \Delta s$ ,  $s^T \Delta \xi = \mathbf{1}^T S \Delta \xi$  に注意すると、(73) の第 2 式から、

$$\xi^T \Delta s + s^T \Delta \xi = \mathbf{1}^T (-s\xi + \sigma \mu \mathbf{1}) = -n\mu + \sigma n\mu \quad (80)$$

となる。(80) を (79) に代入し、両辺を  $n$  で割ると、

$$\tilde{\mu} = \sigma \mu \quad (81)$$

が得られる。(81) に  $\sigma$  の値 (75) を代入すると、

$$\tilde{\mu} = (1 - \theta/\sqrt{n})\mu \quad (82)$$

となる。よって、第  $k$  解目の繰り返しにおける  $\mu$  の値を  $\mu_k$ ,  $\mu$  の初期値を  $\mu_0$  とすると、 $\mu_k = (1 - \theta/\sqrt{n})^k \mu_0$  となる。 $n \geq 1$  のときは  $0 < 1 - \theta/\sqrt{n} < 1$  だから、 $\mu$  は指数関数の速さで零に漸近する。///

**注意 29**  $\mu$  の初期値が正であることから、 $\mu$  は有限回の繰り返しでは零にならない (つねに正の値を取る)。また、アルゴリズムの停止条件は「 $\mu$  が指定された値以下になったら終了」であったから、有限回の繰り返し計算によってアルゴリズムが終了することがわかる。

続いて、 $(\xi, s) \in \mathcal{N}_2(\theta)$  のとき、 $(\tilde{\xi}, \tilde{s}) \in \mathcal{N}_2(\theta)$  となることを見る。このために、いくつか補題を準備する。

**補題 30** ベクトル  $u, v$  が  $u^T v \geq 0$  をみたすとき、

$$\|uv\| \leq 2^{-3/2} \|u + v\|^2 \quad (83)$$

が成り立つ。

[証明]  $\mathcal{P} = \{i : u_i v_i \geq 0\}$ ,  $\mathcal{N} = \{i : u_i v_i < 0\}$  とする。

$$u^T v = \sum_{i \in \mathcal{P}} u_i v_i + \sum_{i \in \mathcal{N}} u_i v_i = \sum_{i \in \mathcal{P}} |u_i v_i| - \sum_{i \in \mathcal{N}} |u_i v_i| \geq 0$$

より、

$$\sum_{i \in \mathcal{P}} |u_i v_i| \geq \sum_{i \in \mathcal{N}} |u_i v_i| \quad (84)$$

である。一方,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\mathbf{v}\| &= \left( \sum_{i \in \mathcal{P}} u_i^2 v_i^2 + \sum_{i \in \mathcal{N}} u_i^2 v_i^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left( \left( \sum_{i \in \mathcal{P}} |u_i v_i| \right)^2 + \left( \sum_{i \in \mathcal{N}} |u_i v_i| \right)^2 \right)^{1/2}\end{aligned}$$

であるが, ここで (84) を使い,  $u_i v_i \geq 0$  のときには,  $|u_i v_i| \leq (1/4)(u_i + v_i)^2$  であることに注意すると,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\mathbf{v}\| &\leq \left( 2 \left( \sum_{i \in \mathcal{P}} |u_i v_i| \right)^2 \right)^{1/2} = \sqrt{2} \left( \sum_{i \in \mathcal{P}} |u_i v_i| \right) \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \sum_{i \in \mathcal{P}} (u_i + v_i)^2 \right) \leq 2^{-3/2} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2\end{aligned}$$

となる。

補題 31 (77) の  $\tilde{\xi}, \tilde{s}$  は

$$\|\tilde{\xi}\tilde{s} - \tilde{\mu}\mathbf{1}\| \leq \frac{\mu}{\sqrt{2}} \frac{\theta^2}{1-\theta} \quad (85)$$

を満たす。

[証明] (81) より,

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_i \tilde{s}_i - \tilde{\mu} &= \xi_i s_i + (s_i \Delta \xi_i + \xi_i \Delta s_i) + \Delta \xi_i \Delta s_i - \sigma \mu \\ &= \xi_i s_i + (-\xi_i s_i + \sigma \mu) + \Delta \xi_i \Delta s_i - \sigma \mu = \Delta \xi_i \Delta s_i\end{aligned}$$

となるから,

$$\tilde{\xi}\tilde{s} - \tilde{\mu}\mathbf{1} = \Delta \xi \Delta s \quad (86)$$

である。

続いて,  $\|\Delta \xi \Delta s\|$  を評価しよう。  $\mathbf{D} = \Xi^{1/2} \mathbf{S}^{-1/2}$  とおくと,  $\Delta \xi \Delta s = (\mathbf{D}^{-1} \Delta \xi) (\mathbf{D} \Delta s)$  であるが, ここで  $(\mathbf{D}^{-1} \Delta \xi)^T (\mathbf{D} \Delta s) = \Delta \xi^T \Delta s = 0$  となることに注意し, 補題 30 を使うと,

$$\|\Delta \xi \Delta s\| \leq 2^{-3/2} \|\mathbf{D}^{-1} \Delta \xi + \mathbf{D} \Delta s\|^2 \quad (87)$$

となる。一方, (73) の第 2 式を使うと,

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^{-1} \Delta \xi + \mathbf{D} \Delta s &= \Xi^{-1/2} \mathbf{S}^{-1/2} (\mathbf{S} \Delta \xi + \Xi \Delta s) \\ &= \Xi^{-1/2} \mathbf{S}^{-1/2} (-s \xi + \sigma \mu \mathbf{1})\end{aligned} \quad (88)$$

