3　測定値の取り扱いと実験データ解析

本章の目的は, 実験において誤差を含んだデータを取り扱う方法について簡単に紹介することである。 まず有効数字と誤差という考え方について説明したあとで, 実験データ解析に必要となる確率論の初歩について簡単に紹介し, さいごに最小 2 乗法と呼ばれるデータ解析の手法について簡潔に解説する。

3.1　有効数字と誤差

3.1.1　誤差とは何か

誤差とは何かを考えるために, 例として, ものさしで A4 のノートの横幅を測る場合について考えてみよう。ふつうのものさしには 1mm までの目盛りがついている。目盛りの 10 分の 1 まで読むことにすると, ノートの横幅はだいたい 21.06cm くらいと読めるだろう。 では, この 21.06cm という数値は厳密に正しいだろうか?

そうではないと考えられる根拠がいくつかある。たいていノートの端はすこしささくれているから, どこをノートの端とみなすべきかは不明瞭である。目盛りの 10 分の 1 は目分量で読むことになるから, 光線の具合などによって見え方が変化しそうである。 さらに, ものさしの長さは気温によって変わるから, ものさしの目盛りも完全に信用できるわけではない。

結果として, われわれはノートの横幅の**真の値**を知ることはできないのである[i)]。すなわち, 測定によって得られた値には, ある程度の (大きさを見積ることのできる) 不確かさが含まれている。このような不確かさを**誤差**と呼ぶ。

われわれがなにかを測るときには, 上の例と同様の理由によって, 測って得られた値 (測定値) には必ずある程度の誤差が含まれると考えなければならない。

一般に, 測定値等に含まれる誤差の大きさを明示するときには, 測定値を

$$x_{best} \pm \delta x \tag{1}$$

のように標記する[ii)]。ここに, x_{best} は測定すべき量の**最良推定値** (最も良いと思われる推定値) であり, δx は見込まれる誤差の大きさの絶対値である。これ以外に, 測定値に続いて括弧内に誤差の大きさに対応する数字を書き込む流儀もある。

誤差の標記の具体例を見てみよう。素電荷 e は, 先に説明した誤差の記法のうち前者を用いれば,

$$e = (1.602176462 \pm 0.000000063) \times 10^{-19}\ [\mathrm{C}] \tag{2}$$

のように標記される。一方で, 後者の記法を用いれば,

$$e = 1.602176462(63) \times 10^{-19}\ [\mathrm{C}] \tag{3}$$

のように標記される。

3.1.2　有効数字

有効数字とは, 数値の表現において, 誤差を含まない数字または誤差の影響を受けない数字のことをいう。一般に, 実数 x の近似値が 10 進少数で

$$d_m d_{m-1} \cdots d_0 . d_{-1} d_{-2} \cdots \tag{4}$$

のように標記され (ただし $d_m \neq 0$),

$$d_m \cdots d_{l+1}(d_l - 1) < x < d_m \cdots d_{l+1}(d_l + 1) \tag{5}$$

が成立し, かつ

$$d_m \cdots d_l(d_{l-1} - 1) < x < d_m \cdots d_l(d_{l-1} + 1) \tag{6}$$

が正しくないか, あるいは確信できないとき, 数字 d_m から d_l までを有効数字という[iii)]。また, このとき, 誤差を含まない数値の桁数 $m - l + 1$ のことを有効数字の桁数あるいは有効桁数という。

ここで, 例として, 6 桁の表示桁を持つディジタルマルチメータで電圧を測っている場合を考えよう。このような場合, 測定値として表示される数値はふつうは一定値にはならない。桁が小さい側の数値がふらふらと変動することが多いのである。

たとえば, 表示された数値の最小値が 1.50237, 最大値が 1.50243 であったとしよう。電圧の推定値を 1.50240 とした場合,

$$1.5023 < 電圧 < 1.5025$$

であるということが測定値の変動の範囲から確信でき,

$$1.50239 < 電圧 < 1.50241$$

i) 真の値とは測定量の正しい値のことを言う。これは多くの場合は実際には求めることができない概念的な量である。

ii) この資料では, (1) の標記を

$$x_{best} - \delta x < x < x_{best} + \delta x$$

という意味で使うことにする (等号を含まない)。

iii) この有効数字の定義は文献 [4] によった。有効数字という概念は明確に定義されないまま使用されることも多い [5]。また, 文献 [3] では, 本資料とは異なり, 「記録された数字のうち最初の位取りのための零を除いたものはすべて有効数字である」という定義が採用されている。

となっていることは確信できないから，有効数字は 1.5024 から小数点を除いたもので，有効桁は 5 桁である。

一般に，誤差が含まれる数値を (1) のように誤差つきで記録するときには，x_{best} の部分に対応する数字を誤差の標記の最小桁に対応した桁まで書いてゆく。この際，必要なら零を補う。たとえば，先に述べた表示された数値の最小値が 1.50237，最大値が 1.50243 である例において誤差を ±0.00003 と見積った場合には，測定値は

$$1.50240 \pm 0.00003 \tag{7}$$

のように記録される[iv)]。

一方，表示された数値の変動がより激しく，その変動が激しい数値を無理して読んで，最小値が 1.28911，最大値が 1.38775 であると結論付けられたという場合を考えよう。さらに，電圧の推定値を，上記の最大値と最小値の平均を取って四捨五入し，1.33843 と記録してしまったとする。このときには，有効数字はどうなるだろうか。

この場合，測定値の変動の範囲からは，

$$1.33842 < \text{電圧} < 1.33844$$

となっていることは確信できない。では最小桁の次の桁はどうかというと，

$$1.3383 < \text{電圧} < 1.3385$$

となっていることも確信できない。その次の桁についても同様に，

$$1.337 < \text{電圧} < 1.339$$

となっていることは確信できない。

$$1.32 < \text{電圧} < 1.34$$

が確信できないのも同様である。唯一確信できるのは，

$$1.2 < \text{電圧} < 1.4$$

という推定のみである。結論として言えることは何かというと，一見精密な数値 1.33843 の有効数字は最初の 1.3 のみで，有効桁は 2 桁しかない，ということである。だから，このような場合に，測定値を「1.28911 から 1.38775 の範囲にある」などのように (ディジタルの表示桁に惑わされて) 無理に精密に読み，また，測定値を

$$1.33843 \pm 0.04932 \tag{8}$$

などのように記録しても，記録された測定値の大部分には有効数字という観点からは意味がない。また，この測定値は時間とともにばらついている測定器の読みの上限と下限を有限の観測時間で見積ったものなのであるから，±0.04932 という数値がどこまで意味があるかも大変疑わしい。

(8) のような記録のしかたの問題は，測定値の有効桁と比較して無駄に記録された数字が多いということであった。そして，この不適切な記録は誤差標記の桁数が多いことに起因していた。では，誤差を標記するときに適切な桁数はどの程度だろうか?

