

システム工学 I

第 12 回

安定性

安定性 (1)

「安定」という言葉の意味は (大辞林 第3版) …

- 落ち着いて変動の少ないこと
- ある系が外からの作用により微小な変化を与えられても、もとの状態からのずれが一定の範囲に収まるような状態

システム工学における「安定」は第二の意味に近い

安定性 (2)

JIS Z8116 自動制御用語—一般 では …

安定性: 系の状態が, 何らかの原因で一時的に平衡状態又は定常状態からはずれても, その原因がなくなれば, もとの平衡状態又は定常状態に復帰するような特性.

安定性 (3)

- 安定性に関する議論をする際には, 内部状態に着目する場合と, 入出力関係に着目する場合がある.
- 対象となるシステムは時不変で因果的であるものと仮定するが, 非線形系を含む形で定義を述べる.

入出力関係から見た安定性 (1)

- システムの入出力関係が $\mathbf{y}(t) = \mathbf{S}[\mathbf{u}(t)]$ という形で与えられているものとする. $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ とする. 作用素 $\mathbf{S}[\cdot]$ は時不変で因果的であると仮定するが, 線形とは限らない. また, 初期値は無視できると仮定する.
- 具体例としては, 初期値が零の線形時不変システムを考えればよい.

入出力関係から見た安定性 (2)

- $\forall M > 0, \forall t \geq 0, \|u(t)\| < M$ となるとき, 信号 u は有界であるという.
- 時刻 t における信号の値を問題にしているわけではないときに, 「信号 u 」などと書いた書き方をすることがある.

入出力関係から見た安定性 (3)

- 複素平面の部分集合 $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ を (開) **左半平面** という.
- 複素平面の部分集合 $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ を (開) **右半平面** という.
- この講義では, $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$ (右半平面と虚軸の和集合) を **閉右半平面** という.

入出力関係から見た安定性 (4)

- $y(t) = S[u(t)]$ という入出力関係を持つ因果的なシステムが、 u が有界なら y も有界という性質を持つとき、このシステムは **BIBO 安定** (Bounded Input Bounded Output Stable) という。
- 伝達関数 (行列) で記述されたシステムが BIBO 安定であるための条件を考える。

入出力関係から見た安定性 (5)

- 以下では、伝達関数 $G(s)$ (あるいは $\mathbf{G}(s)$) によって定められたシステムが BIBO 安定であることを、「 $G(s)$ (あるいは $\mathbf{G}(s)$) は BIBO 安定である」という。
- Laplace 変換 を $\mathcal{L}[\]$, 逆 Laplace 変換を $\mathcal{L}^{-1}[\]$ であらわす. また, $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$, $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ とする.

入出力関係から見た安定性 (6)

- まず 1 入力 1 出力系: $Y(s) = G(s)U(s)$ を取り扱う. $G(s)$ はプロパーな有理関数とする.
- $G(s)$ のインパルス応答 $g(t)$ は Laplace 逆変換によって得られる. これは指数関数と t の多項式の組み合わせである.

- $y(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau$ である.

入出力関係から見た安定性 (7)

- 多項式 $p(s)$ と $q(s)$ の最大公約多項式が 1 であるとき, $p(s)$ と $q(s)$ は**既約**であるという.
- 以下では, 伝達関数および伝達関数行列の各要素の分母と分子は既約であると仮定する.

入出力関係から見た安定性 (8)

- 多項式 $p(s)$ に対し, $p(s) = 0$ の解 (根) を $p(s)$ の零点 というのであった. また, $G(s) = p(s)/q(s)$ に対し, $p(s)$ の零点を $G(s)$ の零点, $q(s)$ の零点を $G(s)$ の極 というのであった.

入出力関係から見た安定性 (9)

- プロパーな $G(s)$ が BIBO 安定であるための必要十分条件は, $G(s)$ のすべての極が左半平面にあることである.
 - ▷ まず $G(s)$ のすべての極が左半平面にあれば $G(s)$ が BIBO 安定であることを示す
 - ▷ 続いて $G(s)$ が閉右半平面に極を持てば $G(s)$ が BIBO 安定でないことを示す

$G(s)$ のすべての極が左半平面にあれば …

$\forall t, |u(t)| < M$ とする.