となるから, これを (87) に代入すると,

$$\|\Delta \xi \Delta s\| \leq 2^{-3/2} \sum_i \frac{(-s_i \xi_i + \sigma \mu)^2}{\xi_i s_i} \quad (89)$$

となる。一方,  $(\xi, s) \in \mathcal{N}_2(\theta, \mu)$  より, 各  $i$  に対し,  $|\xi_i s_i - \mu| \leq \theta \mu$ , ゆえに  $-\theta \mu \leq \xi_i s_i - \mu \leq \theta \mu$  であり, したがって  $\xi_i s_i \geq (1 - \theta) \mu$  である。これを (89) に代入すると,

$$\|\Delta \xi \Delta s\| \leq \frac{2^{-3/2} \|\mathbf{s} \xi + \sigma \mu \mathbf{1}\|^2}{(1 - \theta) \mu} \quad (90)$$

となる。ところで,  $\mathbf{1}^T (\xi s) = n \mu$ ,  $\mathbf{1}^T \mathbf{1} = n$  に注意すると,  $\mathbf{1}^T (\xi s - \mu \mathbf{1}) = 0$  となるから,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{s} \xi - \sigma \mu \mathbf{1}\|^2 &= \|(\mathbf{s} \xi - \mu \mathbf{1}) + (1 - \sigma) \mu \mathbf{1}\|^2 \\ &= \|(\mathbf{s} \xi - \mu \mathbf{1})\|^2 + \|(1 - \sigma) \mu \mathbf{1}\|^2\end{aligned}$$

となる。さらに,  $(\xi, s) \in \mathcal{N}_2(\theta, \mu)$  であることを使うと,

$$\|\mathbf{s} \xi - \sigma \mu \mathbf{1}\|^2 \leq \theta^2 \mu^2 + n(1 - \sigma)^2 \mu^2 \quad (91)$$

が得られる。(91) を (90) に代入すると

$$\|\Delta \xi \Delta s\| \leq 2^{-3/2} \mu \frac{\theta^2 + n(1 - \sigma)^2}{1 - \theta}$$

が得られる。ここに (75) を代入すると,

$$\|\Delta \xi \Delta s\| \leq \frac{\mu}{\sqrt{2}} \frac{\theta^2}{1 - \theta} \quad (92)$$

となる。

(86) と (92) を合わせて, (85) が得られる。///

以上の準備のもとで, 次の定理を示そう。

定理 32  $\theta = 0.4$  とすると, ショートステップパス追跡法の各ステップにおいて,  $(\xi, s) \in \mathcal{N}_2(\theta, \mu)$  となる。

[証明] 初期値は中心パス上にあるから, 初期値については定理は明らかに成り立つ。

次に,  $\theta = 0.4$  とすると,  $(\xi, s) \in \mathcal{N}_2(\theta, \mu)$  であれば  $(\tilde{\xi}, \tilde{s}) \in \mathcal{N}_2(\theta, \tilde{\mu})$  であることを見る。このためには, 任意の  $n \geq 1$  に対して

$$\frac{\mu}{\sqrt{2}} \frac{\theta^2}{1 - \theta} \leq (1 - \theta / \sqrt{n}) \theta \mu \quad (93)$$

が成り立つような  $\theta$  を求めればよい。さて, (93) の両辺を  $\theta \mu$  で割り,  $n \geq 1$  に注意すると,  $1 - \theta \leq 1 - \theta / \sqrt{n}$  より,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\theta}{1 - \theta} \leq 1 - \theta \quad (94)$$

であれば (93) が成り立つことがわかる。そこで, (94) が成り立つための  $\theta$  に関する条件を求めよう。(94) は

$$\theta^2 - \left( 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \theta + 1 \geq 0 \quad (95)$$

と整理できるが, ここで  $0 < \theta < 1$  でなければならないことに注意すると, (95) を満たす  $\theta$  の条件は,

$$0 < \theta \leq \frac{1}{2} \left( (2 + 1/\sqrt{2}) - \sqrt{2\sqrt{2} + \frac{1}{2}} \right), \quad (96)$$

$$\frac{1}{2} \left( (2 + 1/\sqrt{2}) + \sqrt{2\sqrt{2} + \frac{1}{2}} \right) \leq \theta < 1$$

となる。(96) を数値的に評価すると,

$$0 < \theta \leq 0.441, \quad 2.266 \leq \theta < 1 \quad (97)$$

となる。(97)の第2の不等式は解を持たないから、結局、 $0 < \theta \leq 0.441$  でなければならない。 $\theta = 0.4$  は確かにこの条件を満たす。

さて、(93)において、 $1 - \theta/\sqrt{n} = \sigma$ 、 $\sigma\mu = \tilde{\mu}$  であることに注意し、補題31を用いると、

$$\|\tilde{\xi}\tilde{s} - \tilde{\mu}\mathbf{1}\| \leq \theta\tilde{\mu} \quad (98)$$

が成り立つ。また、

$$\begin{aligned} \tilde{s} &= s + \Delta s = s + M\Delta\xi \\ &= M(\xi + \Delta\xi) + q = M\tilde{\xi} + q \end{aligned}$$

である。さらに、(98)より、 $-\theta\tilde{\mu} \leq \tilde{\xi}_i\tilde{s}_i - \tilde{\mu} \leq \theta\tilde{\mu}$  であり、したがって  $(1 - \theta)\tilde{\mu} \leq \tilde{\xi}_i\tilde{s}_i$  であるが、ここで(81)を用いると、 $\tilde{\xi}_i\tilde{s}_i \geq (1 - \theta)\sigma\mu > 0$  となる。よって  $\tilde{\xi} > \mathbf{0}$ 、 $\tilde{s} > \mathbf{0}$  である。以上によって  $(\tilde{\xi}, \tilde{s}) \in \mathcal{N}_2(\theta, \tilde{\mu})$  であることが示された。///