実は，誤差を標記するときの桁数は，学生実験のレベルではふつうは 1 桁で十分である。だから，本来は，(8) は，

$$1.34 \pm 0.05 \tag{9}$$

などのように記録されるべきだったのである。

誤差の標記については第 3.1.5 節においてもう少し詳しく述べる。

3.1.3　誤差が明示されていない測定値の取り扱い

ところで，測定値等に含まれるはずの誤差が明示されていない場合もある。このような場合には，数の標記から位取りをあらわすための 0 を取り除いた数字の部分が有効数字であると解釈する。また，有効数字の最小桁が 10^l に対応しているとき，数値には $\pm 1 \times 10^l$ の誤差が含まれているものと解釈する[v)]。

だから，たとえば，誤差を含むであろう数値が

$$x = 0.012 \tag{10}$$

というように標記されていたときには，これを，

$$0.011 < x < 0.013 \tag{11}$$

あるいは

$$x = (1.2 \pm 0.1) \times 10^{-2} \tag{12}$$

という意味に解釈するのである[vi)]。

誤差を含むであろう数値を 0.012 と標記したものと 0.01201 と標記したものは有効数字および誤差という観点において意味がまったく異なるので注意を要する。

iv) この資料の定義にしたがえば，(7) の標記における有効数字は 15024，有効桁は 5 桁となる。一方，文献 [3] の定義では，(7) の標記における有効数字は 150240，有効桁は 6 桁となる。

v) 誤差が明示されていない測定値における誤差の見積りには厳密な規則はないようである。本稿では文献 [5] の規則を採用した。

vi) この資料の定義では (12) のように書き表された区間には端点は含まれない (等号なし，開区間になる)。だから，(11) と (12) の意味は同一である。

3.1.4　偶然誤差と系統誤差

先に挙げたノートの横幅を測る例において, 誤差が2種類の互いに性質の異なった理由によって発生していることに気付いただろうか?

ひとつめは, ノートのけばだちや目盛りの読み取りの不確かさが原因となる誤差である。 この誤差が測定値を大きくする方向に働くか小さくする方向に働くかは**偶然**によって決まる。このような偶然による誤差のことを**偶然誤差**という。

ふたつめは, ものさしの伸縮による誤差である。 気温が高いと極端に伸びるものさしを使って長さを測る場合には, ノートの横幅は暑い日にはつねに短か目に測定されてしまう。このように, 偶然によらない, 一定の傾向を持った誤差のことを**系統誤差**という。

系統誤差の大きさは一般に見積り難く, また系統誤差の原因を究明して除去することは非常に困難である。これに対し, 偶然誤差の影響を低減することは比較的容易である。これはなぜかというと, 偶然誤差は正負の方向に同じ程度の確からしさで働くと考えられるので, 同様の測定を何回もくり返しておこなって結果の平均を取れば, 誤差の影響は互いに打ち消しあって小さくなると考えられるからである。平均を取ることの効果については後の節でもう少し詳しく述べる。

3.1.5　誤差の有効数字

一般に, 目盛りのついた計測機器を使って目分量で測定値を読み取るときには, 最小目盛りの 10 分の 1 まで読むという原則がある。最小目盛りの 10 分の 1 を読み取るとき, いくら正確に読み取っても最小桁の数値が ±1 程度変動することは不可避だから, 測定値には最小桁の数値 ± 1 の誤差が含まれると考えるのが妥当である。 このように考えると, 先に挙げたノートの横幅の測定例では, 実際に得られた横幅の測定値は

$$21.06 \pm 0.01\mathrm{cm}$$

と記載する方が妥当であろう。このとき, 誤差をあらわす数値 0.01cm の有効数字は 1 桁だけである。

第 3.1.2 節の例で述べたように, 測定値がディジタル表示になっていて, 測定値の読みがばらついているときには, 測定値のばらついている範囲から, 誤差を有効数字が 1 桁になるように見積るとよい。

測定値の精度を上げるために, 複数回の測定を繰り返したあとで統計処理をおこなうことで誤差を見積る場合もある。また, 何らかの方法で系統誤差を推定して, 誤差の標記に系統誤差を含める場合もある。このような場合には, (2) の例に見られるように, 誤差の有効数字を 2 桁取る場合がある。

一般に, 誤差は不確かさの目安であるから, 正確な値がわかるということはありそうもない。 だから, 誤差の有効数字は 1 桁か 2 桁あれば十分で, それより多く取ることにはほとんど意味はない。また, 第 3.1.2 節でも述べたように, 学生実験のレベルでは, たいていの場合は誤差の有効数字は 1 桁あれば十分である。

3.1.6　ディジタル表示の計測機器の有効数字

最近の計測機器には測定値がディジタル表示になっているものが多い。 実験に関する経験の浅い学生は計測機器に表示された桁と同じだけの有効数字があると考えがちであるが, これは誤りである。 計測機器の表示する値が何桁まで信用できるかは計測機器の物理的な特性から決まり, 計測機器の表示桁数が何桁あるかには無関係である。だから, 測定値を信頼できるものにするためには, 計測機器のマニュアルを参照して測定値が何桁まで信用できるかについて確認する必要がある。

もちろん, これとは別に, 測定している信号そのもののゆらぎによって測定値がばらつくこともある。

3.1.7　相対誤差

一般に, (1) の誤差の標記において, 誤差 δx が大きいか小さいかは x_{best} と δx の関係で決まる。そこで, 誤差の大きさ δx の最良推定値の絶対値 $|x_{best}|$ に対する比率

$$\frac{\delta x}{|x_{best}|} \tag{13}$$

も, 誤差の大きさの指標としてよく用いられる。 これを**相対誤差**あるいは誤差率と呼ぶ。

3.1.8　間接測定

測定したい量と一定の関係にあるいくつかの量について計測をおこない, その計測値から測定したい量を求めることを, **間接測定**という。 本節では, 間接測定において測定値から計算された量に含まれる誤差を見積る問題を考える。

例題として, 抵抗の両端に電圧をかけ, 電圧と電流の測定値から抵抗を求める問題を考えよう。電圧を V, 電流を I, 抵抗を R とすると, 抵抗 R は

$$R = \frac{V}{I} \tag{14}$$

によって間接的に測定される。

では, 電圧の測定値に $\pm\delta V$ の誤差があり, 電流の測定値に $\pm\delta I$ の誤差があるとき, 間接測定された抵抗の値の誤差をどの程度に見積ればよいだろうか?

