

# システム工学 I

## 第 14 回

### 一般化プラント ・ LMI

# 制御系の不確かさの数学的取り扱い (1)

- 我々が制御対象のモデルに基づいて制御系設計をおこなう際、制御対象のモデルを制御対象と完全に同一と見做すことはできない。
- 我々が設計した制御器は、雑音、信号の遅延、量子化誤差、マイクロプロセッサの性能限界などの理由により、完全に設計通りに動くとは限らない。

## 制御系の不確かさの数学的取り扱い (2)

- 制御対象や補償器の数学モデルが不確かさを表現できるようになっており、制御系設計において、モデルの不確かさが一定の範囲であれば制御系に対して何らかの性能保証ができるのであれば(このような考え方を**ロバスト制御**という)、制御理論の有用性は増す。

## 制御系の不確かさの数学的取り扱い (3)

- 線形システムに対するロバスト制御の枠組は、1990年代に概ね完成した ( $H_\infty$  制御,  $\mu$  設計, LMI に基づく設計法). これらは、不確かさとして時変要素や非線形要素をある程度扱えるようになってきている (「それらのノルムが一定以下」という制限が付く) が、非線形項等の影響が強い制御対象は取り扱えない.

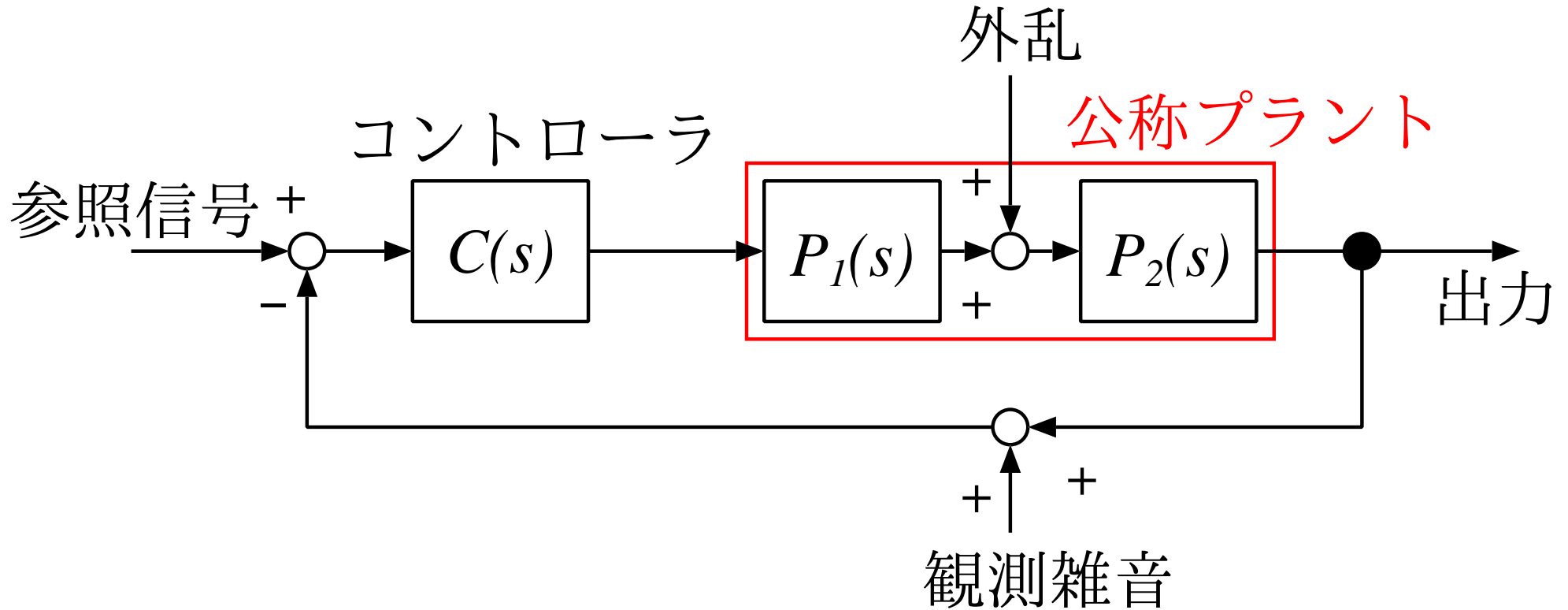
## 制御系の不確かさの数学的取り扱い (4)

- システム工学 I では制御系設計の議論をしていないので、ロバスト制御の内容に本格的に立ち入ることはできないが、制御系の不確かさの数学的取り扱いの方法と、LMI について、今回の講義で入門的な解説をおこなう。

## 制御系の不確かさの数学的取り扱い (5)

- 不確かさを含まない制御対象のモデルを**公称モデル**、**ノミナルモデル**、**ノミナルプラント**などという。
- 制御対象に含まれる**不確かさ**あるいは**摂動**とは、モデル化誤差や経年変化、動作環境の変化の影響などの総称である。外乱や観測雑音とは区別される。

制御対象のモデルに不確かさが含まれない場合は…



典型的な 1 自由度制御形

## 制御系の不確かさの数学的取り扱い (7)

- 便宜上, プラントの公称モデルを  $P_1(s)$  と  $P_2(s)$  の積で表現してある ( $P(s) = P_1(s)P_2(s)$ ).
- 外乱とは, 制御系の状態を乱そうとする外部からの作用をいう (JIS Z8116). 前ページの図で  $P_1 = 1$  のときには入力外乱,  $P_2 = 1$  のときには出力外乱と呼ぶ.



## 制御系の不確かさの数学的取り扱い (8)

- 出力の観測値に加算される意図しない信号を観測雑音という.
- 「外乱」と「雑音」という言葉の使い分けは厳密ではない. また, 先に述べた摂動のことを外乱と呼ぶ場合もある.

## 制御系の不確かさの数学的取り扱い (9)

- 上述のプラントのモデルには不確かさが含まれていないが、これにいかにして不確かさを組み込むかが問題。そのためには、まず不確かさの数学モデルが必要。
- 不確かさには、**構造化された不確かさ**と**構造化されていない不確かさ**がある。

## 制御系の不確かさの数学的取り扱い (10)

- 構造化された不確かさとは、制御対象の数学モデルの特定のパラメータの不確かさののような、数学的構造がはっきりしたものをいう。
- 構造化されていない不確かさとは、制御対象の周波数応答の波形に一定振幅の不確かさを見込むときのように、その数学的構造を明示しない不確かさをいう。

## 制御系の不確かさの数学的取り扱い (11)

- 構造化された不確かさの典型的な例は, 状態方程式を使い, 不確かさを以下のように表現するもの:

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)u$$

$$y = (C + \Delta C)x + (D + \Delta D)u$$

前ページの式で,

- $(A, B, C, D)$  は公称モデルのパラメータ
- $(\Delta A, \Delta B, \Delta C, \Delta D)$  は不確かさ
- 制御対象の周波数応答に不確かさがあり, 周波数応答に基づいて公称モデルを作るときには, 状態方程式モデルの次元が適切であることは保証されないが, 上記は次元の不確かさを表現できない.