### 4.3 ロングステップパス追跡法

ロングステップパス追跡法では、ショートステップパス追跡法と異なり、ステップ幅は可変である。また、解が束縛されるべき中心パスの近傍をショートステップパス追跡法より大きく取る。以下がそのアルゴリズムである。

**アルゴリズム 33** (ロングステップパス追跡法) 精度パラメータ  $\varepsilon$  を適当に決める。定数  $\gamma$ 、 $\sigma_{\min}$ 、 $\sigma_{\max}$  を  $0 < \gamma < 1$ 、 $0 < \sigma_{\min} < \sigma_{\max} < 1$  となるように定めた上で、以下のループを実行する。

```
while  $\xi^T s \geq \varepsilon$  do
   $\mu := s^T \xi / n$ 
   $\sigma \in [\sigma_{\min}, \sigma_{\max}]$  を定める
   $\max\{\alpha : (\xi_\alpha, s_\alpha) \in \mathcal{N}_{-\infty}(\gamma, \mu), 0 \leq \alpha \leq 1\}$  を解く
   $\xi := \xi + \alpha \Delta \xi$ 
   $s := s(\xi)$ 
end
```

end

ここに、 $\Delta\xi$ 、 $\Delta s$  は線形方程式(73)の解である。

アルゴリズム33において  $\alpha$  の最大値を求めるには2分探索などを利用すればよい。

以下では、ロングステップパス追跡法において、解が中心パスのある近傍を外れることがないということと、 $\mu$  が零に収束することを見る。このために、ある  $\gamma$  に対する中心パスの  $\mathcal{N}_{-\infty}(\gamma)$  近傍を、

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{-\infty}(\gamma, \mu) &= \{\xi, s : \xi s \geq \gamma\mu\mathbf{1}, \\ &\quad \xi > \mathbf{0}, s > \mathbf{0}, s = M\xi + q\} \end{aligned} \quad (99)$$

により定義する。続いて、以下の補題を準備する。

**補題 34** ロングステップパス追跡法の各ステップにおいて、

$$\|\Delta\xi\Delta s\| \leq 2^{-3/2}(1 + 1/\gamma)n\mu \quad (100)$$

が成り立つ。

[証明]  $\Delta\xi^T \Delta s = 0$  より、補題30が適用可能であり、(87)および(88)を使うと、

$$\begin{aligned} \|\Delta\xi\Delta s\| &\leq 2^{-3/2} \|\xi^{1/2}s^{1/2} + \sigma\mu\xi^{-1/2}s^{-1/2}\|^2 \\ &= 2^{-3/2} \left( \xi^T s - 2\sigma\mu n + \sigma^2\mu^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\xi_i s_i} \right) \end{aligned} \quad (101)$$

となる。ここで  $\xi^T s = n\mu$ 、 $\xi_i s_i \geq \gamma\mu$ 、 $0 < \sigma < 1$ 、 $0 < \gamma < 1$  に注意すると、(101)は

$$\begin{aligned} \|\Delta\xi\Delta s\| &\leq 2^{-3/2} \left( n\mu - 2\sigma\mu n + \sigma^2\mu^2 n \frac{1}{\gamma\mu} \right) \\ &= 2^{-3/2} n\mu \left( 1 - 2\sigma + \frac{\sigma^2}{\gamma} \right) \\ &\leq 2^{-3/2} n\mu \left( 1 + \frac{1}{\gamma} \right) \end{aligned}$$

となる。これは証明すべき不等式であった。///

続いて、

$$\xi_\alpha = \xi + \alpha\Delta\xi, \quad s_\alpha = s + \alpha\Delta s, \quad \mu_\alpha = \xi_\alpha^T s_\alpha / n \quad (102)$$

とおく。定義より、 $s_\alpha = M(\xi_\alpha + q)$  である。

**定理 35** ロングステップパス追跡法の各ステップにおいて、

$$\alpha > 2^{3/2}(\sigma/n)\gamma(1 - \gamma)/(1 + \gamma) \quad (103)$$

となる。また、繰り返し計算によって  $\mu$  は零に漸近し、その速さは指数関数で上から押さえられる。

[証明] 証明をいくつかのステップに分ける。

$\mu_\alpha = (1 - \alpha(1 - \sigma))\mu$  となること:  $\Delta\xi^T \Delta s = 0$  だから、

$$n\mu_\alpha = n\mu + \alpha(\Delta\xi^T s + \Delta s^T \xi) \quad (104)$$

である。一方、

$$\Delta\xi^T s + \Delta s^T \xi = \mathbf{1}^T (S\Delta\xi + \Xi\Delta s) = \mathbf{1}^T (-s\xi + \sigma\mu\mathbf{1})$$

であり、 $\mathbf{1}^T (s\xi) = n\mu$ 、 $\mathbf{1}^T \mathbf{1} = n$  である。これらを(104)に代入して全体を  $n$  で割ると、

$$\mu_\alpha = (1 - \alpha(1 - \sigma))\mu \quad (105)$$

となる。

$\alpha$  の値が(103)を満たすこと: パラメータ  $\alpha$  は  $0 < \alpha \leq 1$  かつ  $(\xi_\alpha, s_\alpha) \in \mathcal{N}_{-\infty}(\gamma, \mu)$  を満たす範囲で最大化されている。ところで、