最も簡単には,

$$\frac{|V|-\delta V}{|I|+\delta I} \leq R \leq \frac{|V|+\delta V}{|I|-\delta I} \tag{15}$$

とすればよい。 だが, この式はやや見通しが悪い。 そこで, より使いやすい式を導くために, δI が I と比べて十分小さいと仮定し,

$$\frac{1}{|I|\pm\delta I} = \frac{1}{|I|}\frac{1}{1\pm\dfrac{\delta I}{|I|}} \simeq \frac{1}{|I|}\left(1\mp\frac{\delta I}{|I|}\right) \tag{16}$$

と近似する[vii)]。(16) を (15) に代入し, さらに

$$|V|\pm\delta V = |V|\left(1\pm\frac{\delta V}{|V|}\right)$$

とおくと,

$$\begin{aligned}\frac{|V|}{|I|}\left(1-\frac{\delta V}{|V|}\right)\left(1-\frac{\delta I}{|I|}\right) &\leq R\\ \leq \frac{|V|}{|I|}\left(1+\frac{\delta V}{|V|}\right)&\left(1+\frac{\delta I}{|I|}\right)\end{aligned} \tag{17}$$

という近似が得られる。 δV や δI が $|V|$ や $|I|$ に比べて十分小さいときは, (17) において $\dfrac{\delta V}{|V|}\dfrac{\delta I}{|I|}$ は $\dfrac{\delta V}{|V|}$ や $\dfrac{\delta I}{|I|}$ と比較すると無視しうるほど小さいから, これを省略すると,

$$\frac{|V|}{|I|}\left(1-\frac{\delta V}{|V|}-\frac{\delta I}{|I|}\right) \leq R \leq \frac{|V|}{|I|}\left(1+\frac{\delta V}{|V|}+\frac{\delta I}{|I|}\right)$$

という評価が得られる。 すなわち, R の誤差は

$$\delta R \simeq \frac{|V|}{|I|}\left(\frac{\delta V}{|V|}+\frac{\delta I}{|I|}\right)$$

と見積られる。

続いて, 四則演算にもとづいて間接測定をおこなう場合の誤差の見積りの一般的な方法について述べておこう。測定される量 $x_1, \ldots, x_n$ にそれぞれ $\pm\delta x_1, \ldots, \pm\delta x_n$ の誤差が含まれ, $y_1, \ldots, y_m$ にそれぞれ $\pm\delta y_1, \ldots, \pm\delta y_m$ の誤差が含まれているものする。このとき,

$$z = x_1+\cdots+x_n-y_1-\cdots-y_m \tag{18}$$

なる式にしたがって間接測定をおこなうときの誤差は

$$\delta z \simeq \delta x_1+\cdots+\delta x_n+\delta y_1+\cdots+\delta y_m \tag{19}$$

と見積られる。また,

$$z = \frac{x_1\times\cdots\times x_n}{y_1\times\cdots\times y_m} \tag{20}$$

なる式にしたがって間接測定をおこなうときの誤差は

$$\frac{\delta z}{|z|} \simeq \left(\frac{\delta x_1}{|x_1|}+\cdots+\frac{\delta x_n}{|x_n|}+\frac{\delta y_1}{|y_1|}+\cdots+\frac{\delta y_m}{|y_m|}\right) \tag{21}$$

と見積られる。

さいごに, より一般的な

$$z = f(x_1, \ldots, x_n) \tag{22}$$

なる式にしたがって $x_1, \ldots, x_n$ から z を間接測定するときの誤差について考えてみよう。 ただし, x_1 から x_n にはそれぞれ $\pm\delta x_1, \ldots, \pm\delta x_1$ 程度の誤差が含まれているものとする。関数 f の点 $(x_1+\delta x_1, \ldots, x_n+\delta x_n)$ における値をテイラー展開によって近似すると,

$$\begin{aligned}f(x_1+\delta x_1, \ldots, x_n+\delta x_n) &\simeq f(x_1, \ldots, x_n)\\ &+\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\delta x_n\end{aligned}$$

となるから, 間接測定による誤差は

$$\delta z \simeq \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|\delta x_1+\cdots+\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|\delta x_n \tag{23}$$

と見積られる。

(23) の誤差の見積りは, 線形近似の精度が十分良ければ, 発生しうる誤差の上界を与える。すなわち, (23) を越える誤差が発生することはない。なお, 測定値がいくつかの統計的な条件を満たしているものと仮定すれば, 誤差をより小さく見積ることも可能である ([5], [6])。

3.1.9 間接測定値を記録するときの簡易規則

間接測定によって得られた測定値を記録する際には, 測定値を何桁まで記録するかが問題となる。直接測定される量に見込まれる誤差から (23) を使って間接測定の誤差を見積れば記録すべき桁数は決まるのだが, 測定値の精度がそれほど問題にならないような状況では, (23) は繁雑で使いにくい。大まかに間接測定値を記録するときには, より簡便な規則があれば便利である。本節では, 多少不正確ではあるが簡単な間接測定値を記録するときの規則を取り扱う。

vii) 等比級数の公式から, $|r|<1$ のとき, $\dfrac{1}{1-r} = 1+r+r^2+\cdots = 1+r+r^2\left(\dfrac{1}{1-r}\right)$ となる。 r が 0 に十分近いとき, r^2 は r と比較して十分小さくなるから, 上の式において r^2 の項を無視することができ, 結果として $\dfrac{1}{1-r} \simeq 1+r$ という近似が成り立つ。

加減算による間接測定　間接測定値を計算するために要求される演算が加減算のときには, (19) から測定値を記録するための目安が得られる。(19) にあらわれる $\delta x_1, \ldots, \delta x_n, \delta y_1, \ldots, \delta y_m$ のなかに値が大きいものや小さいものがあるときには, それらの中で値が一番大きいもの (値がほぼ同じものが複数あるときにはそのうちの 1 個) で誤差を代表させることができると考えられる。このような場合には, 必要なら四捨五入して, 間接測定値を記録する最小桁を測定量のなかで誤差の値がいちばん大きいものの最小桁に合わせれば, 極端におかしな記録のしかたをすることは防げる。

上の説明だけではわかりにくいと思われるので, 例によって実際の処理のようすを見ることにする。測定値 A が 1.341, 測定値 B が 0.22, 測定値 C が 0.00731 と誤差を明示せずに記録されていて, $D = A + B + C$ を間接測定値として記録したいという状況を考える。図 1 にこの場合の処理のようすを示す。この例では, 測定値 B に含まれる誤差が最大だから, 間接測定値 D は B の最小桁と同じ桁まで記録される。結果として得られる記録は $D = 1.57$ である。