$|y(t)| \leq \left| \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau \right| \leq M \int_0^t |g(t - \tau)|d\tau$ である.

変数変換により, $\int_0^t |g(t - \tau)|d\tau = \int_0^t |g(\tau)|d\tau$ であり,

$g(t)$ は $t \rightarrow \infty$ で零に減衰する指数関数と t の多項式の

線形結合だから, $\int_0^t \int_0^t |g(\tau)|d\tau \leq \int_0^\infty \int_0^t |g(\tau)|d\tau < \infty$

である. よって $G(s)$ は BIBO 安定.

$G(s)$ が閉右半平面に極を持つと …

- $G(s)$ にひとつでも実部が正の極があれば，単位ステップ応答は $t \rightarrow \infty$ で無限大に発散するから， $G(s)$ は BIBO 安定でない．すべての極が原点にあるときも同様．
- $G(s)$ のすべての極が原点を除く虚軸上にある場合には，その極に対応する周波数の正弦波を入力すると， t の多項式と正弦波の積の形の応答が得られるから，やはり $G(s)$ は BIBO 安定でない．

入出力関係から見た安定性 (12)

- 次に伝達関数行列 $\mathbf{G}(s) = (G_{ij}(s))_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m}$ を考える. ただし, すべての i, j に対し $G_{ij}(s)$ はプロパーな有理関数であると仮定する ($G_{ij}(s) = n_{ij}(s)/d_{ij}(s)$ とする).
- $\mathbf{G}(s)$ が BIBO 安定であるための必要十分条件は, すべての $G_{ij}(s)$ が BIBO 安定であることである.

$G_{ij}(s)$ のどれかが BIBO 安定でない場合には …

どの要素が BIBO 安定でない場合でも議論は同じなので、 $G_{11}(s)$ が BIBO 安定でない場合を考える。ある $u_1(t)$ が存在し、 $u_1(t)$ は有界でかつ $\mathcal{L}^{-1}[G_{11}(s)U_1(s)]$ は有界とならないから、 $\mathbf{u}(s) = (u_1(s), 0, \dots, 0)^T$ とし、 $U_1(s) = \mathcal{L}[u_1(t)]$ とおくと、 $\mathbf{u}(s)$ は有界で、 $\mathcal{L}^{-1}[\mathbf{G}(s)\mathbf{u}(U)] = \mathcal{L}^{-1}[G_{11}(s)U_1(s)]$ は仮定により有界とならないから、 $\mathbf{G}(s)$ は BIBO 安定でない。

すべての $G_{ij}(s)$ が BIBO 安定である場合には …

$\|\mathbf{u}(t)\|$ が有界であると仮定し, その上界を M とすると, $\forall j, |u_j(t)| < M$ である. また, $|u(t)| < M$ のとき, $\forall i, j, \exists M_{ij} > 0, |\mathcal{L}^{-1}[G_{ij}(s)U(s)]| < M_{ij}U$ である. よって, $M = \max_{i,j} \{M_{ij}\}$ とすると, $\forall i, |y_i(t)| = \left| \sum_{j=1}^m G_{ij}(s)U_j(s) \right| \leq \sum_{j=1}^m |G_{ij}(s)U_j(s)| < mMU$.
したがって $\mathbf{G}(s)$ は BIBO 安定.

入出力関係から見た安定性 (15)

$G(s)$ が BIBO 安定であるための必要十分条件 ($\forall i, j, G_{ij}(s)$ の極が閉右半平面にない) は, 次のようにも言い換えられる:

- $\{d_{ij}(s) : 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m\}$ の最小公倍多項式が閉右半平面に零点を持たないこと
- $G(s)$ が閉右半平面に伝達極を持たないこと

安定性判別法 (1)

- BIBO 安定性の判定のためには, 伝達関数行列の分母の最小公倍多項式の零点をすべて求めれば良かった.
- 今日ではコンピュータによって根を求めることは簡単であるが, 古典制御が発達した 20 世紀前半にはコンピュータなどなかった.