## 制御系の不確かさの数学的取り扱い (13)

- 公称モデルへの構造化されていない不確かさの影響のしかたとして、**加法的な不確かさ**、**乗法的な不確かさ**、**既約分解された不確かさ**の3種類の捉え方がある。
- $P(s)$  は公称モデルで、 $P(s) = D^{-1}(s)N(s)$  のように左既約分解されるものとする。

## ▷ これに不確かさを追加した表現は …

- 加法的な不確かさ:  $\mathbf{P}(s) + \Delta_a(s)$
- 乗法的な不確かさ:  $(\mathbf{I} + \Delta_m(s))\mathbf{P}(s)$
- (左) 既約分解された不確かさ:  $(\Delta_D(s), \Delta_N(s))$   
として,  $(\mathbf{D}(s) + \Delta_D(s))^{-1} (\mathbf{N}(s) + \Delta_N(s))$

右既約分解についても同様.  $\Delta_a(s), \Delta_m(s)$  および  $(\Delta_D(s), \Delta_N(s))$  には, 「(何らかの) ノルムが一定以下」という条件がついているものとする.

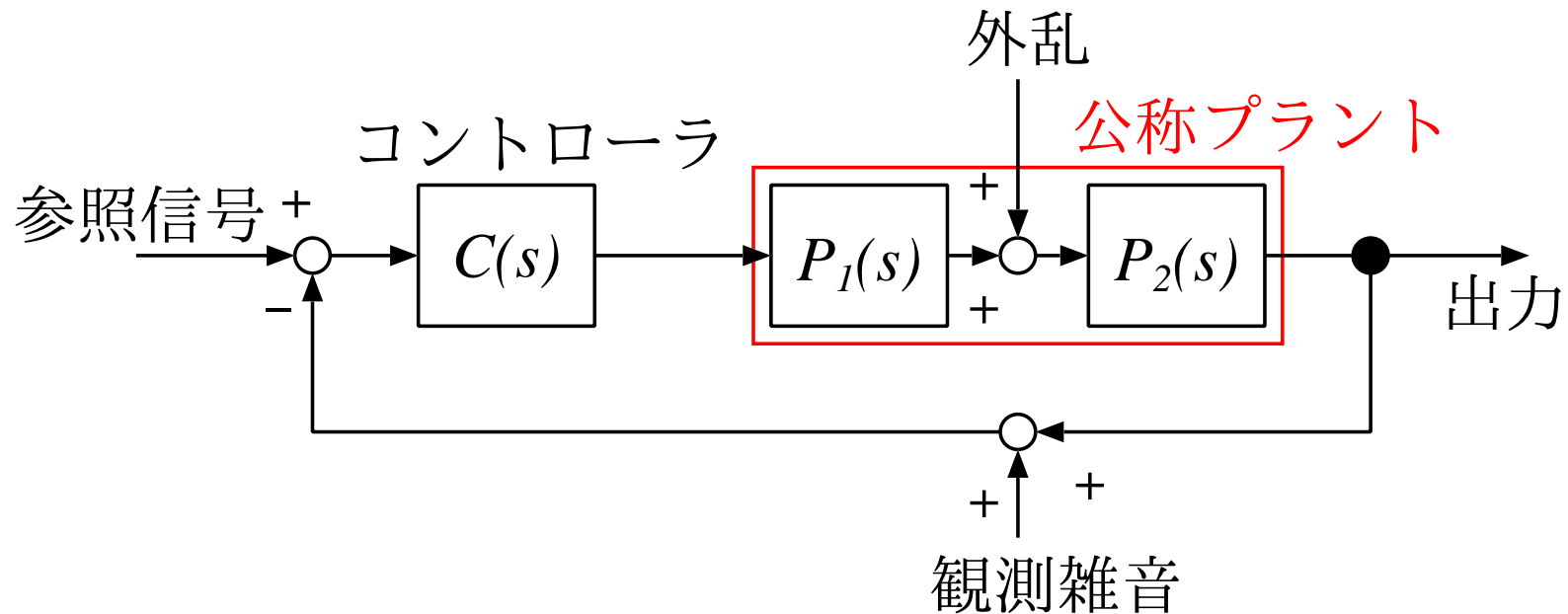
## 制御系の不確かさの数学的取り扱い (15)

- 構造化されていない不確かさは制御対象の次元の不確かさを表現することができる
- 一方で, 不確かさがノルムを使って押さえられることは, 暗黙のうちに仮定されている.



# 一般化プラント (1)

- まず典型的な 1 自由度制御系の図を再掲する.



典型的な 1 自由度制御形

## 一般化プラント (2)

- 「典型的な」「1自由度」という言葉使いから推察されるように、制御系を図で表現する仕方は、他にも色々ある。
- 制御系の表現ごとに図を用意するのは経済的でないので、多様な制御系を統一的に表現する記法が考え出された。これを**一般化プラント**という。