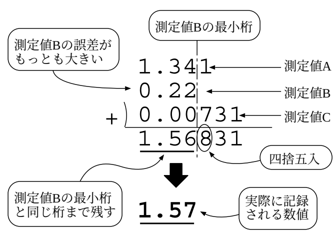

図 1: 間接測定値 (加減算) を記録するときの処理

なお, 間接測定値の計算に減算が含まれ, 減算に用いる 2 個の測定値の値がほぼ等しいときには, 計算値を記録すべき桁が極端に少なくなることがある。たとえば, 測定値 G が 4.815301, 測定値 H が 4.8152 と誤差を明示せずに記録され, $I = G - H$ を間接測定値として記録したいときには, 上述の規則にしたがって, $I = 0.0001$ (あるは 0.1×10^{-3}) と書く。このような場合には, 計算値自体が見込まれる誤差の大きさとほぼ同程度まで小さくなってしまうので, 計算値はあまり信頼できない。

乗除算による間接測定　間接測定値を計算するために要求される演算が乗除算のときには, 加減算と同一の方針は不適切である。それはなぜかと言うと, たとえば測定値 A,B にそれぞれ誤差 δA, δB の誤差が見込まれるとき, AB に見込まれる誤差の大きさは

$$(A + \delta A)(B + \delta B) - AB = A\delta B + B\delta A + \delta A\delta B$$

となり, δA は B 倍, δB は A 倍された形で誤差に寄与するので, 単純に δA と δB のうち大きい方を取っても誤差を見積ることにはならないからである。

そこで, このような場合には, (19) のかわりに相対誤差の式 (21) を使う。加減算のときと同様に, (19) にあらわれる $\dfrac{\delta x_1}{|x_1|}, \ldots, \dfrac{\delta x_n}{|x_n|}, \dfrac{\delta y_1}{|y_1|}, \ldots, \dfrac{\delta y_m}{|y_m|}$ の中で値がもっとも大きいものどれか一つが相対誤差全体を代表していると考える。このような場合には, 相対誤差がもっとも大きい測定値と同じ桁数を使って (ただし左端の位取りのための零を除く) 間接測定値を記録すれば, 相対誤差の見積りが 1 桁ずれてしまうような致命的な誤りはほぼ防げる。なお, 表示桁を調整するときには, 加減算の場合と同様に, 必要に応じて計算値を四捨五入する。

乗算の例を見てみよう。先の測定値 A が 1.341, 測定値 B が 0.22 と誤差を明示せずに記録されている例で, 間接測定によって $E = A \times B$ を求める問題を考える。この場合, 測定値 A に含まれる相対誤差は $0.001/1.341 \simeq 0.0007$, 測定値 B に含まれる相対誤差は $0.01/0.22 \simeq 0.05$ となり, B の方が相対誤差が大きい。$E = A \times B$ の計算値は 0.29502 であるが, B が記録された桁数から位取りのための零を除くと残る桁数は 2 桁だから, E の方も位取りのための零を除くと 2 桁の数が残るよう小数点以下第 3 桁目を四捨五入し, $E = 0.30$ と書く。

除算の場合も同様である。上と同じ条件のもとで, 間接測定によって $F = A/B$ を求めることを考える。この場合にも, 相対誤差が大きい B に合わせて F を記録する。$F = A/B$ の計算値は $6.09\dot{5}\dot{4}$(循環小数) であるが, これは位取りのための零を含まない。そこで, 記録値に 2 桁の数字が残るよう小数点以下第 2 桁目を四捨五入し, $F = 6.1$ と書く。

加減乗除のそれぞれの場合の計算例を図 2 にまとめておく。

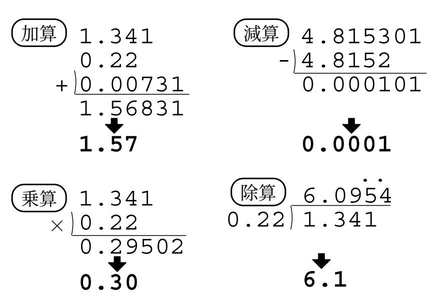

図 2: 間接測定値を記録するときの処理のまとめ

一般の場合の間接測定　間接測定に用いる式に加減算と乗除算が混在するときには, 通常の演算の優先順位

にしたがい, まず乗除のみを含む各項を計算し (記録すべき桁数は上述の乗除算の規則から決まる), 続いて加減算の規則にしたがって最終的に記録すべき桁数を決める。

複雑な間接測定の計算を筆算でおこなう際には, 四捨五入によって計算の確からしさが損なわれるのを防ぐために, 計算の途中であらわれる乗算や除算の結果を本来必要な桁数より 1 桁か 2 桁余分に記録しておく方がよい。また, 計算にコンピュータを使う場合には, 計算の途中であらわれる各項をわざわざ四捨五入する必要はなく, 最終的な計算結果を標記するときの桁数を正しく取れば十分である。

間接測定のための式に加減乗除以外の関数があらわれるときには, 間接測定値を適切に標記するための簡便は規則はない。よって, このような場合には, 誤差伝播の式 (23) から間接測定の誤差を見積る必要がある。

3.2　確率論の初歩

3.2.1　確率, 確率分布関数, 確率密度関数

まず例題を考えてみよう。

酔っぱらいが居酒屋から出て, 南から北に伸びる一本道をふらふら歩いている状況を考える。この酔っぱらいはとりあえず北に向かおうとしているが, 完全に酒が足に来ていて, 前に進むか後に戻るかがぜんぜん予想できないものとする。また, 彼あるいは彼女は最大時速 6km の速さで歩くことができるものとする。ここで, 酔っぱらいが居酒屋を出てから 1 時間後に, 居酒屋から北向きに測って w km の地点にいるものとしよう。さて, w の値が $-\infty$ から x のあいだにある確率はいくらだろうか?

