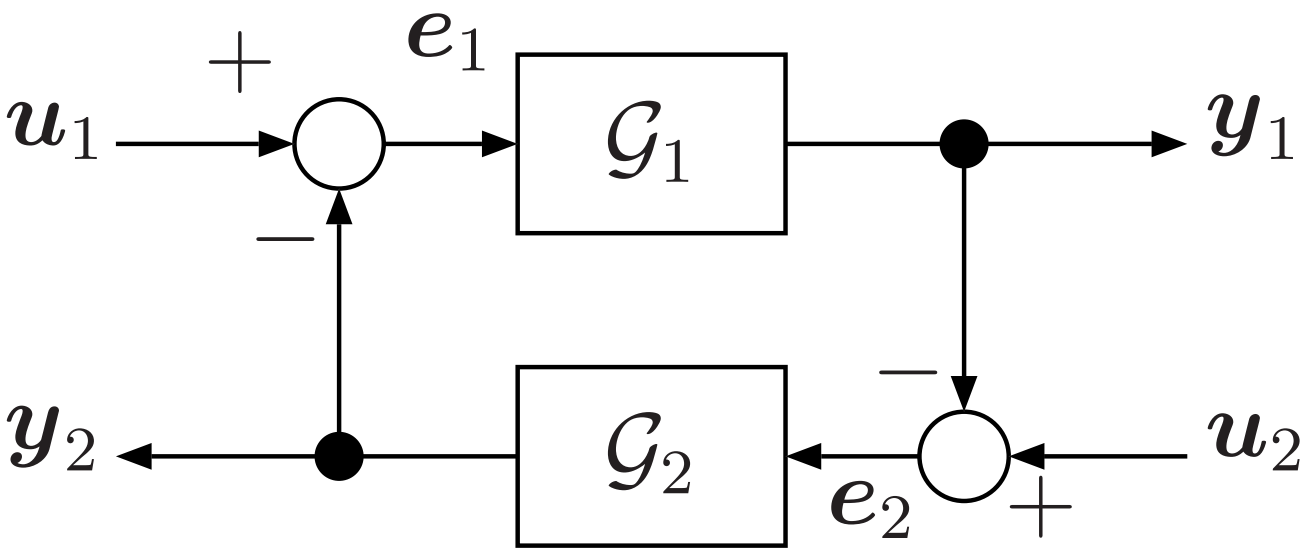
システム工学 I
第 13 回
Lyapunov の方法

Small Gain Theorem (1)

- まず，前回の講義で説明できなかった，非線形システムへの BIBO 安定性の拡張について述べる． これを与えるのが **Small Gain Theorem** であり，この定理は線形系および非線形系の双方に適用可能である．
- 次ページの図のようなフィードバックシステムを考える．



$\mathcal{G}_i$ は線形とは限らない因果的な作用素, $\boldsymbol{u}_i(t)$, $\boldsymbol{e}_i(t)$, $\boldsymbol{y}_i(t)$ は信号で, $\dim \boldsymbol{y}_{1+\mod(i,2)} = \dim \boldsymbol{u}_i = \dim \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}}$ $(i = 1, 2;\quad \mathrm{mod}$ は剰余$)$ とする.

Small Gain Theorem (3)

- $\boldsymbol{y} = \mathcal{G}[\boldsymbol{u}]$ により, 作用素 $\mathcal{G}$ の出力 $\boldsymbol{y}$ が入力 $\boldsymbol{u}$ から決まることをあらわす.

- 信号 $\boldsymbol{w}(t)$ の時刻 T における打ち切りを,
$$\boldsymbol{w}_T(t) := \begin{cases} \boldsymbol{w}(t), & 0 \le t \le T, \\ \boldsymbol{0}, & T < t \end{cases}$$
と定義する.

Small Gain Theorem (4)

- 以前の定義と若干異なるが, $\| \quad \|$ を有限次元のベクトルのノルムとし (どんなノルムでもよい), 信号 $\boldsymbol{w}$ の L_p ノルムを,
$$\|\boldsymbol{w}\|_{L_p} = \left(\int_0^\infty \|\boldsymbol{w}(\tau)\|^p d\tau\right)^{1/p}$$
と定義する $(1 \leq p < \infty)$. 積分は Lebesuge 積分である.

Small Gain Theorem (5)

- $\boldsymbol{w}$ の L_∞ ノルムを, $\|\boldsymbol{w}\|_{L_\infty} = \text{ess.sup}\,\|\boldsymbol{w}(t)\|$ により定義する. ess.sup は零集合を除いた上限.
- Lebesgue 可測で, L_p ノルムが有限な関数全体からなる集合 (の同値類) を L_p と書く ($1 \leq p \leq \infty$).