$$g(\gamma) = \gamma(1 - \gamma)/(1 + \gamma) \quad (106)$$

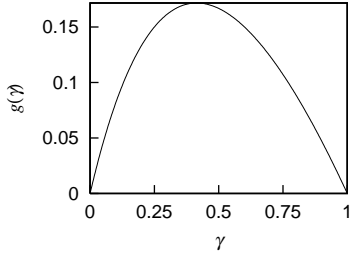


図 5: 関数  $g(\gamma)$  の形状

を区間  $[0, 1]$  における  $\gamma$  の関数と見ると, これは  $\gamma = \sqrt{2} - 1$  において最大値  $(\sqrt{2} - 1)(2 - \sqrt{2})/\sqrt{2}$  を取る (図 5). また, このとき,  $2^{3/2}\gamma(1-\gamma)/(1+\gamma) = (\sqrt{2} - 1)(2 - \sqrt{2}) \simeq 0.485$  である. したがって,  $n \geq 1$  であれば,

$$2^{3/2}(\sigma/n)\gamma(1-\gamma)/(1+\gamma) < 1 \quad (107)$$

である. よって,

$$\alpha \leq 2^{3/2}(\sigma/n)\gamma(1-\gamma)/(1+\gamma)$$

なら  $(\xi_\alpha, s_\alpha) \in \mathcal{N}_{-\infty}(\gamma, \mu)$  となることが言えれば, (103) が示される. これを見よう.

$$\begin{aligned} \xi_\alpha s_\alpha &= (\xi + \alpha \Delta \xi)(s + \alpha \Delta s) \\ &= \xi s + \alpha(s \Delta \xi + \xi \Delta s) + \alpha^2 \Delta \xi \Delta s \\ &= \xi s + \alpha(-s \xi + \sigma \mu \mathbf{1}) + \alpha^2 \Delta \xi \Delta s \end{aligned} \quad (108)$$

である. 一方, 補題 34 より,

$$\Delta \xi \Delta s \geq -\|\Delta \xi \Delta s\| \mathbf{1} \geq -2^{-3/2}(1+1/\gamma)n\mu \mathbf{1} \quad (109)$$

が得られる. (109) を (108) に代入し,  $\xi s \geq \gamma \mu \mathbf{1}$  に注意すると,

$$\xi_\alpha s_\alpha \geq \left( (1-\alpha)\gamma\mu + \alpha\sigma\mu - \alpha^2 2^{-3/2} \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) n\mu \right) \mathbf{1}$$

となる. よって, (105) を使うと,  $\xi_\alpha s_\alpha \geq \gamma \mu \mathbf{1}$  であるためには,

$$\begin{aligned} (1-\alpha(1-\sigma))\gamma \\ \leq \left( (1-\alpha)\gamma + \alpha\sigma - \alpha^2 2^{-3/2} \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) n \right) \end{aligned} \quad (110)$$

であればよい. (110) を整理すると,

$$\alpha^2 2^{-3/2} \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) n \leq \alpha\sigma(1-\gamma),$$

すなわち

$$\alpha \leq 2^{3/2} \frac{\sigma}{n} \gamma \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \quad (111)$$

が得られる.

$\mu$  が零に漸近すること:  $\alpha$  は最大化問題

$$\max\{\alpha : (\xi_\alpha, s_\alpha) \in \mathcal{N}_{-\infty}(\gamma, \mu), 0 \leq \alpha \leq 1\} \quad (112)$$

の解であり, (111) を満たす  $\alpha$  は (112) の制約条件を満たすから,

$$\alpha \geq 2^{3/2} \frac{\sigma}{n} \gamma \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \quad (113)$$

としてよい. (113) を (105) に代入すると,

$$\mu_\alpha \leq \left( 1 - 2^{3/2} \frac{(1-\sigma)\sigma}{n} \gamma \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \right) \mu \quad (114)$$

が得られる. ところで, 関数  $h(\sigma) = \sigma(1-\sigma)$  は上に凸だから, 区間  $[\sigma_{\min}, \sigma_{\max}]$  における  $h$  の最小値  $y_{\min}$  は

$$h_{\min} = \min\{\sigma_{\min}(1-\sigma_{\min}), \sigma_{\max}(1-\sigma_{\max})\}$$

により定まる. また,  $h_{\min} > 0$  である. したがって,

$$\delta = 2^{3/2} h_{\min} \gamma \frac{1-\gamma}{1+\gamma}$$

とおくと,  $\delta > 0$  であり,

$$\mu_\alpha \leq \left( 1 - \frac{\delta}{n} \right) \mu \quad (115)$$

$\mu_\alpha > 0, \mu > 0$  であり, (115) は各ステップで成り立つから,  $\mu$  の初期値を  $\mu(0)$ ,  $k$  回目の繰り返し計算における  $\mu$  の値を  $\mu(k)$  とすると,

$$\mu(k) \leq (1 - \delta/n)^k \mu(0) \quad (116)$$

となる. したがって  $\mu$  は零に漸近する. また, (116) より, 収束の速さが指数関数で押さえられることがわかる. ///

**例 36** 例 20 の問題の  $\mathcal{N}_2(\theta, \mu)$  近傍と  $\mathcal{N}_{-\infty}(\gamma, \mu)$  を求めておこう.  $\mu = s^T \xi / 2 = \xi_1 / 2$  であることに注意する.

まず,  $(\xi, s) \in \mathcal{N}_2(\theta, \mu)$  かつ  $s^T \xi / 2 = \mu$  を満たす点を求めよう. であれば,  $\xi_1 = 2\mu$  であり, かつ

$$\left\| \begin{bmatrix} \xi_1(1-\xi_2) - \mu \\ \xi_1 \xi_2 - \mu \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} -2\mu\xi_2 + \mu \\ 2\mu\xi_2 - \mu \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{2}\mu|2\xi_2 - 1|$$

だから,  $\|s\xi - \mu\mathbf{1}\| \leq \theta\mu$  なる条件は,

$$-\theta/\sqrt{2} \leq 2\xi_2 - 1 \leq \theta/\sqrt{2}$$

と等価である. ここから,  $(\xi, s) \in \mathcal{N}_2(\theta, \mu)$  かつ  $s^T \xi / 2 = \mu$  であれば,  $\xi$  は

$$\xi_1 = 2\mu, \frac{1}{2}(1 - \theta/\sqrt{2}) \leq \xi_2 \leq \frac{1}{2}(1 + \theta/\sqrt{2}) \quad (117)$$

なる範囲に含まれることがわかる.