ここで, わかっていることを整理してみる。酔っぱらいが区間 $(-\infty, x)$ にいる確率を $P(x)$ と書く。酔っぱらいの歩く速さが最大時速 6km であることから, x を -6km 以下に取ったとき, $P(x)$ は零である。x を -6km からだんだん増やしてゆくと, $P(x)$ は単調に増加してゆく。x が 6km 以上のとき $P(x)$ はちょうど 1 である。この例題では酔っぱらいの歩き方についての詳しい情報が与えられていないので, 上記の確率をこれ以上正確に求めることはできないのだが, 横軸に x を取り, 縦軸に $P(x)$ を取ることにすると, だいたい図 3 のようなグラフが描けることがわかるだろう。

上の例で挙げた w のように, その取り得る値が確率的に決まるような変数のことを**確率変数**とよぶ。また, x に確率変数 w が $-\infty$ から x のあいだにある確率を対応させる写像 $P(x)$ (すなわち図 3 のようなグラフ)

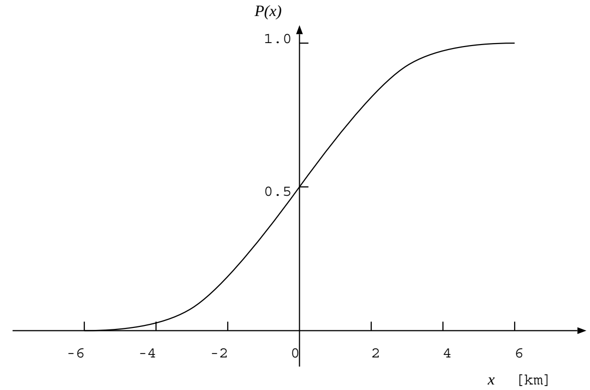

図 3: 確率分布関数 $P(x)$ の概形

のことを, 確率分布関数という。

確率分布関数 $P(x)$ にはいろいろな形のものがあるが, $P(x)$ は確率であるから, $0 \le P(x) \le 1$ がつねに成り立つ。また, $x_1 \le x_2$ であるとき w の値が x_1 以下であれば必ず w の値は x_2 以下となるから, $P(x_1) \le P(x_2)$ が成り立つ。すなわち, $P(x)$ は x に関し単調非減少である。 さらに, 確率変数 w が x_1 から x_2 のあいだにある確率は $P(x_2) - P(x_1)$ で与えられる。

確率分布関数 $P(x)$ が微分可能であるとき, $P(x)$ の導関数を**確率密度関数**とよぶ。 以下では, 確率分布関数 $P(x)$ に対応する確率密度関数を $p(x)$ と書く。

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dP}{dx}dx = P(x_2) - P(x_1)$$

であるから, 確率変数 w が x_1 と x_2 のあいだにある確率は, 確率密度関数を使えば,

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x)dx \tag{24}$$

により与えられることがわかる。 なお, 図 3 に対応する確率密度関数の概形は図 4 のようになる。

確率変数 x がとびとびの値しか取らないとき x は**離散的**であるといい, そうでないとき x は**連続的**であるという。 上に挙げた酔っぱらいの移動距離は連続的な場合の例である。 これに対し, 例えばさいころを 1 個振って出た目の数値を x とする場合には, x は 1 から 6 までの 6 種類の値しか取りえないから, 離散的である。

3.2.2　正規分布

確率分布関数にはいろいろなものがあるが, その中でもっとも重要なものは, 正規分布と呼ばれるものである。

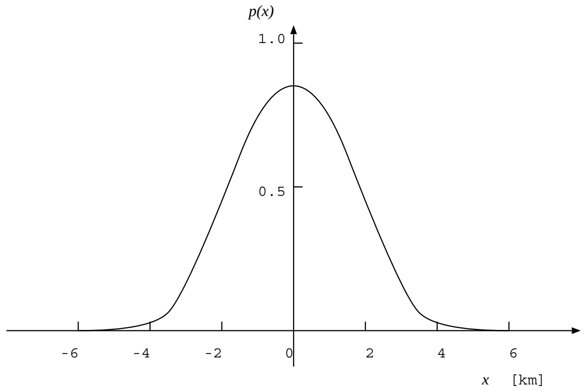

図 4: 確率密度関数 $p(x)$ の概形

正規分布とは, その確率密度関数が

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}] \tag{25}$$

で与えられるような確率分布関数のことをいう。 正規分布の確率分布関数は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}\exp[-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}]dt \tag{26}$$

によって与えられる。

3.2.3 独立性

2 個の確率変数 x と y に対し, x がどのような値を取ったときにも, y が特定の値を取る確率が変わらないとき, x と y は確率的に**独立である**という。 そうでないときには, x と y が確率的に**独立でない**という。

例として, 袋の中に白い碁石と黒い碁石を 5 個ずつ入れてよくかきまぜ, 中からでたらめに 1 個の碁石を取り出して, 色を確認してもとに戻す, という試行を考えよう。この試行を連続して 2 回おこなうものとする。この場合, 1 回目の試行で白い碁石が出ても黒い碁石が出ても 2 回目の試行で白い碁石あるいは黒い碁石が出る確率は変わらないから, 1 回目の試行と 2 回目の試行は独立である。

これとは別の例として, 袋の中に白い碁石と黒い碁石を 5 個ずつ入れてよくかきまぜ, 中からでたらめに 1 個の碁石を取り出して, 色を確認して捨てる, という試行を考えよう。この試行を連続して 2 回おこなうものとする。この場合, 1 回目の試行で白い碁石が出たか黒い碁石が出たかに応じて 2 回目の試行で白い碁石あるいは黒い碁石が出る確率が変わる。だから, 1 回目の試行と 2 回目の試行は独立でないことになる。

x の確率密度関数を $p_1(x)$, y の確率密度関数を $p_2(y)$ とし, x と y の組み合わせを確率変数 (x,y) と見たときの確率密度関数を $p_3(x,y)$ としたとき, x と y が確率的に独立であるための必要十分条件は $p_3(x,y) = p_1(x)p_2(y)$ となることであることが証明される。

3.2.4 平均, 分散

確率密度関数 $p(x)$ を持つ確率変数 x が与えられているものとする。 このとき, 確率変数 x の平均値は,

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \tag{27}$$

によって定義される。 また, 確率変数 x の分散 σ は,

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2 p(x)dx \tag{28}$$

によって定義される。 定義からわかるように, 平均とは確率変数 x がどのあたりを中心にしてばらついているかをあらわす指標であり, 分散は確率変数 x が平均のまわりにどのくらい散らばっているかをあらわす指標である。図 5 に, 平均が零で分散が異なる 2 種類の確率分布に対応する確率密度関数を示す。 実線が分散が小さい確率分布の確率密度関数であり, 点線が分散が大きい確率分布の確率密度関数である。分散が小さい確率分布ほど確率変数が平均値に近い値を取る可能性が高くなるようすが図から見て取れる。なお, 図 5 に