## 一般化プラント (3)

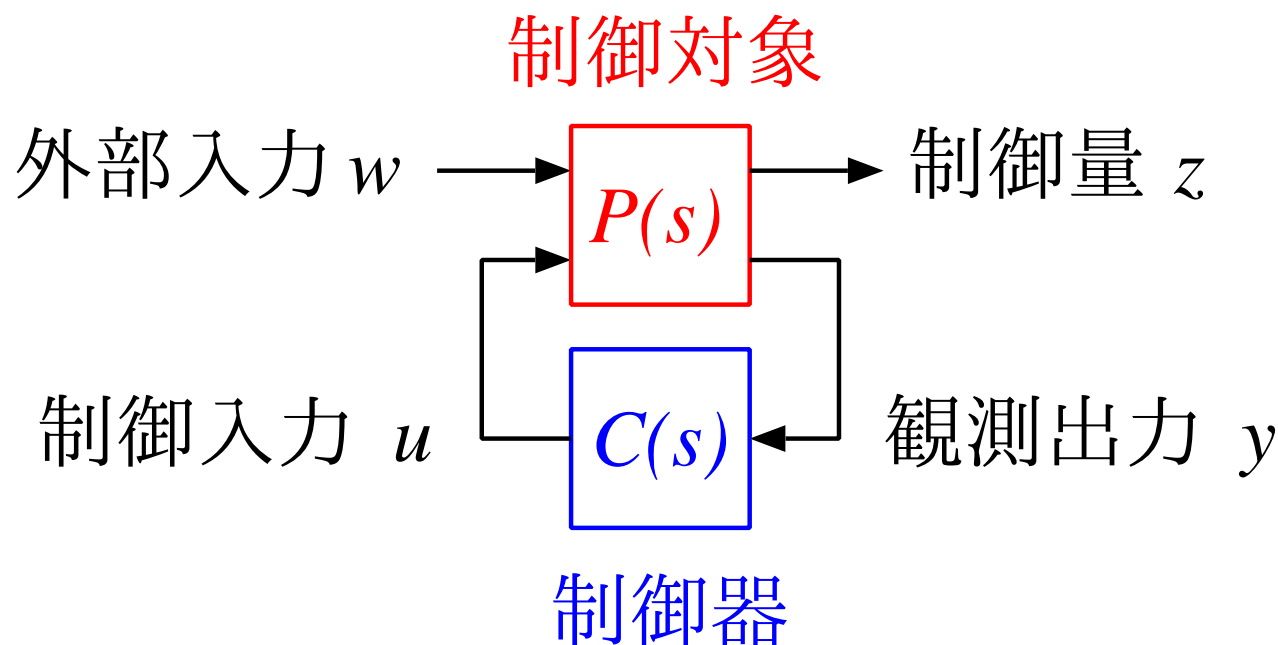
- 一般化プラントによる表現では, システムの入力および出力信号を, 次のように分類する.
  - ▷ 出力: **制御量  $z$**  と **観測出力  $y$**
  - ▷ 入力: **外部入力  $w$**  と **制御入力  $u$**

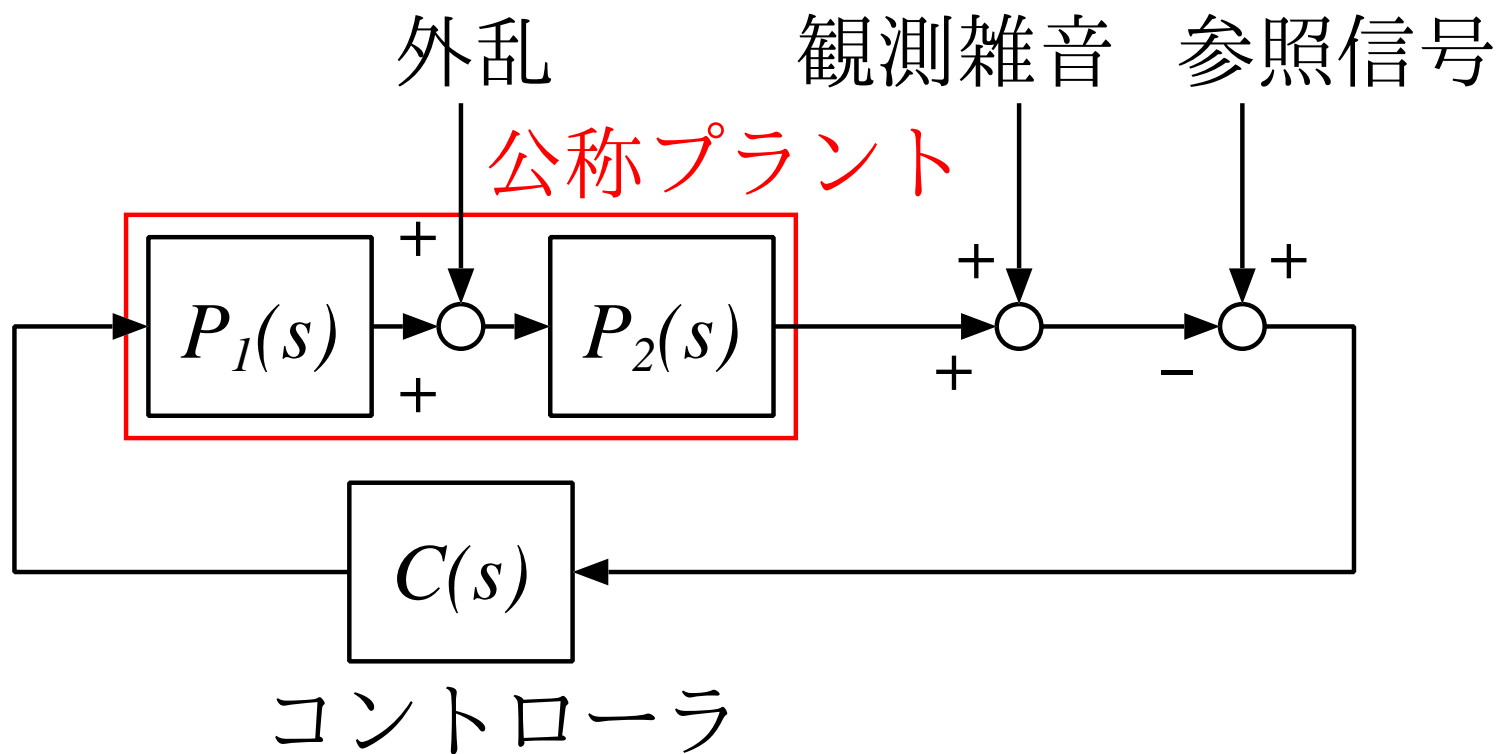
記号, 用語にはバリエーションがあるが, これらの意味や解釈は次の通り.

- 制御量  $z$ : 制御によって小さくしたい量. 制御偏差など.
- 観測出力  $y$ : 制御器の入力となる信号. 目標入力, 制御対象の出力の観測値など.
- 外部入力  $w$ : 制御系に外部から印加される信号. 目標入力, 外乱, 雑音など.
- 制御入力  $u$ : 制御器が生成する制御用信号.