Small Gain Theorem (6)

- L_p は数学的には取り扱いやすいが, $w(t)=t$ などといった極めて簡単な関数を含まないため, 応用上は不都合である．そこで, これを拡張し, どの正の時刻 T で打ち切っても L_p に属す Lebesgue 可測な信号の集合を考える．これを L_{pe} という．$L_{pe}=\{\boldsymbol{w}:\forall T, \|\boldsymbol{w}_T\|_{L_p}<\infty\}$ である．

Small Gain Theorem (7)

- $1 \leq p \leq \infty$ とする.
- $\mathcal{G}$ が L_p 安定であるとは, $\forall \boldsymbol{u} \in L_p$, $\mathcal{G}[\boldsymbol{u}] \in L_p$ となることをいう.
- $\mathcal{G}$ が L_p 安定でゲイン γ を持つとは, $\exists \gamma, \beta \geq 0$, $\forall \boldsymbol{u} \in L_p$, $\mathcal{G}[\boldsymbol{u}] \in L_p$ かつ $\|\mathcal{G}[\boldsymbol{u}]\|_{L_p} \leq \gamma \|\boldsymbol{u}\|_{L_p} + \beta$ となることをいう.

Small Gain Theorem (8)

- 先に述べたフィードバックシステムにおいて, $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ がともに L_p 安定で, それぞれ有限ゲイン γ_1, γ_2 を持ち, $\gamma_1\gamma_2 < 1$ であれば, フィードバックシステムは L_p 安定である．この事実を, **Small Gain Theorem** という.

以下, 記法の簡単のため, $\|\boldsymbol{w}\|_{L_p}$ を $\|\boldsymbol{w}\|$ と略記する. 仮定より, $\|\boldsymbol{y}_i\| \leq \gamma_i\|\boldsymbol{e}_i\| + \beta_i$ であり $(i = 1, 2)$, さらに $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{u}_1 - y_2$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{y}_1$ だから, $\|\boldsymbol{e}_1\| \leq \|\boldsymbol{u}_1\| + \gamma_2\|\boldsymbol{e}_2\| + \beta_2$, $\|\boldsymbol{e}_2\| \leq \|\boldsymbol{u}_2\| + \gamma_1\|\boldsymbol{e}_1\| + \beta_1$ である. これらの不等式を相互に代入すると,

$$\|\boldsymbol{e}_1\| \leq \|\boldsymbol{u}_1\| + \gamma_2 \left(\|\boldsymbol{u}_2\| + \gamma_1\|\boldsymbol{e}_1\| + \beta_1\right) + \beta_2,$$
$$\|\boldsymbol{e}_2\| \leq \|\boldsymbol{u}_2\| + \gamma_1 \left(\|\boldsymbol{u}_1\| + \gamma_2\|\boldsymbol{e}_2\| + \beta_2\right) + \beta_1$$

となる. これを整理すると

$$(1 - \gamma_1\gamma_2)\|\boldsymbol{e}_1\| \leq \|\boldsymbol{u}_1\| + \gamma_2 \left(\|\boldsymbol{u}_2\| + \beta_1\right) + \beta_2$$
$$(1 - \gamma_1\gamma_2)\|\boldsymbol{e}_2\| \leq \|\boldsymbol{u}_2\| + \gamma_1 \left(\|\boldsymbol{u}_1\| + \beta_2\right) + \beta_1$$

となる. よって, $\gamma_1\gamma_2 < 1$ なら先に述べたフィードバックシステムは L_p 安定である.

状態方程式と安定性 (1)

- 状態方程式の安定性に関する議論では, 当面, 入力 $\boldsymbol{u}$ を零に固定する.
- 応用上重要なのは入力として状態フィードバックや出力フィードバックを用いることにより制御システムを安定にすること (安定化) であり, 状態方程式の安定性に関する議論はそのための基礎である.

状態方程式と安定性 (2)

- 安定性の正式な定義は後回しにするが $\cdots$
- 制御システム $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ に状態フィードバック $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{k}(\boldsymbol{x})$ を施すと, 入力がないシステム $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}))$ が得られる．この意味で, 入力がないシステムの安定性に関する議論はフィードバックシステムの安定性の基礎となる．

状態方程式と安定性 (3)

- 制御システム $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}$ において $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ とすると, 時刻 0 に初期値 $\boldsymbol{x}_0$ を出発する解は, $\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0$ となる.
- $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$ なら解は恒等的に零であり, このような場合は検討に値しない. そこで, $\boldsymbol{x}_0 \neq \boldsymbol{0}$ のとき, 解が $t \to \infty$ としたときどう動くかを考える (初期値に依存する).