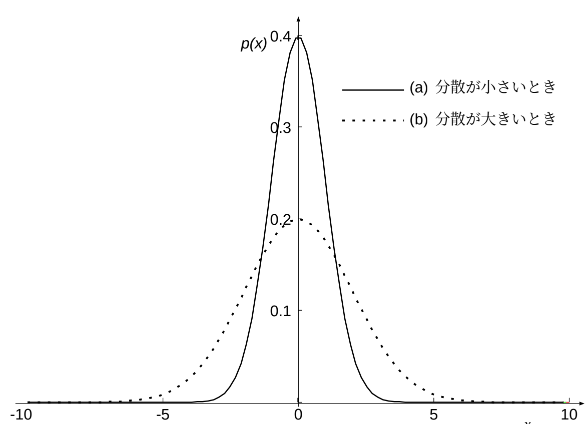

図 5: 平均が同一で分散が異なる確率密度関数

示した確率密度関数は両方とも正規分布に対応するものである。 正規分布の確率密度関数は, 図 5 に示したように釣鐘型である。

さいごに, 確率密度関数 (25) を持つ正規分布では平均と分散はそれぞれ m と σ^2 になることを注意しておく。

3.2.5 標本平均, 標本分散, 不偏分散

(27) および (28) で見た通り, 連続的な確率変数の平均および分散は, 確率密度関数がわかっていれば計算できる。ところで, われわれが確率的な現象を取り扱うときには, 確率密度関数の形が事前に完全にわかっていることはまれである。ここでは, 正規分布にしたがう確率変数の平均および分散を実験によって得られた標本からどのように推定するかについて考えてみよう。

確率変数 x を測定する実験を n 回おこない, 得られた標本が $x_1, \ldots, x_n$ であったとする。また, x_i と x_j $(i \neq j)$ は確率的に独立であると仮定する。

まず平均の推定について考える。 m の推定値は

$$E = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \tag{29}$$

とするのが良さそうである。 (29) のことを**標本平均**という。

分散の推定は平均の推定に比べて厄介で,「良い」推定のしかたが 2 種類ある。ひとつめは

$$V_{MLE}^2 = \frac{(x_1 - E)^2 + \cdots + (x_n - E)^2}{n} \tag{30}$$

というものである。 これは**標本分散**と呼ばれる。 もうひとつは,

$$V_{UB}^2 = \frac{(x_1 - E)^2 + \cdots + (x_n - E)^2}{n-1} \tag{31}$$

というものである。 これは**不偏分散**と呼ばれる。

一般に, 確率分布のあるパラメータ θ を確率的に決まる観測値 $x_1, \ldots, x_n$ から関数 $\widehat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ によって推定するとき, $\widehat{\theta}$ 自体もある確率分布にしたがう確率変数となる。$\widehat{\theta}$ の確率分布の確率密度関数を $L(\theta, x_1, \ldots, x_n)$ としよう。関数 $L(\theta, x_1, \ldots, x_n)$ のことを**尤度関数**と呼ぶ。$\widehat{\theta}$ の平均が θ と一致するとき, すなわち

$$\int \cdots \int \widehat{\theta} L(\theta, x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \theta$$

となるとき, $\widehat{\theta}$ を θ の**不偏推定量**という。また, 尤度関数 $L(\theta, x_1, \ldots, x_n)$ は $x_1, \ldots, x_n$ を固定すると θ のみの関数となるが, この関数が最大となる点を θ の推定値として採用したものを**最尤推定量**という。

正規分布に対し, 標本平均は平均の最尤推定量かつ不偏推定量なのであるが, 標本分散は分散の最尤推定量ではあるが不偏推定量ではなく, 不偏分散は分散の不偏推定量ではあるが最尤推定量ではない。

3.2.6 標本平均の分散

この節では繰り返し測定によって偶然誤差の影響を減らすことについて検討する。

例として, はかりである物体の質量を n 回測って $x_1, \ldots, x_n$ という n 種類の測定値を得た, という状況を考える。 ただし, このはかりには系統誤差がなく測定値のばらつきはすべて偶然誤差によるものであると仮定する。 また, はかりには経年変化がなく, i 回目の測定と j 回目の測定は確率的に独立で, 同一の確率分布にしたがうものと仮定する。 このような場合, 測定値のばらつきの影響を小さくしてこの物体の質量のなるべく良い推定値を得るにはどうしたら良いだろうか? 先の仮定から, n が十分大きいときには x_1 から x_n はこの物体の真の質量を中心として左右におおむね均等に散らばることが推察されるであろう。すなわち, 標本平均 (29) は個々の x_i と比べて, 真の質量のより良い推定値となるであろうことが期待される。

この期待は実際に正しい。 標本平均も確率変数であるから, 何回も試行を繰り返すと真の値のまわりでばらついた値を取るのだが, その分散が個々の試行と比べて小さくなるのである。もう少し正確に述べると, n 回の試行が互いに独立で分散 σ^2 を持つ同一の確率分布にしたがうとき, 標本平均の分散は

$$\frac{\sigma^2}{n} \tag{32}$$

となることが証明される。 すなわち, 標本平均の分散は n が大きくなるにしたがって単調に減少する。 分散が小さいということは値のばらつきが小さいということを意味するから, (32) によって平均を取ることが偶然誤差の影響を低減する効果を持つことがわかる。

3.2.7 正規分布と中心極限定理

先の節では, 天下り的に正規分布という確率分布を導入した。この節では, 正規分布がなぜ重要なのかについて説明しよう。

正規分布が重要であるのは, 確率分布に関して中心極限定理と呼ばれる重要な定理が成り立つからである。中心極限定理とは確率変数の平均値 (これも確率変数とみなせる) がしたがう確率分布の性質に関するいくつかの定理の総称なのだが, ここではその中で比較的わかりやすいものを結果だけ紹介する。

定理 1 (中心極限定理) 確率変数 $x_1, \ldots, x_n$ が互いに独立で, これらがすべて同一の平均が零で分散 σ^2 が有限の確率分布にしたがっている場合には, 確率変数

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{\sqrt{n}\sigma} \tag{33}$$

は平均零, 分散 1 の正規分布にしたがう。

中心極限定理が教えるところによると, 同一の条件のもとで同一の測定器を使ってある物理量を測定したときの測定値の平均値の分布は, 測定回数が十分多いときには, もとの物理量がしたがう確率分布の形状によらず, 正規分布にしたがうとみなせることになる。

3.3 最小 2 乗法

本節では, 実験データに直線などをあてはめる問題について検討する。

3.3.1 簡単な例題

例として, ばねに錘をぶら下げてばねの伸びた長さを測るという実験を考えよう。 錘の質量を x, 対応するばねの長さを y とする。フックの法則によれば,

$$y = ax + b \tag{34}$$

の関係があるはずである。 ここに, b はばねの自然長であり, a はばね係数である。 議論を簡単にするために, 錘の質量 x に関しては誤差を含まない真の値がわかっているものとする。これに対し, ばねの長さの測定値は, $ax + b$ を中心とするある正規分布にしたがってばらつくものとする。質量が $x(1), \dots, x(n)$ の n 種類の錘に対して測定実験をおこない, 対応するばねの長さが $y(1), \dots, y(n)$ となったとする。 このとき, どのようにしてばねの自然長 b とばね係数 k を推定するのが良いだろうか?