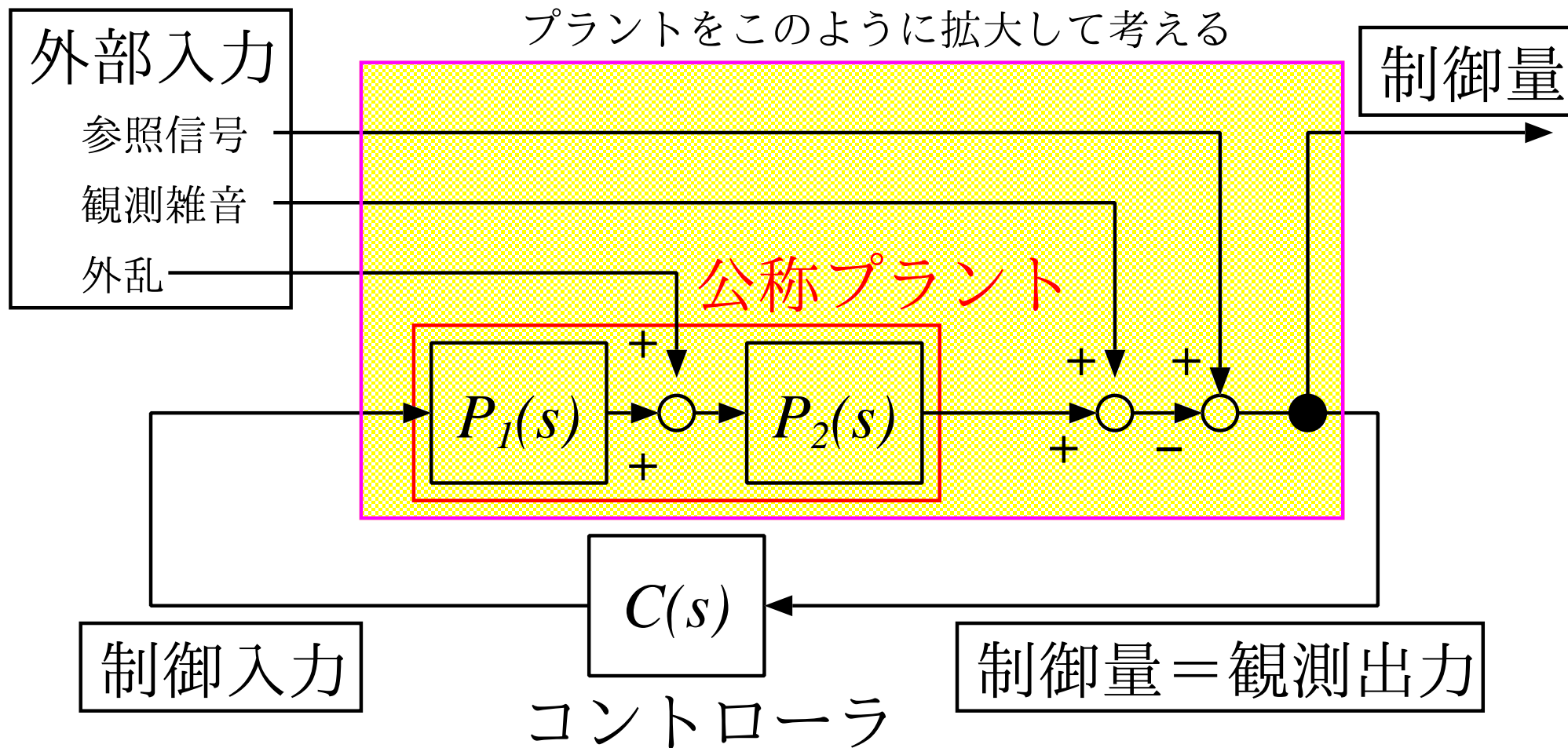
- 先の分類は排他的でない. たとえば, 目標入力が外部入力であるのと同時に観測出力でもある, という状況はあり得る.
- 制御系に含まれる信号を 制御量, 観測出力, 外部入力, 制御入力のどれに分類するかは, 制御の目的によって異なる.

- 一般化プラントは，典型的には，次のような図で表現される．制御系の一般化プラントとしての解釈はひと通りではないので注意．





1 自由度制御形をこう書き直して…



こう解釈すれば一般化プラントになる



# 線形分数変換 (1)

- 多入力多出力の (線形時不変) 制御系にフィードバックが施されたとき, 伝達関数行列がどう変わるかを考える.
- これを統一的に取り扱うための手法が, **線形分数変換** (Linear Fractional Transformation, LFT) である.

## 線形分数変換 (2)

- 線形分数変換は、一般化制御対象と、それに不確かさを追加したものの表現に用いられる。
- 線形分数変換には、**上線形分数変換**と**下線形分数変換**の2種類がある。習慣的に、上線形分数変換は制御対象の不確かさの表現に、下線形分数変換は制御器を含む制御系の表現に使われる。

## 線形分数変換 (3)

- 先に述べた一般化プラントにおいて  $w$  から  $z$  への伝達関数行列が定義できるとき ( $C$  を含むループは閉じられているものとする), これを制御対象  $P(s)$  の制御器  $C(s)$  による **下線形分数変換** といい,  $\mathcal{F}_l(P(s), C(s))$  と書く.

## 線形分数変換 (4)

- $$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}(s) \\ \mathbf{Y}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11}(s) & \mathbf{P}_{12}(s) \\ \mathbf{P}_{21}(s) & \mathbf{P}_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}(s) \\ \mathbf{U}(s) \end{pmatrix}$$
 となっていて、 $\mathbf{U}(s) = \mathbf{C}(s)\mathbf{Y}(s)$  であるとき、 $\mathcal{F}_l(\mathbf{P}(s), \mathbf{C}(s))$  を求める。
- $\mathbf{U}(s) = \mathbf{C}(s)\mathbf{Y}(s)$  を第 2 式に代入すると、
$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{22}(s)\mathbf{C}(s))\mathbf{Y}(s) = \mathbf{P}_{21}\mathbf{W}(s).$$

## 線形分数変換 (5)

- よって, 下線形分数変換が定義できるための必要十分条件は,  $(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{22}(s)\mathbf{C}(s))$  が可逆であること.
- このとき,  $\mathbf{Z}(s) = \mathbf{P}_{11}(s)\mathbf{W}(s) + \mathbf{P}_{12}(s)\mathbf{U}(s) = \mathbf{P}_{11}(s)\mathbf{W}(s) + \mathbf{P}_{12}(s)\mathbf{C}(s)\mathbf{Y}(s) = (\mathbf{P}_{11}(s) + \mathbf{P}_{12}(s)\mathbf{C}(s)(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{22}(s)\mathbf{C}(s))^{-1}\mathbf{P}_{21}(s))\mathbf{W}(s)$ .