状態方程式と安定性 (4)

- 平衡点 (後述; 今の状況では原点) の近傍をどのように選んでも, 初期値をうまく選べば解がその近傍から出ないようにできるとき, この平衡点は **Lyapunov 安定**であるという.
- $t \to \infty$ としたとき解が平衡点に収束するとき, この平衡点は**漸近安定**であるという.

状態方程式と安定性 (5)

- 数式を使った (安定性の) 定義は後述.
- 定義から，平衡点が漸近安定であれば Lyapunov 安定である．逆は必ずしも成立しない.
- $\boldsymbol{A}$ の固有値がひとつでも (複素) 右半平面にあれば, $e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0$ は発散する初期値があるので, **平衡点 (原点) は Lyapunov 安定でない**.

状態方程式と安定性 (6)

- $\boldsymbol{A}$ の固有値がすべて (開) 左半平面にあれば, $e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0 \to \mathbf{0}$, よって平衡点 (原点) は漸近安定.
- $\boldsymbol{A}$ の固有値がすべて閉左半平面にあり, 虚軸上に重複度 1 の固有値があれば $e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0$ は初期値によって零に収束あるいは停留なので, 平衡点 (原点) は **Lyapunov** 安定だが漸近安定ではない.

状態方程式と安定性 (7)

- $\boldsymbol{A}$ の固有値がすべて閉左半平面にあり, 虚軸上に重複度 2 以上の固有値があれば $e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0$ は初期値によって零に収束あるいは発散. よって**平衡点 (原点) は Lyapunov 安定でない**.
- 以上のように, $\boldsymbol{A}$ の固有値をすべて求めれば, $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ の安定性を判定できる.

状態方程式と安定性 (8)

- 「線形システムは非線形システムの線形近似したもの」という立場に立つと,
  - ▷ 線形/非線形にかかわらず, 統一的に使える「安定性」の定義は何か
  - ▷ 非線形システムの安定性判定は可能か

ということが問題になる.

状態方程式と安定性 (9)

- 上述の問題に肯定的な解答を与えるのが**Lyapunov の方法**. これには, 線形近似による方法 (Lyapunov の第一の方法) と, 状態変数の「エネルギー」に相当する関数 (**Lyapunov 関数**) を使って安定性を判別する **Lyapunov の直接法** (あるいは **Lyapunov の第二の方法**) の 2 種類がある.

平衡点 (1)

- 非線形時不変微分方程式 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ を考える．$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ で，この微分方程式は解の存在と一意性の条件を満たすものとする．
- 集合 $\{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\}$ の要素を，このシステムの平衡点という．

平衡点 (2)

- 線形時不変システム $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ の平衡点は, $\{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ であり，これは原点のみ ($\boldsymbol{A}$ が正則なとき) か, $\mathbb{R}^n$ の部分空間である．$\boldsymbol{x}_0$ が $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$ を満たすとき, $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ とおくと, $\dot{\boldsymbol{z}} = \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}$ であるから, システムの原点を $\boldsymbol{x}_0$ だけ平行移動しても, 状態方程式は変わらない.

平衡点 (3)

- したがって, 線形時不変システムでは, 原点におけるシステムの安定性を議論すれば, すべての平衡点について同一の結論が得られる.
- 非線形時不変システムでは, その安定性を平衡点ごとに分けて論じなければならない.

平衡点 (4)

- 非線形時変システム $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ では, 平衡点を素直に定義すると $\{(\boldsymbol{x}, t) : \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{0}\}$ となるが, この集合は時間とともに変わる. 時間とともに変わる平衡点の取り扱いは繁雑なので, $\{\boldsymbol{x} : \forall t, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{0}\}$ を平衡点と定義することも多い.

平衡点 (5)

- 線形時変系 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ では, 少なくとも原点はつねに平衡点である．また, すべての t において, $\boldsymbol{A}(t)$ において t を固定した定数行列のすべての固有値の実部が負であっても, この微分方程式の解が零に漸近することは保証されない．

平衡点 (6)

- 以上で見てきたように, 安定性という観点から言うと, 時変系の取り扱いは繁雑である.
- この講義では, 今後は, 時変系を検討の対象外とし, 時不変系に限定して議論を進める.