a および b の推定値を $\widehat{a}, \widehat{b}$ とする。$\widehat{a}, \widehat{b}$ がどの程度良いかは, $\widehat{a}x + \widehat{b}$ が y にどの程度近いかで決まる。だから, y の推定値 $\widehat{a}x + \widehat{b}$ と y のずれのすべての測定値に関する合計

$$L = \sum_{i=1}^{n} \left(y(i) - \widehat{a}x(i) - \widehat{b} \right)^2 \tag{35}$$

をなるべく小さくするように $\widehat{a}$ と $\widehat{b}$ を選ぶのがよいということは容易に想像がつくであろう。

(35) は $\widehat{a}$ および $\widehat{b}$ の 2 次関数であって, $\widehat{a}$ を適当な値で止めて $\widehat{b} \to \pm\infty$ とするか $\widehat{b}$ を適応な値で止めて $\widehat{a} \to \pm\infty$ とすると無限大に発散する。 だから, (35) はその停留点, すなわち

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \widehat{a}} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \widehat{b}} &= 0 \end{aligned} \tag{36}$$

の解において最小値を取る。よって, $\widehat{a}$ および $\widehat{b}$ の最も良い推定値は連立方程式 (36) の解である。

(36) を具体的に計算すると,

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{a} \\ \widehat{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{pmatrix} \tag{37}$$

となる。 (37) を $\widehat{a}, \widehat{b}$ について解くことによって a と b の推定値が得られる。

y が正規分布にしたがっていて, y の i 回目の測定と j 回目の測定 $(i \neq j)$ が確率的に独立であるとき, 上記のようにして計算された $\widehat{a}$ および $\widehat{b}$ は a および b の最尤推定量となることが証明される。

3.3.2 一般の場合

続いて, 最小 2 乗法の一般論を述べる。最小 2 乗法で取り扱う問題は, スカラー y および n 次のベクトル $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ から

$$y = \alpha^T \xi + \beta \tag{38}$$

を満たすようなスカラー β および n 次のベクトル $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$ を求めることである。ただし, x と y は対になって観測される量とする。

ここで, 以下の議論を簡単にするために,

$$x = (\xi_1, \dots, \xi_n, 1)^T \tag{39}$$

$$a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta)^T \tag{40}$$

とおく。 すると, (38) はより簡単に

$$y = a^T x \tag{41}$$

と書き直される。

以下では, x と y の組み合わせが複数回観測されているものとし, i 番目の x の観測値を $x(i)$, i 番目の y の観測値を $y(i)$ と書く。 N 個の観測値 $x(1), \dots, x(N)$ と $y(1), \dots, y(N)$ が与えられているとき, ここから a を決定することが問題である。では, どのようにして a を決定するのが良いだろうか?

a の推定値を $\widehat{a}$ とする。 このとき, 推定値 $\widehat{a}$ の良さは観測値 $y(i)$ とその推定値 $\widehat{a}^T x(i)$ との誤差で決まる。そこで, すべての観測値に関するこれらの誤差の 2 乗和を最小にすることを考える。 すると, われわれの解くべき問題は,

$$L_c = \sum_{i=1}^{N} \left(y(i) - \widehat{a}^T x(i) \right)^2 \tag{42}$$

を最小にするようなベクトル $\widehat{a}$ 求めることに帰着される。

ベクトル $\widehat{a}$ の第 i 成分を $\widehat{a}_i$, 対応するベクトル x の第 i 番目の観測値の第 k 成分を $x_k(i)$ と書くことにする $(i = 1, \ldots, N)$。L は $\widehat{a}_k$ に関する 2 次形式であって, さらに $\widehat{a}_k \to \pm\infty$ とすると $L_c \to +\infty$ となるから, (42) が最小となる点は, 各 k について L_c が $\widehat{a}_k$ の関数として極小となる点の共通部分, すなわち

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_c}{\partial \widehat{a}_k} &= -2\sum_{i=1}^{N}\left(y(i) - \widehat{a}^T x(i)\right) x_k(i) \\ &= -2\sum_{i=1}^{N} y(i)x_k(i) \\ &\quad +2\sum_{i=1}^{N} \widehat{a}^T x(i)x_k(i) \end{aligned} \tag{43}$$

がすべての k について零となる点である。

(43) が零となるということは

$$\sum_{i=1}^{N} y(i)x_k(i) = \sum_{i=1}^{N} \widehat{a}^T x(i)x_k(i) \tag{44}$$

が成り立つということである。(44) で k を 1 から $n+1$ まで変えたものを連立させ, 記法の簡単のために

$$\eta = \Big(y(N), \ldots, y(1)\Big)^T \tag{45}$$

$$X = \Big(x(N), \ldots, x(1)\Big) \tag{46}$$

とおくことにすると,

$$\eta^T X^T = \widehat{a}^T X X^T \tag{47}$$

なる式が得られる。(47) のことを**正規方程式**という。正規方程式 (47) を $\widehat{a}$ について解くことによりパラメータ a の推定値が得られる。

正規方程式 (47) を解いて得られたパラメータ推定値 $\widehat{a}$ は, 各 $x(i)$ には誤差がなく, すべての $y(i)$ が同一の正規分布にしたがっていて, かつ $i \neq j$ に対し $y(i)$ と $y(j)$ が確率的に独立であるとき, a の最尤推定値となることが証明される。

続いて, 正規方程式を解く方法について考えてみよう。

行列 XX^T が正則であれば, (47) の両辺に XX^T の逆行列をかけることにより, a の推定値

$$\widehat{a}^T = \eta^T X^T \left(XX^T\right)^{-1} \tag{48}$$

が得られる。 ただし, (48) のように逆行列を使って $\widehat{a}$ を計算することは, 数値的には非常に望ましくない。 この理由は, データの数や推定すべきパラメータ数が大きいときには行列 XX^T が正則でない行列に近くなることが多くコンピュータの数値計算の誤差のために計算結果が信頼できないものとなってしまう可能性が高いことと, 逆行列の計算はコンピュータに高い負荷をかけることである。コンピュータで (48) を解くときには, LU 分解と呼ばれる方法を使うことがふつうである。

行列 XX^T が正則でないときには, (47) は解を複数持つ。すなわち, XX^T が正則でないということは, a を完全に決定するためにはデータの数が足らない (あるいはデータの品質が悪い) ということを意味する。このような場合はデータを追加して計算をやり直すことが望ましい。 ただし, このままでも, a が一意的に決まらないだけで (47) に解がないわけではないから, (47) を満たす複数の $\widehat{a}$ の中から適当なものを選んで推定値として採用することはできる。