次に,  $(\xi, s) \in \mathcal{N}_{-\infty}(\gamma, \mu)$  かつ  $s^T \xi / 2 = \mu$  を満たす点を求めよう. 先と同様に,  $s^T \xi / 2 = \mu$  より,  $\xi_1 = 2\mu$  である. また,  $\xi_1(1-\xi_2) = 2\mu(1-\xi_2) \geq \gamma\mu$  から  $\xi_2 \leq 1 - \gamma/2$  が導かれ, さらに  $\xi_1 \xi_2 = 2\mu\xi_2 \geq \gamma\mu$  より  $\xi_2 \geq \gamma/2$  が導かれる. よって,  $(\xi, s) \in \mathcal{N}_{-\infty}(\theta, \mu)$  かつ  $s^T \xi / 2 = \mu$  であれば,  $\xi$  は

$$\xi_1 = 2\mu, \gamma/2 \leq \xi_2 \leq 1 - \gamma/2 \quad (118)$$

なる範囲に含まれることがわかる。

図 6 に、 $\theta = 0.4$ ,  $\gamma = 0.6$  としたときの各  $\mu$  に対する  $\mathcal{N}_2(0.4, \mu)$ ,  $\mathcal{N}_\infty(0.6, \mu)$  と集合  $\{(\xi, s) : s^T \xi / 2 = \mu\}$  の交わりを示す。これらはいずれも中心パスを含む右に開いた矩形領域であり、 $\mathcal{N}_2(0.4, \mu) \subset \mathcal{N}_\infty(0.6, \mu)$  である。

注意すべきことは、 $\mu$  が零に漸近しても、この領域の  $\xi_2$  方向の幅が狭まらないことである。ショートステップパス追跡法やロングステップパス追跡法によって保証されるのは、これらのアルゴリズムが生成した  $\xi$  の列  $(\xi(k))_{k \in \mathbb{N}}$  がこの領域内にあることと、 $\mu$  が単調に減少することだけである。点列  $(\xi(k))_{k \in \mathbb{N}}$  は解析的中心に収束するわけではないし、そもそも収束するかどうか不明かでない。ただし、この点列が集積点として強相補解を持つことは保証される。

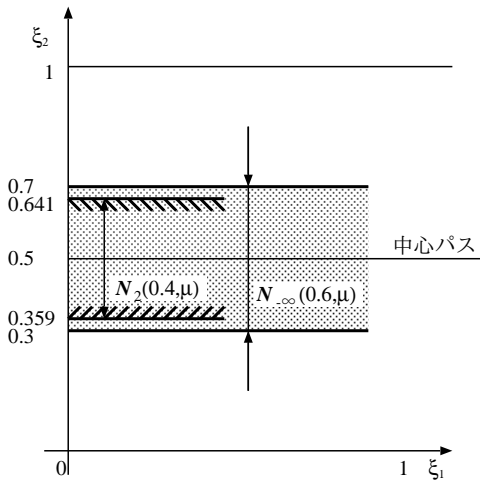


図 6:  $\mathcal{N}_2$  近傍と  $\mathcal{N}_\infty$  近傍

#### 4.4 数値解に含まれる誤差の評価

ここまでの議論で、ショートステップパス追跡法とロングステップパス追跡法において、 $\mu \rightarrow 0$  となることは示された。では、 $\mu$  が十分小さくなり、計算が終了したとき、数値解から計算される主問題と双対問題の解は正確だろうか？

まず最初に注意すべきことは、 $\mu$  が零に収束したときに得られる解は強相補解ではあるが、解析的中心とは限らないということである。さらに、ショートステップパス追跡法やロングステップパス追跡法を適用することで得られる解の系列を点列とみたとき、これは強相補解を集積点として持つが、この点列自体は収束するとは限らないということも要注意である。

主問題と双対問題の解を再構成するために必要なのは強相補解であって、解析的中心ではなかった。だから、上述の点列が解析的中心に収束するとは限らないこと自体は大きな問題ではない。ただし、有限回の繰り返し計算の後に計算を終了したときには、 $\mu$  は十分小さくなっていても零ではな

いから、対応する数値解から計算される主問題と双対問題の解が正しいか否かは問題になりうる。

このようにして計算される解は一定の誤差の範囲で主問題と双対問題の解に一致することが示せるのだが、この証明は若干複雑である。以下でこれについて述べる。

ショートステップパス追跡法とロングステップパス追跡法を統一的に取り扱うため、まず  $\mathcal{N}_2(\theta, \mu) \subset \mathcal{N}_\infty(1-\theta, \mu)$  であることに注意する。そこで、 $s, \xi$  が  $s^T \xi / n = \mu$ ,  $(\xi, s) \in \mathcal{N}_\infty(\gamma, \mu)$  を満たし、 $\mu$  が十分小さいとき、 $(\xi, s)$  との距離が  $\mu$  のオーダーで押さえられるような強相補解が存在すれば、数値解は  $\mu$  に対応した誤差の範囲内で正確であるということになる。

以下の議論では、まず上述の条件を満たす強相補解の存在を示した上で、厳密な最適解と数値的に求められた数値解との誤差を評価する。

さて、計算終了時の解  $(\xi, s)$  に十分小さい強相補解が存在するなら、 $\xi$  と  $s$  の各成分は零に近いものと一定以上の正の値を取るものに分かれているはずである。次の補題で、実際に上述のようになることを示す。