安定性の定義 (1)

- 以下の議論では，$\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0)$ によって，時刻 0 において初期値 $\boldsymbol{x}_0$ を出発した微分方程式 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ の解をあらわす．なお, 解の存在と一意性を仮定する．

安定性の定義 (2)

- $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ の平衡点 $\boldsymbol{x}^*$ が **Lyapunov 安定**であるとは, $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0, \forall\boldsymbol{x}_0, \|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{x}^*\| < \varepsilon$ となることをいう.

安定性の定義 (3)

- $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ の平衡点 $\boldsymbol{x}^*$ が (局所的に) 漸近安定であるとは, $\exists\delta > 0, \forall\boldsymbol{x}_0, \|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*\| < \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}^*$ となることをいう. ただし, 暗黙のうちに極限の存在を仮定する.

安定性の定義 (4)

- $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ の平衡点 $\boldsymbol{x}^*$ が (局所的に) 指数安定であるとは, $\exists\alpha, \beta, \delta > 0, \forall \boldsymbol{x}_0, \|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*\| < \delta \Rightarrow \forall t, \|\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{x}^*\| \leq \alpha \|\boldsymbol{x}_0\| \exp[-\beta t]$ となることをいう.

- 上記において, $\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^*\| < \delta$ などのような条件が外せるときには, このシステムは大域的に安定, 漸近安定, 指数安定であるという.

Lyapunov の直接法 (1)

- 非線形システムの安定性を調べるための方法の代表格が **Lyapunov の方法**
- Lyapunov の方法には, **Lyapunov の直接法** (Lyapunov の第二の方法) と **Lyapunov の線形化法** (Lyapunov の第一の方法) がある.

Lyapunov の直接法 (2)

- 話の順番が逆のようであるが，Lyapunov の直接法から議論を始める．
- 状態空間において座標系を並行移動すれば，平衡点 $\boldsymbol{x}^*$ を原点に移動することができる．そこで，以下の議論では，はじめから平衡点は原点であると仮定する．また，集合 D を，状態空間の原点を含む開集合とする．

Lyapunov の直接法 (3)

- D で定義された関数 $V(\boldsymbol{x})$ が $(\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ の$)$ **Lyapunov 関数**であるとは，V が 1 階連続微分可能で，$V(\mathbf{0}) = 0$ かつ $\forall \boldsymbol{x} \in D \setminus \{\mathbf{0}\}$，$V(\boldsymbol{x}) > 0$ で，さらに $\forall \boldsymbol{x} \in D$，$\dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq 0$ となることをいう．

Lyapunov の直接法 (4)

- $V(\mathbf{0}) = 0$ かつ $\forall \boldsymbol{x} \in D \setminus \{\mathbf{0}\}$, $V(\boldsymbol{x}) > 0$ という条件のみを満たす関数を **Lyapunov 関数候補**と呼ぶことがある.
- $$\frac{d}{dt}V(\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0)) = \left.\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t,0,\boldsymbol{x}_0)} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0))$$
  である (微分方程式の解に沿った微分).

Lyapunov の直接法 (5)

- Lyapunov 関数が存在すれば, $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ は平衡点 $\boldsymbol{x}^* = \mathbf{0}$ において (局所的に)Lyapunov 安定である.
- 上記に加えて, 原点以外の点で $\dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < 0$ となれば, $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ は平衡点 $\boldsymbol{x}^* = \mathbf{0}$ において (局所的に) 漸近安定である.

Lyapunov の直接法 (6)

- 上記に加えて, $\exists a, b > 0, \exists p \geq 1, \forall \boldsymbol{x}, a\|\boldsymbol{x}\|^p \leq V(\boldsymbol{x}) \leq b\|\boldsymbol{x}\|^p$ かつ $\exists c > 0, \forall \boldsymbol{x}, \dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq -cV(\boldsymbol{x})$ であれば, $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ は平衡点 $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{0}$ において (局所的に) 指数安定である.

Lyapunov の直接法 (7)

- このように $V(\boldsymbol{x})$ によってシステムの安定性を調べる方法を **Lyapunov の直接法**という.
- 続いて, 先に述べた定理の証明を述べる.
- 以下では, 記号 dV/dt により, $V(t)$ の, 微分方程式 $\dot{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ の解 $\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0)$ に沿った微分をあらわす.

$$
\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \frac{d}{dt} V(\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0)) \\
&= \left.\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{\varphi}(t,0,\boldsymbol{x}_0)} \frac{d}{dt}\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0) \\
&= \left.\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{\varphi}(t,0,\boldsymbol{x}_0)} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0))
\end{aligned}
$$

Lyapunov 関数が存在すれば, $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ は平衡点 $\boldsymbol{x}^* = \mathbf{0}$ において局所的に Lyapunov 安定:

- 平衡点がすでに原点に移されていることに注意する. $B(r) = \{\boldsymbol{x} : \|x\| < r\}$, $\overline{B}(r) = \{\boldsymbol{x} : \|x\| \leq r\}$ とおく. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall \boldsymbol{x}_0,\ \|x_0\| < \delta \Rightarrow \|\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0)\| < \varepsilon$ を示したい.
- 必要なら, $\overline{B}(\varepsilon)$ が D に含まれるように ε を小さく取り直し, $\alpha = \max_{\{\boldsymbol{x}:\|\boldsymbol{x}\|=\varepsilon\}} V(\boldsymbol{x})$ とする.

- $0 < \beta < \alpha$ とし, $C(\beta)$ を $\{\boldsymbol{x} \in D : V(\boldsymbol{x}) \leq \beta\}$ の原点を含む極大連結集合とする.
- $dV/dt \leq 0$ であったから, $C(\beta)$ の点を初期値とする $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ の解は $t \geq 0$ において $C(\beta)$ から出ない.
- $\beta < \alpha$ であったから, $C(\beta) \subset \overline{B}(\varepsilon)$ である.
- $C(\beta)$ は原点を内点として含むから, $B(\delta) \subset C(\beta)$ となるよう δ を取れば主張が示される.

さらに平衡点以外で $dV/dt < 0$ であれば $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ は平衡点 $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{0}$ において局所的に漸近安定:

- Lyapunov 安定の条件を満たす ε と δ がすでに取られているものとする. 原点以外で $dV/dt < 0$ となるとき $V(\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0)) \to 0$ $(t \to \infty)$ となることを示したい.
- 有限の時刻 T で $\boldsymbol{\varphi}(T, 0, \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{0}$ となった場合には, 原点は平衡点なので, 証明すべきことは何もない. よって, $\forall t > 0$, $\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0) \neq 0$ の場合を考える.

- $V(\boldsymbol{\varphi}(t,0,\boldsymbol{x}_0))$ は t の関数として非負で，単調減少だから，ある $L \geq 0$ に収束する．よって，$L=0$ であることが示せればよい．背理法でこれを示す．
- $L>0$ と仮定する．$\boldsymbol{x}_0 \in \overline{B}(\delta/2)$ とし，$R=\{\boldsymbol{x} \in \overline{B}(0,\varepsilon/2) : L \leq V(\boldsymbol{x})\}$ とする．R はコンパクトで，原点を含まない．$\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ は R において負の連続関数だから，R において負の最大値 $-\mu$ を取る．よって，$dV/dt \leq -\mu$ だから，$V(\boldsymbol{\varphi}(t,0,\boldsymbol{x}_0)) - V(\boldsymbol{x}_0) \leq -\mu t$ となり，有限時間で $V(\boldsymbol{\varphi}(t,0,\boldsymbol{x}_0))$ が零になるので矛盾．

指数安定性について

- 上述の仮定が満たされるとき, $dV/dt \leq -cV$ だから, $\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} \leq -c$ で, これを積分すると, $\ln V(\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0)) - \ln V(\boldsymbol{x}_0) \leq -ct$. よって $V(\boldsymbol{\varphi}(t, 0, x_0)) \leq e^{-ct}V(\boldsymbol{x}_0)$.
- $a\|\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0)\|^p \leq V(\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0)) \leq e^{-ct}V(\boldsymbol{x}_0) \leq e^{-ct}b\|x_0\|^p$ だから, $\|\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0)\| \leq \left(\frac{b}{a}\right)^{1/p} e^{-c\frac{t}{p}}\|\boldsymbol{x}_0\|$. よって指数安定.

線形時不変システムでは (1)

- 線形時不変システム $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ が漸近安定であるということは, $\boldsymbol{A}$ のすべての固有値の実部が負であるということであった. (Lyapunov 安定ではないので注意).
- 線形時不変システムの場合は, この条件は, 状態の 2 次形式の形の Lyapunov 関数が存在することと等価であることが示せる.

線形時不変システムでは (2)

- 正確に述べると: 線形時不変システム $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ が漸近安定であるための必要十分条件は, 任意の正定対称行列 $\boldsymbol{Q}$ に対し, ある正定対称行列 $\boldsymbol{P}$ が存在し, $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{Q}$ となることである.
- 上記の条件が満たされるとき, $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ が Lyapunov 関数となる.