安定性判別法 (2)

- 5次以上の方程式は代数的に解けず、コンピュータがなければ高次多項式の零点を精度良く求めることは難しい。そこで、手計算で高次方程式の (閉) 右半平面に零点の有無を判定する方法や、(実験などで得られる) システムの周波数応答の波形から安定性を判定する方法が発達した。

安定性判別法 (3)

- 今日では, そのような手法の価値は低下しているが, 前者には (係数が有理数であれば) 数値計算の影響を受けないという長所があり, 後者には実験データから安定性の判定ができるという長所があるので, この講義でも紹介する.

Routh の方法 (1)

- Routh の方法による安定性判別について述べる. $d(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} \dots + a_n$ を, 伝達関数行列 $\mathbf{G}(s)$ の各要素の分母の最小公倍多項式とする. $d(s)$ の係数は実数で, $a_0 \neq 0$ とする.
- $d(s)$ を使って $\mathbf{G}(s)$ の BIBO 安定性を判定するためには準備が必要.

- $a_0 < 0$ の場合には $d(s)$ の全係数に -1 を掛けることで, $a_0 > 0$ となるようにする.
- $d(s)$ の零点がすべて左半平面にあれば, $d(s) = a_0 \prod_{i=1}^k (s + \beta_i)(s + \bar{\beta}_i) \prod_{i=k+1}^n (s + \alpha_i)$ という形になり (β_i は複素根, α_i は実根とする), β_i の実部は正, α_i は正である. $(s + \beta_i)(s + \bar{\beta}_i) = s^2 + 2\text{Re}\beta_i s + |\beta_i|^2$ の係数はすべて正だから, $d(s)$ の全係数は正である.
- 待遇を取ると, $d(s)$ の係数に零以下のものがあるならば, $d(s)$ は閉右半平面に零点を持つ.

Routh の方法 (3)

- 以上により, $d(s)$ の係数にひとつでも零以下 (零を含む) のものがあれば, $G(s)$ は BIBO 安定でないことがわかった.
- 続いて, $d(s)$ のすべての係数が正の場合に (この場合には $G(s)$ の BIBO 安定性の判定はまだできていない), Routh 表と呼ばれる表を作って, $G(s)$ の BIBO 安定性を判定する.

Routh 表: ステップ 1

$d(s)$ の n 次, $n - 2$ 次, $n - 4$ 次, ... の係数を第 1 行に, $n - 1$ 次, $n - 3$ 次, $n - 5$ 次, ... の係数を第 2 行にならべた 2 行の表を作る (第 2 行の要素数が第 1 行より少ないときには, 右端に零を追加する). このように並べた表の列の数が q 個であったものとする.

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\ a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,q} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,q} \end{array}$$

帰納法を使うために, 変数名を上記右のように変更する.

Routh 表: 帰納法

Routh 表が第 k 行まで ($k \geq 2$) 計算され, 次のような形になっているものとする.

$$\begin{array}{cccc} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{k,1} & x_{k,2} & \cdots & x_{1,q} \end{array}$$

第 $k + 1$ 行の要素を, $1 \leq j < q$ に対し, $x_{k+1,j} = -\frac{1}{x_{k,1}} \det \begin{pmatrix} x_{k-1,1} & x_{k-1,j+1} \\ x_{k,1} & x_{k,j+1} \end{pmatrix}$ とする. また, $x_{k+1,q} = 0$ とする.

Routh 表: 安定性の判定

- 以上の計算を, 2行連続で第1列以外の数がすべて零になるまで続ける.
- 計算終了時点で Routh 表の第1列の数がすべて正であることが, すべての係数が正の多項式 $p(s)$ に対し, $p(s)$ が閉右半平面に零点を持たない, すなわち $G(s)$ が BIBO 安定であるための必要十分条件である.
- 証明は極めて繁雑. この講義では取り扱わない.

Routh 表: 停止条件

- Routh 表が有限回の計算で構成できることを見る.
- 定義から, 第 3 行と第 4 行の第 q 列は零である.
- 定義から, 第 $2j + 3$ 行と第 $2j + 4$ 行の第 $q - j$ 列から q 列までが零であると仮定する ($j \geq 0$). すると, 上記の構成法から, 第 $2(j + 1) + 3$ 行と第 $2(j + 1) + 4$ 行の第 $q - j - 1$ 列から q 列までが零となる. 2 行単位で下の行ほど左端の零列が増えるから, 計算は有限回で終了する.