## 線形分数変換 (6)

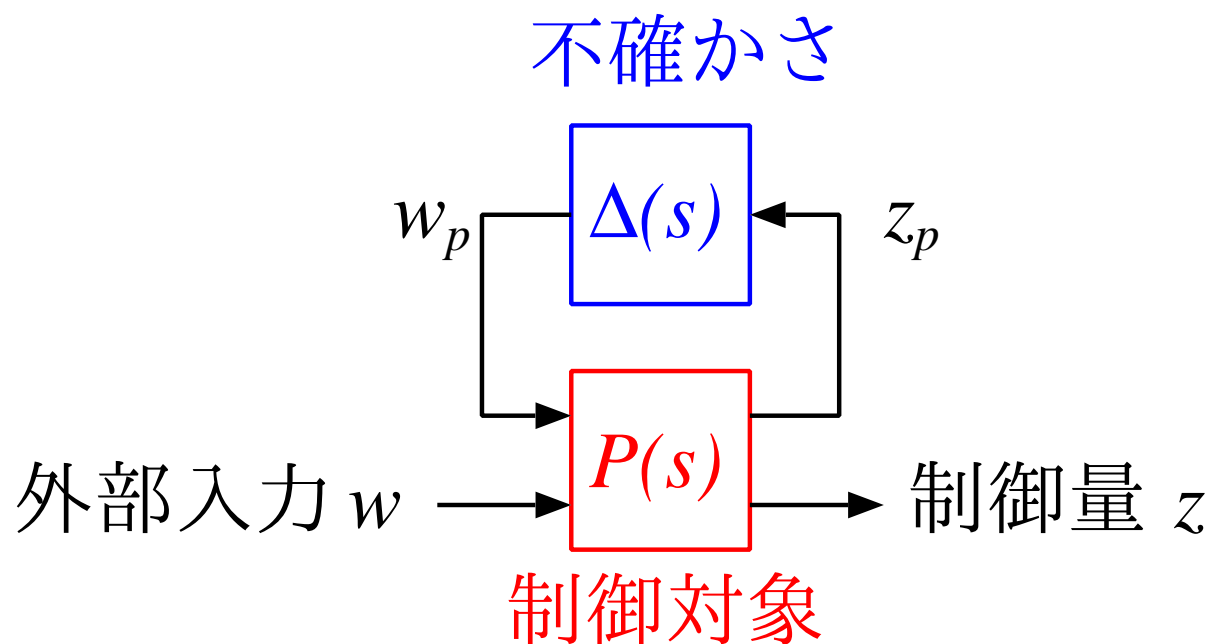
まとめると …

$$\mathcal{F}_l(\mathbf{P}(s), \mathbf{C}(s)) = \mathbf{P}_{11}(s) + \mathbf{P}_{12}(s)\mathbf{C}(s) (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{22}(s)\mathbf{C}(s))^{-1} \mathbf{P}_{21}(s)$$

## 線形分数変換 (7)

- 続いて、制御対象の不確かさをフィードバックの形で表現することを考える。
- 制御器を含むフィードバックループの表現と制御対象の不確かさの表現を併用するために、不確かさに関するフィードバックループは通常はプラントモデルの上部に書かれる。(次ページ図)。

# 線形分数変換 (8)





## 線形分数変換 (9)

- 前ページの図において,  $w$  から  $z$  への伝達関数行列が定義できるとき ( $\Delta$  を含むループは閉じられているものとする), これを制御対象  $P(s)$  の  $\Delta(s)$  による **上線形分数変換** といい,  $\mathcal{F}_u(P(s), \Delta(s))$  と書く.
- 信号  $w_p$  および  $z_p$  には名前を付けないが, 添字  $p$  のニュアンスは摂動 (perturbation).

## 線形分数変換 (10)

- $$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p(s) \\ \mathbf{Z}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11}(s) & \mathbf{P}_{12}(s) \\ \mathbf{P}_{21}(s) & \mathbf{P}_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_p(s) \\ \mathbf{W}(s) \end{pmatrix}$$
と  
なっていて、 $\mathbf{W}_p(s) = \Delta(s)\mathbf{Z}_p(s)$ であるとき、 $\mathcal{F}_u(\mathbf{P}(s), \Delta(s))$ を求める。
- $\mathbf{W}_p(s) = \Delta(s)\mathbf{Z}_p(s)$ を第1式に代入すると、 $(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{11}(s)\Delta(s))\mathbf{Z}_p(s) = \mathbf{P}_{12}\mathbf{W}(s)$ .

## 線形分数変換 (11)

- よって, 上線形分数変換が定義できるための必要十分条件は,  $(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{11}(s)\Delta(s))$  が可逆であること.
- このとき, 
$$\mathbf{Z}(s) = \mathbf{P}_{21}(s)\mathbf{W}_p(s) + \mathbf{P}_{22}(s)\mathbf{W}(s) = \mathbf{P}_{21}(s)\Delta(s)\mathbf{Z}_p(s) + \mathbf{P}_{22}(s)\mathbf{W}(s) = \mathbf{P}_{21}(s)\Delta(s)(\mathbf{P}_{11}(s)\Delta(s))^{-1}\mathbf{P}_{12}(s) + \mathbf{P}_{22}(s))\mathbf{W}(s)$$

## 線形分数変換 (12)

まとめると …

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_u(\mathbf{P}(s), \Delta(s)) &= \mathbf{P}_{22}(s) \\ &+ \mathbf{P}_{21}(s) \Delta(s) (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{11}(s) \Delta(s))^{-1} \mathbf{P}_{12}(s) \end{aligned}$$

## 線形分数変換 (13)

- 加法的な不確かさ, 乗法的な不確かさおよび (左) 既約分解による不確かさは, すべて上線形分数変換を用いて表現できることを確認する.
- $\mathbf{Z}(s) = \mathbf{P}(s)\mathbf{W}(s)$  とする.
- これに不確かさを追加した表現を思い出すと ...

## 線形分数変換 (14)

- 加法的な不確かさ:  $\mathbf{Z}(s) = (\mathbf{P}(s) + \Delta_a(s)) \mathbf{W}(s)$ ,
- 乗法的な不確かさ:  $\mathbf{Z}(s) = (\mathbf{I} + \Delta_m(s)) \mathbf{P}(s) \mathbf{W}(s)$ ,
- 左既約分解された不確かさ :  
$$\mathbf{Z}(s) = (\mathbf{D}(s) + \Delta_D(s))^{-1} (\mathbf{N}(s) + \Delta_N(s)) \mathbf{W}(s)$$

加法的な不確かさ:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p(s) \\ \mathbf{Z}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{P}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_p(s) \\ \mathbf{W}(s) \end{pmatrix},$$

$\mathbf{W}_p(s) = \Delta_a(s)\mathbf{Z}_p(s)$  とする.  $\mathbf{Z}_p(s) = \mathbf{W}(s)$ ,  $\mathbf{Z}(s) = \mathbf{W}_p(s) + \mathbf{P}(s)\mathbf{W}(s)$  だから,  $\mathbf{W}_p(s) = \Delta_a(s)\mathbf{Z}_p(s) = \Delta_a(s)\mathbf{W}(s)$  を代入して,  $\mathbf{Z}(s) = (\mathbf{P}(s) + \Delta_a(s))\mathbf{W}(s)$  となる.