**補題 37** 歪対称問題 (SP) の  $(\xi, s) \in \mathcal{N}_\infty(\gamma, \mu)$ ,  $\mu = \xi^T s / n$  なる数値解が得られているものとする。また、この問題の解析的中心を  $(\xi_\#, s_\#)$  とし、 $B = \{i : \xi_{\#,i} \neq 0\}$ ,  $N = \{i : s_{\#,i} \neq 0\}$  とする。このとき、ある正の定数  $K$  が存在して、 $i \in B$  なら  $\xi_i \geq \gamma/K$  かつ  $s_i \leq K\mu$ ,  $i \in N$  なら  $\xi_i \leq K\mu$  かつ  $s_i \geq \gamma/K$  となる。

[証明]  $(\xi_\# - \xi)^T (s_\# - s) = 0$  より、 $\xi^T s_\# + s^T \xi_\# = n\mu$  である。そこで、

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{n} \min \{ \min \{ \xi_{\#,i} : i \in B \}, \min \{ s_{\#,i} : i \in N \} \}$$

とおくと、 $i \in B$  のとき、 $\xi_{\#,i} s_i \leq \xi^T s_\# + s^T \xi_\# = n\mu$  であり、 $\xi_{\#,i} \geq n/K$  だから、 $s_i \leq K\mu$  となる。また、 $\xi_i s_{\#,i} \geq \gamma\mu$  だったから、 $\xi_i \geq \gamma/K$  となる。同様に、 $i \in N$  のとき、 $s_{\#,i} \xi_i \leq n\mu$  より  $\xi_i \leq K\mu$  であり、 $\xi_i s_{\#,i} \geq \gamma\mu$  から  $s_i \geq \gamma/K$  となる。///

**注意 38** 解析的中心は歪対称問題を定める行列  $M$  とベクトル  $q$  から一意的に決まる。また、補題 37 の定数  $K$  は解析的中心から決まる。このため、定数  $K$  は数値解法のアルゴリズムや数値解の値には依存しない。

**定理 39** ショートステップパス追跡法あるいはロングステップパス追跡法によって  $\xi^T s / n = \mu$  なる数値解が得られ、 $\mu$  が十分小さいとき、ある正の定数  $C$  に対し、歪対称問題のある強相補解  $(\zeta, s(\zeta))$  が存在し、 $\|\xi - \zeta\| \leq C\mu$  となる。

[証明] 補題 37 と同様に、 $(\xi_\#, s_\#)$  を解析的中心とし、 $B = \{i : \xi_{\#,i} \neq 0\}$ ,  $N = \{i : s_{\#,i} \neq 0\}$  とする。また、 $\xi$  と  $s$  から  $B$  と  $N$  に対応する添字を抜き出して作った部分ベクトルを

それぞれ  $\xi_B, \xi_N, s_B, s_N$  とする. 添字の順番を適当に入れ換えることで,

$$\xi = [\xi_B^T, \xi_N^T]^T, \quad s = [s_B^T, s_N^T]^T \quad (119)$$

と書ける. さらに,  $\xi$  と  $s$  の関係式  $s = M\xi + q$  を, この添字の並べ換えに対応して,

$$\begin{bmatrix} s_B \\ s_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_B \\ \xi_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (120)$$

と書き直しておく. 記号が複雑になるのを避けるため, 補題 37 の定数  $K$  に対し,  $\varepsilon = K\mu$  とおく. このとき, 補題 37 より, ベクトル  $s_B$  の各成分は  $\varepsilon$  以下だったから,

$$q_3 = (1/\varepsilon)s_B \quad (121)$$

とおくと, ベクトル  $q_3$  の各成分の値は 1 以下になる. 同様に,

$$q_4 = (1/\varepsilon)\xi_N \quad (122)$$

とおくと, ベクトル  $q_4$  の各成分の値は 1 以下になる. これらを使って (120) の第 1 式を書き直すと,

$$\varepsilon q_3 = M_1 \xi_B + \varepsilon M_2 q_4 + q_1 \quad (123)$$

となる. (123) を  $\varepsilon$  による項とよらない項に分けると,

$$\varepsilon(q_3 - M_2 q_4) = M_1 \xi_B + q_1 \quad (124)$$

が得られる.

以下の議論では, 基底の取り方に依存した複雑な議論を避けるため, 行列  $M_1$  とこの行列から定まる線形写像を同一視する. さて, 十分小さい  $\varepsilon$  に対して (124) が成り立つためには, ベクトル  $q_1$  が  $M_1$  の像空間に含まれる必要がある. これはなぜかという点, ベクトル  $q_1$  を  $M_1$  の像空間  $\text{Im}M_1$  とその直交補空間  $(\text{Im}M_1)^\perp$  に対応して  $q_1 = q_{11} + q_{12}$ ,  $q_{11} \in \text{Im}M_1$ ,  $q_{12} \in (\text{Im}M_1)^\perp$  と直和分割したとき,  $\|q_{12}\| \neq 0$  であれば, (124) の左辺のベクトルのノルムは  $\|q_{12}\|$  以下にはならないのに対し, (124) の右辺のベクトルのノルムは  $\varepsilon$  を小さくすればいくらでも小さくなるからである. ゆえに  $\|q_{12}\| = 0$ , したがって  $q_{12} = 0$  であり, それゆえ  $q_1 \in \text{Im}M_1$  である. 次に,  $\xi_B$  を  $(\text{Ker}M_1)^\perp$  と  $\text{Ker}M_1$  に直和分割し,

$$\xi_B = \xi_{B1} + \xi_{B2}, \quad \xi_{B1} \in (\text{Ker}M_1)^\perp, \quad \xi_{B2} \in \text{Ker}M_1 \quad (125)$$