$\forall \boldsymbol{Q} > 0,\ \exists \boldsymbol{P} > 0,\ \boldsymbol{PA} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{Q}$ のとき

- $\boldsymbol{P} > 0$ は, 行列 $\boldsymbol{P}$ が正定対称行列という意味
- $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ とおくと, $dV/dt = \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{PA} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P})\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$.
- $\boldsymbol{P} > 0$, $\boldsymbol{Q} > 0$ より, これらの固有値は正の実数
- $\boldsymbol{P}$ の最大固有値を λ_P, $\boldsymbol{Q}$ の最小固有値を λ_Q とする

$$
\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= -\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} \leq -\lambda_Q |\boldsymbol{x}|^2 \\
&\leq -\frac{\lambda_Q}{\lambda_P} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{x} = -\frac{\lambda_Q}{\lambda_P} V(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

- よって, 初期値 $\boldsymbol{x}_0$ をどのように取っても, $V(\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0))$ は零に収束する.
- したがって, $\boldsymbol{A}$ のすべての固有値の実部は負でなければならない.

$\boldsymbol{A}$ のすべての固有値の実部が負であるとき

- $\boldsymbol{Q} > 0$ をひとつ定める.
- $\boldsymbol{P} = \int_0^\infty e^{\boldsymbol{A}^T t}\boldsymbol{Q}e^{\boldsymbol{A}t}dt$ と定義する.
- $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}$
  $= \int_0^\infty e^{\boldsymbol{A}^T t}\boldsymbol{Q}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{A}dt + \int_0^\infty \boldsymbol{A}^T e^{\boldsymbol{A}^T t}\boldsymbol{Q}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{A}dt$
  $= \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(e^{\boldsymbol{A}^T t}\boldsymbol{Q}e^{\boldsymbol{A}t}\right)dt = e^{\boldsymbol{A}^T t}\boldsymbol{Q}e^{\boldsymbol{A}t}\Big|_0^\infty = -\boldsymbol{Q}$
  ($\boldsymbol{A}$ のすべての固有値の実部が負だから)

線形時不変システムでは (6)

- 次に, $\boldsymbol{A}$ の固有値の実部がすべて正である場合を考える. $\tau = -t$ とすると, $\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = -\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ である.
- $\boldsymbol{A}$ の固有値の実部がすべて正であるための必要十分条件は, $-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ の固有値の実部がすべて負であること.

線形時不変システムでは (7)

- $-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ の固有値の実部がすべて負であるための必要十分条件は, $\forall \boldsymbol{Q} > 0, \exists \boldsymbol{P} > 0, \boldsymbol{P}(-\boldsymbol{A}) + (-\boldsymbol{A})^T \boldsymbol{P} = -\boldsymbol{Q}$.
- まとめると, $\boldsymbol{A}$ の固有値の実部がすべて正であるための必要十分条件は, $\forall \boldsymbol{Q} > 0, \exists \boldsymbol{P} > 0$, $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}$.

Chetaev の不安定性判定法 (1)

- Lyapunov 関数の存在は非線形システムが安定であるための十分条件なのだが, これを変形して, 非線形システムが不安定であるための十分条件を導くことができる (Chetaev).
- 先と同様に, 平衡点はすでに座標系の並行移動によって原点に移されているものと仮定する.

Chetaev の不安定性判定法 (2)

- D を原点を含む開集合, $V(\boldsymbol{x}) : D \to \mathbb{R}$ を $V(\mathbf{0}) = 0$ を満たす C^1 級関数とし, $U(r) = \overline{B}(r) \cap D \cap \{\boldsymbol{x} : V(\boldsymbol{x}) > 0\}$ とおく.
- ある r に対し, $U(r) \neq \emptyset$ で, $U(r)$ 上で $\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) > 0$ で, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \boldsymbol{x} \in B(\varepsilon) \setminus \{\mathbf{0}\}$, $V(\boldsymbol{x}) > 0$ であれば, 原点は Lyapunov 安定な平衡点ではない (Chetaev).

先の事実の証明は次の通り.

- 先の仮定から Lyapunov 安定の否定: $\exists\varepsilon > 0$, $\forall\delta > 0$, $\exists \boldsymbol{x}_0 \in B(\delta)$, $\{\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0) : t \geq 0\} \not\subset B(\epsilon)$ を導けばよい.
- $\varepsilon \leq r$ を, $\overline{B}(\varepsilon) \subset D$ であるように取る. 所与の δ に対し, $\delta_0 = \min\{\delta, \varepsilon\}$ とし, $\boldsymbol{x}_0 \in B(\delta_0) \cap U(\varepsilon)$ とする. $\boldsymbol{x}_0$ は $U(\varepsilon)$ の内点で, $U(\varepsilon)$ 内では $\frac{d}{dt}V(\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0)) > 0$ だから, $V(\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0))$ は t に関して単調増加で, $V(\boldsymbol{\varphi}(0, 0, \boldsymbol{x}_0)) > 0$ である.