乗法的不確かさ:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p(s) \\ \mathbf{Z}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P}(s) \\ \mathbf{I} & \mathbf{P}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_p(s) \\ \mathbf{W}(s) \end{pmatrix},$$

$\mathbf{W}_p(s) = \Delta_m(s)\mathbf{Z}_p(s)$  とする.  $\mathbf{Z}_p(s) = \mathbf{P}(s)\mathbf{W}(s)$ ,

$\mathbf{Z}(s) = \mathbf{W}_p(s) + \mathbf{P}(s)\mathbf{W}(s)$  だから,  $\mathbf{W}_p(s) = \Delta_m(s)\mathbf{Z}_p(s)$

$\Delta_m(s)\mathbf{P}(s)\mathbf{W}(s)$  を代入して,  $\mathbf{Z}(s) = (\mathbf{I} + \Delta_m(s))\mathbf{P}(s)\mathbf{W}(s)$

となる.



左既約分解された不確かさ:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{p1}(s) \\ \mathbf{Z}_{p2}(s) \\ \mathbf{Z}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{D}^{-1} & \mathbf{P}(s) \\ \mathbf{D}^{-1} & \mathbf{P}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_p(s) \\ \mathbf{W}(s) \end{pmatrix},$$

$\mathbf{W}_p(s) = (\Delta_N \quad -\Delta_D) \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{p1}(s) \\ \mathbf{Z}_{p2}(s) \end{pmatrix}$  とする.  $\mathbf{Z}(s) =$

$\mathbf{Z}_{p2}(s)$  だから,  $\mathbf{W}_p(s) = \Delta_N(s)\mathbf{Z}_{p1}(s) - \Delta_D(s)\mathbf{Z}(s)$ .

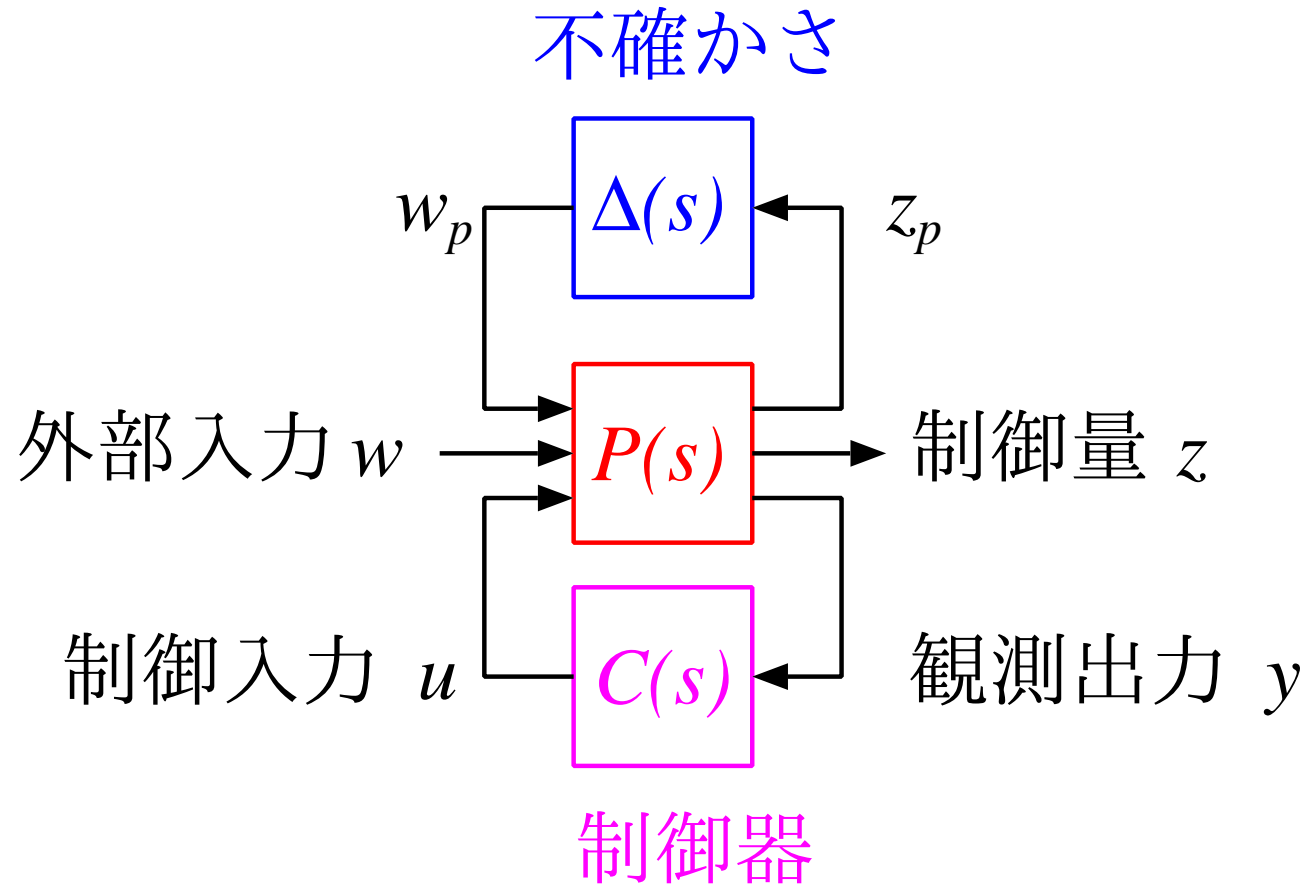
$\mathbf{P}(s) = \mathbf{D}^{-1}(s)\mathbf{N}(s)$  より,  $\mathbf{D}(s)\mathbf{Z}(s) = \mathbf{W}_p(s) + \mathbf{N}(s)\mathbf{W}(s)$

$\Delta_N(s)\mathbf{Z}_{p1}(s) - \Delta_D(s)\mathbf{Z}(s) + \mathbf{N}(s)\mathbf{W}(s)$ . ゆえに

$$(\mathbf{D}(s) + \Delta_D(s))\mathbf{Z}(s) = (\mathbf{N}(s) + \Delta_N(s))\mathbf{W}(s).$$

## 線形分数変換 (18)

- 以上をまとめると、フィードバックおよび不確かさを含むシステムは、上線形分数変換と下分数変換を組み合わせて、次ページのような図で表現できることがわかる。



## 線形分数変換 (20)

- 前ページにおいて,  $P(s)$  を  $(w_p, w, u)$  および  $(z_p, z, y)$  に対応したブロックに分割し, 以下のように書く.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p(s) \\ \mathbf{Z}(s) \\ \mathbf{Y}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) & P_{13}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) & P_{23}(s) \\ P_{31}(s) & P_{32}(s) & P_{33}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_p(s) \\ \mathbf{W}(s) \\ \mathbf{U}(s) \end{pmatrix}$$

## 線形分数変換 (21)

- 不確かさを無視した制御器の設計がなされたとき, 設計された制御系に不確かさがどう影響するかを考えたい.
- $U(s) = K(s)Y(s)$  としたとき,  $(w, u, z, y)$  を含むシステムが BIBO 安定になっていたものとする.