と書く. このとき,  $M_1 \xi_B = M_1 \xi_{B1}$  である. 一方,  $M_1$  の定義域を  $(\text{Ker}M_1)^\perp$ , 値域を  $\text{Im}M_1$  に制限した写像は正則だから, ある  $\zeta_{B1} \in (\text{Ker}M_1)^\perp$  が取れて,  $-q_1 = M_1 \zeta_{B1}$  となる. さて, ここで,

$$\zeta_B = \zeta_{B1} + \xi_{B2} \quad (126)$$

とおき,

$$\zeta = [\zeta_B^T, 0^T] \quad (127)$$

とする. (126), (127) および (122) より,

$$\xi - \zeta = \begin{bmatrix} \xi_B^T \\ \xi_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \zeta_B^T \\ 0^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{B1} - \zeta_{B1} \\ \varepsilon q_4 \end{bmatrix} \quad (128)$$

となることに注意しよう.

以下では,  $\varepsilon$  が十分小さいとき, (127) がひとつの強相補解を定め, かつ  $\|\xi - \zeta\|$  が  $\varepsilon$  のオーダーで押さえられることを示す.

まず最初に,  $\zeta$  の定義より,

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_B \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_3 \zeta_B + q_2 \end{bmatrix} \quad (129)$$

である. (123) の左辺および右辺から (129) の第 1 式の左辺および右辺を減じ, (121), (125) および (126) を使うと,

$$\varepsilon q_3 = M_1(\xi_{B1} - \zeta_{B1}) + \varepsilon M_2 q_4 \quad (130)$$

となる. (130) を  $\varepsilon$  に依存する項とそうでない項に分けて整理すると,

$$\varepsilon(q_3 - M_2 q_4) = M_1(\xi_{B1} - \zeta_{B1}) \quad (131)$$

となる. ここで,  $q_3$  と  $q_4$  の各要素の値は 1 以下であることに注意しよう. さらに,  $\xi_{B1} - \zeta_{B1} \in (\text{Ker}M_1)^\perp$  であり,  $M_1$  を  $(\text{Ker}M_1)^\perp$  から  $(\text{Im}M_1)$  への写像とみなすとこの写像は正則であったから, ある正の定数  $\sigma_{\min}$  が取れて,

$$\sigma_{\min} \|\xi_{B1} - \zeta_{B1}\| \leq \|M_1(\xi_{B1} - \zeta_{B1})\| \quad (132)$$

が満たされる. そこで, (131) の両辺のノルムを取ってから (132) を代入し, 両辺を  $\sigma_{\min}$  で割り, さらに

$$L = \|q_3 - M_2 q_4\| \quad (133)$$

とおくと,

$$\|\xi_{B1} - \zeta_{B1}\| = \|\xi_B - \zeta_B\| \leq \frac{L}{\sigma_{\min}} \varepsilon \quad (134)$$

となる. したがって,  $\|q_4\| \leq \sqrt{n}$  に注意すると, (128) より,

$$\|\xi - \zeta\| \leq \left( \frac{L}{\sigma_{\min}} + \sqrt{n} \right) \varepsilon \quad (135)$$

となる.

では, 以上のようにして定められた  $\zeta$  に対し,  $s(\zeta) = M\zeta + q$  とすると,  $\varepsilon$  (したがって  $\mu$ ) が十分小さければ,  $(\zeta, s(\zeta))$  は強相補解になることを確認しよう. 補題 37 より  $\xi_B$  の各成分は  $\gamma/K$  以上だったから, (135) より, このとき  $\zeta_B$  の各成分が零とならないことは明らかである. よって,  $s(\zeta)$  の添字  $N$  に対応する成分が零でないことが示されれば,  $(\zeta, s(\zeta))$  が強相補解であることが確認できたことになる. これを見るために, (119) と同様の添字の並べかえにより,  $s(\zeta) = [s_B^T(\zeta), s_N^T(\zeta)]^T$  と書くと,

$$\begin{aligned} s_N(\zeta) &= M_3 \zeta_B + q_2 \\ &= M_3(\xi_B + (\zeta_B - \xi_B)) + M_4 \xi_N - M_4 \xi_N + q_2 \\ &= s_N + M_3(\zeta_B - \xi_B) - M_4 \xi_N \end{aligned}$$



より,

$$s_N(\zeta) - s_N = M_3(\zeta_B - \xi_B) - M_4\xi_N \quad (136)$$

が得られる. ここで (122)(134) を使うと,

$$\|s_N(\zeta) - s_N\| \leq \left( \|M_3\| \frac{L}{\sigma_{\min}} + \|M_4\| \sqrt{n} \right) \varepsilon \quad (137)$$

となる. すなわち,  $s_N(\zeta)$  の各成分の対応する  $s_N$  からの偏差は  $\varepsilon$  で押さえられる. 一方, ふたたび補題 37 より,  $s_N$  の各成分は  $\gamma/K$  以上だったから,  $\varepsilon$  (したがって  $\mu$ ) が十分小さければ  $s_N(\zeta)$  の各成分は零より大きくなる.

以上によって,  $(\zeta, s(\zeta))$  が強相補解であることが示された. また, (135) より,  $C = (L/\sigma_{\min} + \sqrt{n})K$  とおくと,

$$\|\xi - \zeta\| \leq C\mu \quad (138)$$

となる.

定理 39 より,  $\mu$  が十分小さくなるまで計算を続けていけば, もとの問題の最適解と数値解との誤差は  $\mu$  のオーダーで押さえられることがわかる.

## 5 おわりに

本稿では, 内点法の一つである主-双対内点法の理論的な枠組と実際の解法について解説した. 予備知識の少ない読者が他の文献を参照せずに数学的に曖昧なところの生じる余地なくアルゴリズムを理解できるように可能な限り配慮したつもりである.