Scilab による実行例

```
-->s=poly(0,"s");  
-->p=1+s+s^2+s^3+s^4+s^5;  
-->roots(p)  
ans  =  
    0.5 + 0.8660254i  
    0.5 - 0.8660254i  
- 1.  
- 0.5 + 0.8660254i  
- 0.5 - 0.8660254i
```

```
-->routh_t(p)
```

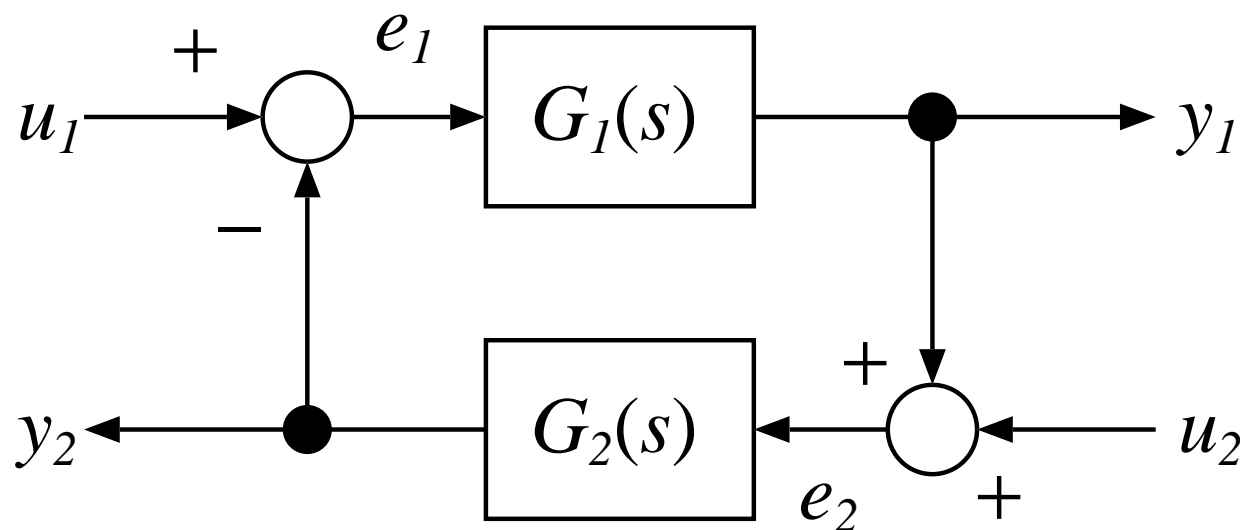
```
ans =
```

```
1.    1.    1.  
1.    1.    1.  
4.    2.    0.  
0.5   1.    0.  
- 6.   0.    0.  
1.    0.    0.
```

第5行1列が負だから $p(s) = 0$ は閉半平面に解を持つ.

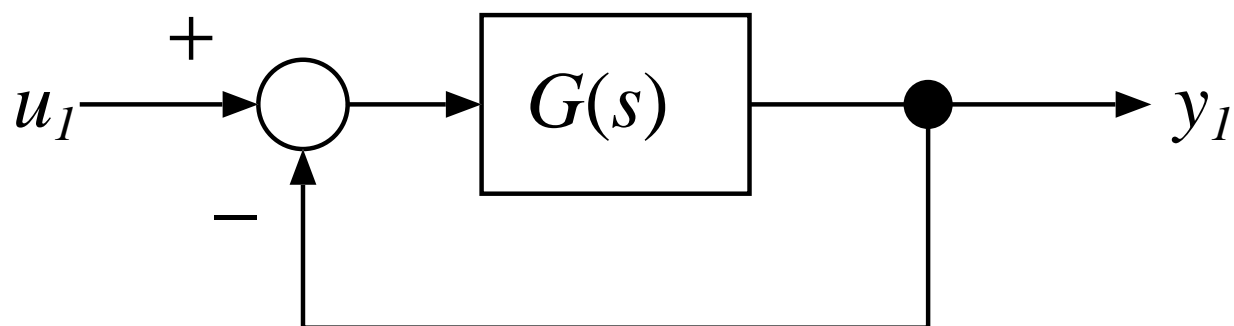
フィードバックシステムの安定条件 (1)

以下のようなフィードバックシステムを考える.