上記第3式から,  $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{P}_{31}(s)\mathbf{W}_p(s) + \mathbf{P}_{32}(s)\mathbf{W}(s) + \mathbf{P}_{33}(s)\mathbf{K}(s)\mathbf{Y}(s)$ , よって,  $\mathbf{L}(s) = \mathbf{K}(s)(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{33}(s)\mathbf{K}(s))^{-1}$  とおくと,  $\mathbf{U}(s) = \mathbf{K}(s)\mathbf{Y}(s) = \mathbf{L}(s)\mathbf{P}_{31}(s)\mathbf{W}_p(s) + \mathbf{L}(s)\mathbf{P}_{32}(s)\mathbf{W}(s)$ . これを上記第1式および第2式に代入して,  $\mathbf{P}'_{i1}(s) = \mathbf{P}_{i1}(s) + \mathbf{L}(s)\mathbf{P}_{31}(s)$ ,  $\mathbf{P}'_{i2}(s) = \mathbf{P}_{i2}(s) + \mathbf{L}(s)\mathbf{P}_{32}(s)$  とおくと ( $i = 1, 2$ ),

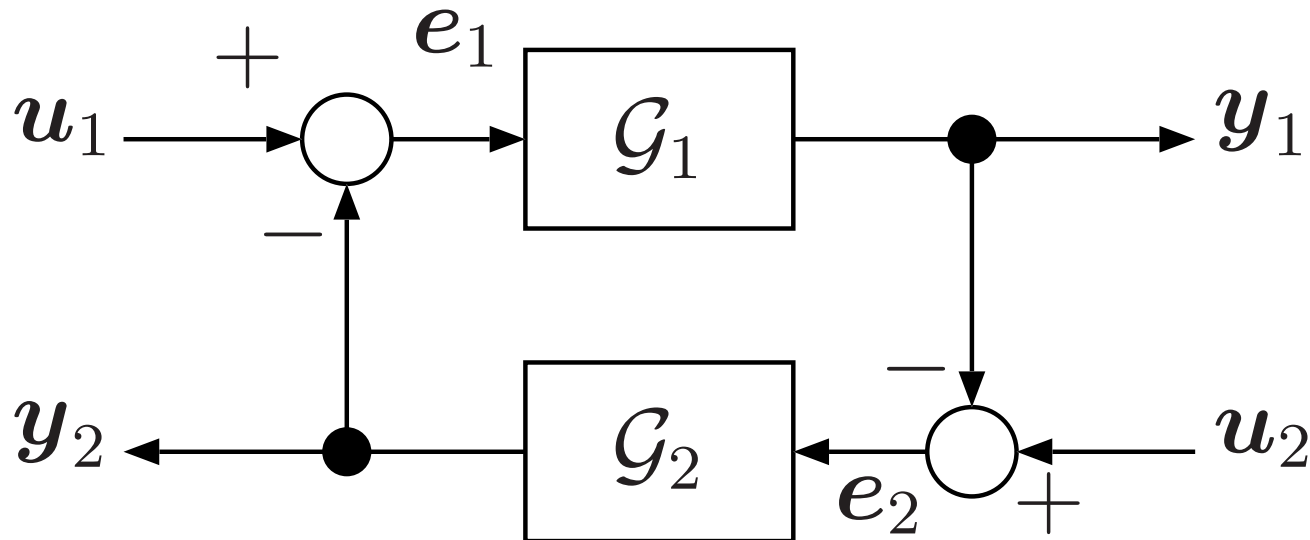
$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p(s) \\ \mathbf{Z}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}'_{11}(s) & \mathbf{P}'_{12}(s) \\ \mathbf{P}'_{21}(s) & \mathbf{P}'_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_p(s) \\ \mathbf{W}(s) \end{pmatrix}$$

## 線形分数変換 (23)

- 不確かさを無視して設計された制御系は BIBO 安定であると仮定したから,  $P'_{ij}(s)$  はすべて安定である ( $i, j = 1, 2$ ).
- 不確かさ  $\Delta(s)$  も安定であると仮定する.
- 不確かさを含む系が安定であるための十分条件は, Small Gain Theorem から導出される.

## 線形分数変換 (24)

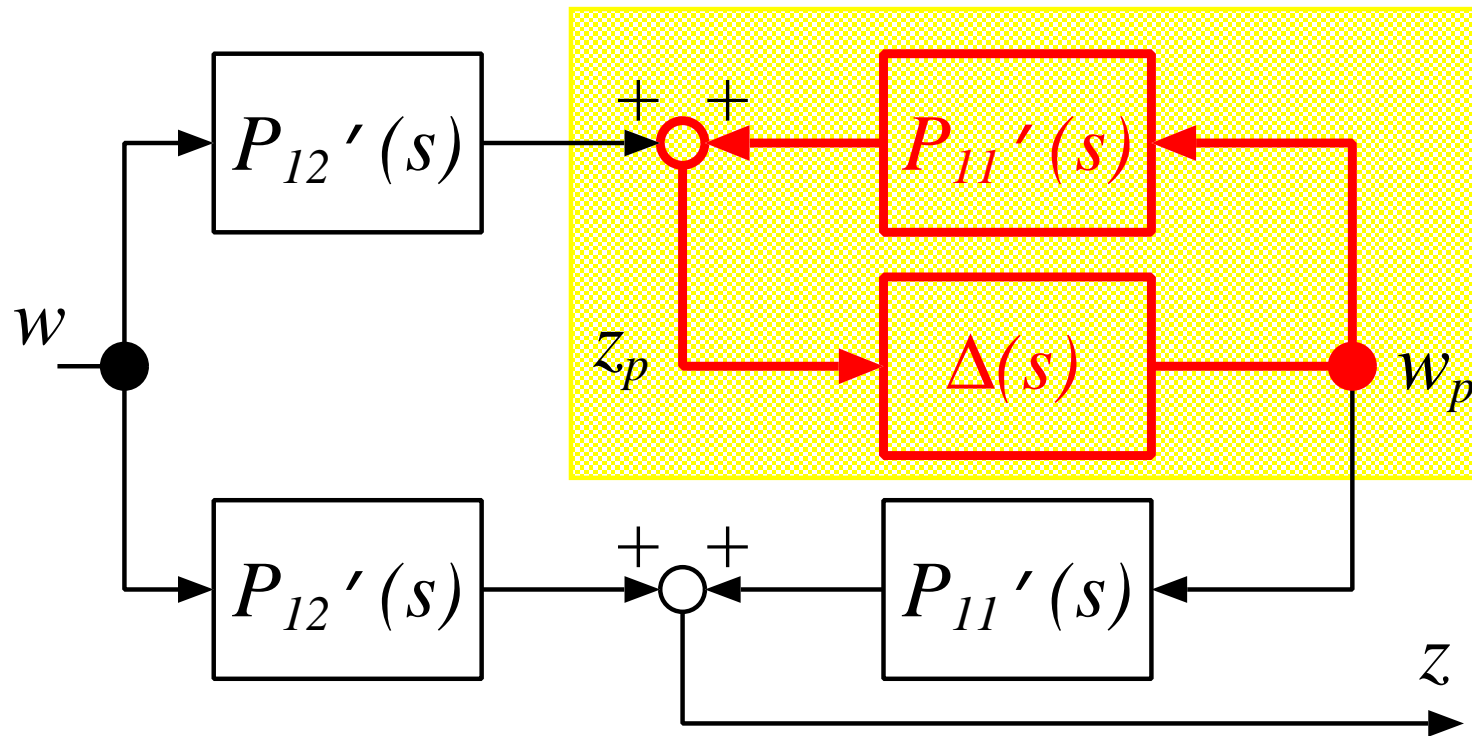
- 比較のために, 前回の講義で Small Gain Theorem の説明に使った図を再掲する.