内点法における問題の定式化の仕方にはいくつかの種類があり, 解法はさらに多種多様である. 本項では記述の論理的な一貫性を重視したため, これらのバリエーションについては一切述べなかった. 特に, 内点法でもっともよく用いられる Mehrotra の予測子・修正子法については, 実用上は極めて有用であるがアルゴリズムの見通しが悪いので, 一切述べなかった. 内点法の各種のアルゴリズムを調べるのに有用な文献は [1, 4] である. 興味のある読者はこれらの文献を参照してほしい.

## 参考文献

- [1] 小島 政和, 土谷 隆, 水野 眞治, 矢部 弘: 内点法, 朝倉書店 (2001)
- [2] 今野 浩, 山下 浩: 非線形計画法, 日科技連 (1978)
- [3] C. Roos, T. Terlaky and J. -Ph. Vial: Theory and Algorithms for Linear Optimization, Wiley (1997)
- [4] S. J. Wright: Primal-Dual Interior-Point Methods, SIAM (1997)

## A ショートステップパス追跡法のサンプルプログラム

以下に, Scilab によるショートステップパス追跡法のサンプルプログラムを示す. この例では, 制約条件を満たす領域を  $1 \leq x_i \leq 2$ ,  $(1 \leq i \leq n)$  なる  $n$  次の超立方体の内部とし, 目的関数  $x_1 + \dots + x_n$  を最小化する問題を解いている. 変数 SMALL は精度パラメータである. 主問題の解は計算終了時に変数 sol に代入される. 解くべき問題を変更したいときには, A, b, c の定義を書き換えればよい.

```
//Short Step Path Following Algorithm
SMALL=1e-8; //Accuracy parameter
stacksize(1000000);

//---A,b,c (canonical form) should be specified here---
//Below is the example of minimizing x_1+...+x_n
// subject to 1 <= x_i <= 2
n=10;
A=[eye(n,n);-eye(n,n)];
b=[ones(n,1);-2*ones(n,1)];
c=ones(n,1);
//---End of the definition of A,b,c---

x0=ones(size(A,2),1);
s0=1 ./ x0;
y0=ones(size(A,1),1);
t0=1 ./ y0;
bb=t0+b-A*x0;
cb=s0-c+A'*y0;
be=1-b'*y0+c'*x0;
M=[zeros(size(A,1),size(A,1)) A -b bb;
-A' zeros(size(A,2),size(A,2)) c cb;
b' -c' 0 be;
-bb' -cb' -be 0];
q=[zeros(1,size(A,1)),zeros(1,size(A,2)),...
0 size(A,1)+size(A,2)+2]';
x=[y0' x0' 1 1]';

[n,junk]=size(x);
e=ones(n,1);

sigma=1*(1-0.4/sqrt(n));

s=M*x+q;
mu=(s'*x)/n;

while mu>SMALL
X = diag(x);
S = diag(s);
p=-S*X*e+mu*sigma*e;
d=(S+X*M)\p;
x=x+d;
s=M*x+q;
mu=(s'*x)/n;
end
sol=x(size(A,1)+1:size(A,1)+size(A,2))/...
x(size(A,1)+size(A,2)+1);
```

## B ロングステップパス追跡法のサンプルプログラム

以下に, Scilab によるロングステップパス追跡法ののサンプルプログラムを示す. 使い方はショートステップパス追跡法のプログラムと同様である.  $\sigma_{\min}$ ,  $\sigma_{\max}$ ,  $\gamma$  はプログラム中ではそれぞれ `smin`, `smax`, `gamma` と標記され, 値はそれぞれ 0.001, 0.999,  $1e-5$  である.  $\sigma$  (プログラム中では `sigma`) の決定には乱数を用いている.

```
//Long Step Path Following Algorithm
SMALL=1e-8; //Accuracy parameter
smin=0.001;
smax=0.999;
gamma=1e-5;
stacksize(1000000);

//---A,b,c (canonical form) should be specified here---
//Below is the example of minimizing x_1+...+x_n
// subject to 1 <= x_i <= 2
n=10;
A=[eye(n,n);-eye(n,n)];
b=[ones(n,1);-2*ones(n,1)];
c=ones(n,1);
//---End of the definition of A,b,c---

x0=ones(size(A,2),1);
s0=1 ./ x0;
y0=ones(size(A,1),1);
t0=1 ./ y0;
bb=t0+b-A*x0;
cb=s0-c+A'*y0;
be=1-b'*y0+c'*x0;
M=[zeros(size(A,1),size(A,1)) A -b bb;
-A' zeros(size(A,2),size(A,2)) c cb;
b' -c' 0 be;
-bb' -cb' -be 0];
q=[zeros(1,size(A,1)),zeros(1,size(A,2)),...
0,size(A,1)+size(A,2)+2]';
x=[y0' x0' 1 1]';

[n,junk]=size(x);
e=ones(n,1);

s=M*x+q;
mu=(s'*x)/n;

while mu>SMALL
X = diag(x);
S = diag(s);
sigma=rand()*(smax-smin)+smin;
p=-S*X*e+mu*sigma*e;
dx=(S+X*M)\p;
ds=M*dx;
d0=0;
d1=1;
for i=(1:10)
alp=((d0+d1)/2);
xa=x+alp*dx;
sa=s+alp*ds;
if( xa.*sa-gamma*mu*ones(n,1) <= 0 )
# v has negative element: alp is too large
d1=alp;
else
```

```
d0=alp;
end
end
x=x+alp*dx;
s=M*x+q;
mu=s'*x/n;
end
sol=x(size(A,1)+1:size(A,1)+size(A,2))/...
x(size(A,1)+size(A,2)+1);
```