- $\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0) \subset U(\varepsilon)$ と仮定して矛盾を導く．$W(\varepsilon) = U(\varepsilon) \cap \{\boldsymbol{x} : V(\boldsymbol{x}) \geq V(\boldsymbol{x}_0)\}$ とおくと，$W(\varepsilon)$ はコンパクトで，$\frac{d}{dt}V(\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0)) > 0$ だから，$\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0)) \subset W(\varepsilon)$ である．$W(\varepsilon)$ で，$\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ は連続で，その値は正だから，正の最小値 μ を取る．したがって，$\frac{d}{dt}V(\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0)) \geq \mu$ であり，よって $V(\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0))$ は無限大に発散する．一方で, $W(\varepsilon)$ はコンパクトだから, $V(\boldsymbol{x})$ は $W(\varepsilon)$ において有限の最大値を取る．これは矛盾である．よって $\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0) \not\subset U(\varepsilon)$.

- 次に，$\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0) \not\subset \overline{B}(\varepsilon)$ であることを背理法により示す． $\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0) \subset \overline{B}(\varepsilon)$ と仮定し，$T = \sup\{t \geq 0 : \forall\tau \leq t, \boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0) \subset U(\varepsilon)\}$ とおく． $\boldsymbol{x}_0$ が $U(\varepsilon)$ の内点だから，$T > 0$ であり，$\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0) \not\subset U(\varepsilon)$ だから，$T < \infty$ である．さて，$0 \leq t < T$ なら $\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0) \subset U(\varepsilon)$ で，$V(\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0)) \geq V(\boldsymbol{x}_0)$，$\boldsymbol{\varphi}$ は連続関数だから，$V(\boldsymbol{\varphi}(T, 0, \boldsymbol{x}_0)) \geq V(\boldsymbol{x}_0)$．一方，$\nu > T$ なら，$\exists\tau \leq \nu$，$\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \boldsymbol{x}_0) \not\subset U(\varepsilon)\}$ だから，$V(\boldsymbol{\varphi}(\nu, 0, \boldsymbol{x}_0)) \leq 0$，よって，再び $\boldsymbol{\varphi}$ の連続性から，$V(\boldsymbol{\varphi}(T, 0, \boldsymbol{x}_0)) \leq 0$ (矛盾)

Lyapunov の線形化法 (1)

- Lyapunov の線形化法は, システムの平衡点における線形近似を使ってその安定性を判定する方法.
- 議論の簡単のために, 平衡点を原点に移す座標変換がすでに施され, これから原点におけるシステムの安定性を判定したい, という状況を考える.

Lyapunov の線形化法 (2)

- 微分方程式 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ の安定性を判定したい.
  原点が平衡点であると仮定したから, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ である.

- $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ が原点において線形近似可能であると仮定し, $\boldsymbol{A} = \left.\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}}$ とする.

Lyapunov の線形化法 (3)

- 線形近似可能であることと原点が平衡点であることを組み合わせると，ある $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ に対し，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ で，$\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = 0$ となる．

Lyapunov の線形化法 (4)

- 以下の事実が成り立つ.
  - ▷ $\boldsymbol{A}$ のすべての固有値の実部が負なら, 原点は Lyapunov 安定な平衡点である.
  - ▷ $\boldsymbol{A}$ がひとつでも実部が正の固有値を持てば, 原点は Lyapunov 安定な平衡点でない.

Lyapunov の線形化法 (5)

- 非線形システムの安定性を線形近似の固有値から判定する方法を, **Lyapunov の線形化法**という.

$\boldsymbol{A}$のすべての固有値の実部が負のとき $\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{I}$ を満たす $\boldsymbol{P}>0$ を取り, $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ とおくと, $\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{g}(x))$ であるが, $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{PA}\boldsymbol{x}$ はスカラーゆえ転置しても不変だから, $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{PA}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ でもあり, よって $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{PA}\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{PA}\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{PA}\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{PA}\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}\|^2$. ゆえに, $\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\leq-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{P}\|\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\|$. よって, $\|x\|$ が十分小さければ $\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\leq 0$ となるから, Lyapunov の直接法より, 平衡点は安定.