不確かさを含むフィードバックシステムのブロック線図は次のように書き直せる。

フィードバックループがあるのはここだけ



## 線形分数変換 (26)

- フィードバックループの部分に Small Gain Theorem を適用すると,  $\|\mathbf{P}'_{11}(s)\|\|\Delta(s)\| < 1$  が, 不確かさを含む系が安定であるための十分条件となる.
- ロバスト制御では  $\|\mathbf{G}(s)\| = \sup_{w \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(\mathbf{G}(iw))$  がよく用いられる. ここに,  $\bar{\sigma}(\mathbf{A})$  は行列  $\mathbf{A}$  の最大特異値をあらわす.

# LMI(1)

- 線形行列不等式 (Linear Matrix Inequality, LMI) とは,  $x_1, \dots, x_n$  をスカラー変数,  $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$  を対称行列としたとき,  $x_1\mathbf{F}_1 + \dots + x_n\mathbf{F}_n > \mathbf{0}$  という不等式のことをいう.
- 記号  $\mathbf{A} > \mathbf{0}$  は,  $\mathbf{A}$  が正定対称行列であることを意味する.

## LMI(2)

- この講義では, いくつかの典型的な制御問題が LMI に帰着されることを見る.
- 制御系設計では数値的に制御器のパラメータを求める必要がある. **内点法**と呼ばれる線形計画問題の解法の発達に伴い, LMI の解が効率的に求められるようになったため, 制御系設計の技法としての LMI は急速に普及した.

## LMI(3)

- $n$  次の線形時不変システム  $\dot{x} = Ax$  が漸近安定であるための必要十分条件は,  $\forall Q > 0$ ,  $\exists P > 0$ ,  $PA + A^T P = -Q$  となることであつた. これがLMIに変換されることを見る.
- $Q$  は正定対称であれば任意だから, 上記の後半を  $P > 0$  かつ  $PA + A^T P < 0$  と書き直しても意味は変わらない.

## LMI(4)

- $P$  の第  $(i, j)$  要素を  $x_{ij}$  とすると,  $P$  は対称行列なのだから,  $x_{ij} = x_{ji}$  である.
- $E_{ij}$  を, 第  $(i, j)$  成分および第  $(j, i)$  成分のみが 1 で, 他の要素が零である行列とすると ( $1 \leq i, j \leq n$ ),  $P = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i x_{ij} E_{ij}$  となる.

## LMI(5)

- これを使うと, 先の必要十分条件は …

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i x_{ij} \mathbf{E}_{ij} > \mathbf{0} \text{ かつ}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i x_{ij} (\mathbf{E}_{ij} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{E} \mathbf{E}_{ij}) < \mathbf{0}$$

- 上記は次のように LMI で書き直せる.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i x_{ij} \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{E}_{ij} & 0 \\ \hline 0 & -\mathbf{E}_{ij} \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{E}_{ij} \end{array} \right) > 0$$

## LMI(6)

- 次に,  $H_\infty$  制御理論において解くべき不等式である Riccati 不等式が LMI に変換可能であることを見る.
- Riccati 不等式とは, 未知の対称行列  $X$  に関する,  $AX + XA^T + XC^T CX + B^T B < 0$  という不等式である. 問題によって符号の向きが変わることがある.



## LMI(7)

- Schur complement (第7回) より,  $-I < 0$  かつ  $AX + XA^T + BB^T - XC^T(-I)^{-1}CX < 0$  という条件は,  
$$\begin{pmatrix} AX + XA^T + BB^T & XC^T \\ CX & -I \end{pmatrix} < 0$$
 という条件と等価.  $-I < 0$  は自明だから …

## LMI(8)

- $$\begin{pmatrix} AX + XA^T + BB^T & XC^T \\ CX & -I \end{pmatrix} < \mathbf{0}$$
 を満たす対称行列  $X$  を求めれば, Riccati 不等式の解が得られる.
- 先と同様に,  $X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i x_{ij} \mathbf{E}_{ij}$  において上記を書き直すと LMI が得られる.

## 参考文献 (1)

- S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, SIAM, 1994.
- G. Chesi, LMI techniques for optimization over polynomials in control: a survey, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 55, No. 11, pp. 2500–2510, 2010.
- L. E. Ghaoui and S. -I. Niculescu (eds.), Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control, SIAM, 2000.
- U. Mackenroth, Robust COntrol Systems, Springer, 2004.
- S. Skogestad and I. Postlethwaite, Multivariable Feedback Control, Wiley, 1996.

## 参考文献 (2)

- 野波他編, 制御の辞典, 朝倉書店, 2015.
- 木村, 藤井, 森, ロバスト制御, コロナ社, 1994.
- 岩崎, LMI と制御, 昭晃堂, 1997.
- 蝦原, LMI によるシステム制御, 森北出版, 2012.
- 小原, 行列不等式アプローチによる制御系設計, コロナ社, 2016.