3.4 まとめ

この節では本章で出てきた概念や公式などをまとめておく。

3.4.1 用語集

有効数字 数の標記から位取りをあらわすための 0 を取り除いた有意義な桁数の数字のこと。

真の値 測定量の正しい値。特別な場合を除き, 観念的な値で, 実際には求められないので, 真の値とみなしうる値を用いることがある。

最良推定値 最も良いと思われる推定値。

誤差 測定値から真値とみなしうる値 (多くの場合は最良推定値) を引いた値。より曖昧に, 測定値に含まれる不確かな部分の意味で用いられることもある。

偶然誤差 突き止められない原因によって起こり, 測定値のばらつきとなって現れる誤差。

系統誤差 測定値にかたよりを与える原因によって生じる誤差。

相対誤差 誤差と最良推定値の比率。 誤差率。

誤差率 相対誤差と同じ。

間接測定 測定したい量と一定の関係にあるいくつかの量について計測をおこない, その計測値から測定したい量を求めること。

確率変数 その取り得る値が確率的に決まるような変数。

確率分布関数 確率変数が $-\infty$ から x までの値を取る確率を縦軸に, x の値を横軸に取ったグラフによってあらわされる関数。

確率密度関数 確率分布関数の導関数。

正規分布 確率密度関数が $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}]$ で与えられる確率分布。

確率的に独立 2 個の確率変数 x と y に対し, x がどのような値を取ったときにも, y が特定の値を取る確率が変わらないとき, x と y は確率的に独立であるという。

平均 確率変数 x およびその確率密度関数 $p(x)$ に対し,

$$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

によって定義される量。

分散 確率密度関数 $p(x)$ および平均 m を持つ確率変数 x に対し,

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2p(x)dx$$

によって定義される量。

標本平均 n 個の標本 $x_1,\ldots,x_n$ に対し

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$$

によって定義される量。

標本分散 n 個の標本 $x_1,\ldots,x_n$ に対し

$$\frac{(x_1-E)^2+\cdots+(x_n-E)^2}{n}$$

によって定義される量 (E は標本平均)。

不偏分散 n 個の標本 $x_1,\ldots,x_n$ に対し

$$\frac{(x_1-E)^2+\cdots+(x_n-E)^2}{n-1}$$

によって定義される量 (E は標本平均)。

尤度関数 確率分布のパラメータ θ と標本 $x_1,\ldots,x_n$ に対し, 組 $(\theta,x_1,\ldots,x_n)$ がしたがう確率分布の確率密度関数のことを尤度関数とよぶ。

不偏推定量 その期待値がパラメータの真値 θ に一致するような推定量。

最尤推定量 与えられた観測値のもとで尤度関数が最大となるような値をパラメータ推定値としたもの。

3.4.2 公式集

- $z=x_1+\cdots+x_n-y_1-\cdots-y_m$ に対する誤差の伝播:

$$\delta z=\delta x_1+\cdots+\delta x_n+\delta y_1+\cdots+\delta y_m$$

- $z=\frac{x_1\times\cdots\times x_n}{y_1\times\cdots\times y_m}$ に対する誤差の伝播:

$$\frac{\delta z}{|z|}=\left(\frac{\delta x_1}{|x_1|}+\cdots+\frac{\delta x_n}{|x_n|}+\frac{\delta y_1}{|y_1|}+\cdots+\frac{\delta y_m}{|y_m|}\right)$$

- $z=f(x_1,\ldots,x_n)$ に対する誤差の伝播:

$$\delta z=\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|\delta x_1+\cdots+\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|\delta x_n$$

- 分散 σ^2 を持つ n 個の標本の平均の分散: $\frac{\sigma^2}{n}$
- 最小 2 乗法によって $y=ax$ なる式の a を推定する方法:

$$\eta=\Big(y(N),\ldots,y(1)\Big),\quad X=\Big(x(N),\ldots,x(1)\Big)$$

とし,

$$\eta^TX^T=\hat{a}^TXX^T$$

を $\hat{a}$ について解く。

3.5 進んで勉強するためのガイド

本章では紙数の制約のために例題を多く取り上げることができなかった。文献 [5] に誤差解析の動機付けや手法を理解するための適切な例題が多数記載されているので参照してほしい。 また, 本章で述べた間接測定における誤差の見積りはいわば「最悪の場合」に対応するものであるが, 誤差がすべて偶然誤差に起因するときには誤差をより小さく見積ることが可能である。これについては文献 [5] の第 3 章を参照してほしい。 さらに, 正規分布については同文献の第 5 章で, 最小 2 乗法については第 8 章でより詳しく論じられている。特に実験データへの多項式の当てはめの方法は重要なので, 必ず文献を参照すること。 なお, 本章では最小 2 乗法の記法として文献 [5] より見通しが良いものを採用しているが, これらは本質的に同じものである。本章の記述と文献 [5] の対応関係を調べることは読者に任せる。

文献 [5] は初学者向けの入門書であり, 読みやすさを優先するために重要ではあるが数学的に難しい事項は省略されている。 これらについてきちんと勉強したい学生は, 文献 [6] を参照するとよい。

文献 [5] および文献 [6] はいずれも読者が最低限の確率論および統計学に関する知識を持っていることを前提としているので, 高等学校で確率統計を一切勉強していない学生にはやや取り付きにくい部分があるかもしれない。 必要を感じた学生は適宜教科書を探して補ってほしい。確率論の教科書については, あまりに多くの種類の書籍が出版されているので, 特定の書籍を薦めることはしないが,

- 大数の法則や中心極限定理について解説されているものが望ましい
- ルベーグ積分が出てくる書籍は数学的にやや難解かもしれない

ということは目安として覚えておいてほしい。統計学についても, 出版されている書籍の種類が非常に多く, 良書も幾多あるのだが, 少ない予備知識でも読み進めることができる入門書として [2] を上げておく。

実験が大規模になってくると, 実験データ解析のためにはコンピュータによる数値計算が不可欠の道具となってくる。 ところで, コンピュータで数値計算をする場合には, 注意を要する意外な落とし穴がたくさんある。これについては文献 [1] にエッセイ風に読みやすくまとめられているので, 興味がある読者は参照してほしい。

参考文献

[1] 伊理, 藤野: 「数値計算の常識」, 共立出版 (1985)

[2] 村上: 「工業統計学」, 朝倉書店 (1985)

[3] 大澤: 「測定論ノート」, 裳華房 (1997)

[4] 物理学辞典編集委員会編: 「物理学辞典」, 培風館 (1984)

[5] J. H. Taylor: 「計測における誤差解析入門」, 東京化学同人 (2000)

[6] 吉澤: 「新しい誤差論」, 共立出版 (1989)