$\boldsymbol{A}$ が実部が正の固有値を持つとき

- まず, Lyapunov の方法は, 転置を共役転置に, 対称行列を Hermite 行列に置き換えれば, 複素ベクトル空間で定義された線形システムにも適用できることに注意する. そこで, はじめから複素ベクトル空間を前提にして議論を進める.
- $\boldsymbol{A}$ の固有値のうち実部が正でその値が最小のものを λ_m とし, $\varepsilon = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\lambda_m$ とすると, $\boldsymbol{A} - \varepsilon\boldsymbol{I}$ は虚軸上に零点を持たない.
- $\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{A} - \varepsilon\boldsymbol{I})\boldsymbol{T} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\Lambda}_1, \boldsymbol{\Lambda}_2)$ が $\boldsymbol{A}-\varepsilon\boldsymbol{I}$ の Jordan 標準形で, $\boldsymbol{\Lambda}_1$ と $\boldsymbol{\Lambda}_2$ はそれぞれ実部が正および負の固有値に対応する Jordan ブロックを集めたものとする. このとき, $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\Lambda}_1 + \varepsilon\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\Lambda}_2 + \varepsilon\boldsymbol{I})$ である.

- $\boldsymbol{P}_1$ および $\boldsymbol{P}_2$ を，$\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{\Lambda}_1+\varepsilon\boldsymbol{I})+(\boldsymbol{\Lambda}_1+\varepsilon\boldsymbol{I})^*\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{\Lambda}_2+\varepsilon\boldsymbol{I})+(\boldsymbol{\Lambda}_2+\varepsilon\boldsymbol{I})^*\boldsymbol{P}_2=-\boldsymbol{I}$ を満たす Hermite 行列とする．

- $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}$ とし，これを $\mathrm{diag}(\boldsymbol{\Lambda}_1,\boldsymbol{\Lambda}_2)$ に適合する形で $(\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2)$ のように分割する．この座標系では，もとの微分方程式は $\dot{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{z})$ に変わるが，この右辺を $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{z})$ と書き，さらに $(\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2)$ に適合する形で $(\boldsymbol{\lambda}_1(\boldsymbol{z}),\boldsymbol{\lambda}_2(\boldsymbol{z}))$ と書き直す．

- $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{x})$ とすると，$\dot{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{z})$ で，$\lim_{\|z\|\to 0}\frac{\|\boldsymbol{h}(\boldsymbol{z})\|}{\|\boldsymbol{z}\|}=0$ である．

- $V(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{z}_1^*\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{z}_1-\boldsymbol{z}_2^*\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{z}_2$ とおき，$U(r)=\overline{B}(r)\cap D\cap\{\boldsymbol{z}:V(\boldsymbol{z})>0\}$ とする．$\boldsymbol{z}\in U(r)$ なら $\boldsymbol{z}_1^*\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{z}_1>\boldsymbol{z}_2^*\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{z}_2$ である．

- $\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2)$ とおく．

- $\boldsymbol{z}\in U(r)$ なら $\cdots$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{z}}\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{z}) &= \|\boldsymbol{z}\|_1^2 + 2\varepsilon \boldsymbol{z}_1^* \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{z}_1^* + \|\boldsymbol{z}\|_2^2 - 2\varepsilon \boldsymbol{z}_2^* \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{z}_2^* \\
&\qquad + 2\boldsymbol{z}_1^* \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{z}) - 2\boldsymbol{z}_2^* \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{z}) \\
&\geq \|\boldsymbol{z}\|_1^2 + \|\boldsymbol{z}\|_2^2 + 2\boldsymbol{z}_1^* \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{z}) - 2\boldsymbol{z}_2^* \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{z})
\end{aligned}
$$

よって

$$
\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{z}}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{z}) \geq \|\boldsymbol{z}\|^2 - \|\boldsymbol{P}\|\|\boldsymbol{z}\|\|\boldsymbol{h}(\boldsymbol{z})\| = \|\boldsymbol{z}\|^2 \left(1 - \|\boldsymbol{P}\| \frac{\|\boldsymbol{h}(\boldsymbol{z})\|}{\|\boldsymbol{z}\|}\right)
$$

- $\lim_{\|z\|\to 0} \frac{\|\boldsymbol{h}(\boldsymbol{z})\|}{\|\boldsymbol{z}\|} = 0$ だったから, r が十分小さいとき, $U(r)$ において $\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{z}}\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{z}) > 0$ となる. よって, Chetaev の不安定性判別法により, このシステムは不安定.

参考文献

- W. M. Haddad and V. Chellaboina, Nonliner Dynamical Systems and Control, Princeton University Press, 2008
- 前田, 線形システム, 朝倉書店, 2001