$G_1(s)G_2(s)$ をこのシステムの一巡伝達関数という.

先の図で加算の部分に $+$ 符号と $-$ 符号が (不自然に) 混在しているのは, 制御理論でよく用いられる, 以下のフィードバックシステムの安定条件に関する記述との整合性を取るため.



フィードバックシステムの安定条件 (3)

- u_1 と u_2 は外部入力, e_1 と e_2 はサブシステム $G_1(s)$, $G_2(s)$ への入力, y_1 と y_2 はサブシステム $G_1(s)$, $G_2(s)$ からの出力である.
- $G_1(s)$, $G_2(s)$ はプロパーな伝達関数とする.
- 前述のフィードバックシステム意味を持つための条件を考える.

フィードバックシステムの安定条件 (4)

- $\mathcal{L}[u_1(t)] = U_1(s)$ とする. 他も同様.
- $E_1(s) = U_1(s) - Y_2(s)$, $E_2(s) = U_2(s) + Y_1(s)$,
 $Y_1(s) = G_1(s)E_1(s)$, $Y_2(s) = G_2(s)E_2(s)$ だ
から, これらをまとめると,
$$Y_1(s) = G_1(s)U_1(s) - G_1(s)Y_2(s),$$
$$Y_2(s) = G_2(s)U_2(s) + G_2(s)Y_1(s).$$

フィードバックシステムの安定条件 (5)

- $$\begin{pmatrix} 1 & G_1(s) \\ -G_2(s) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1(s)U_1(s) \\ G_2(s)U_2(s) \end{pmatrix}$$
が $(Y_1(s), Y_2(s))$ について解け, $(U_1(s), U_2(s))$ から $(Y_1(s), Y_2(s))$ への伝達関数行列がプロパーになるようにしたいのであるが, これはいつでも可能であるとは限らない.

- 多項式 $p(s)$ の次数を $\deg p(s)$ であらわす. $G_i(s) = \frac{n_i(s)}{d_i(s)} = D_i + \frac{n_i^0(s)}{d_i(s)}$, $\deg n_i^0(s) < \deg d_i(s)$, d_i はモニックとする ($i =$

$$1, 2). \quad \begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & G_1(s) \\ -G_2(s) & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix} \quad \text{なので,}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & G_1(s) \\ -G_2(s) & 1 \end{pmatrix}^{-1} \quad \text{がプロパーにならない.}$$

- $\begin{pmatrix} 1 & G_1(s) \\ -G_2(s) & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)} \begin{pmatrix} 1 & -G_1(s) \\ G_2(s) & 1 \end{pmatrix}$

だから, $\begin{pmatrix} 1 & G_1(s) \\ -G_2(s) & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ がプロパーであるためには

$$\frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)} \quad \text{がプロパーであることが必要かつ十分.}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)} &= \frac{1}{1 + \left(D_1 + \frac{n_1^0(s)}{d_1(s)}\right)\left(D_2 + \frac{n_2^0(s)}{d_2(s)}\right)} \\ &= \frac{d_1(s)d_2(s)}{d_1(s)d_2(s) + (D_1d_1(s) + n_1^0(s))(D_2d_2(s) + n_2^0(s))} \end{aligned}$$

- 上記の有理関数は, $D_1D_2 \neq -1$ であればプロパーであるが, $D_1D_2 = -1$ の場合はプロパーにならない.

- したがって, $\begin{pmatrix} 1 & G_1(s) \\ -G_2(s) & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ がプロパーであるための必要十分条件は, $1 + D_1D_2 \neq 0$ となることである.

フィードバックシステムの安定条件 (8)

- 先に述べたフィードバックシステムにおいて,
 $G_i(s) = D_i + \frac{n_i^0(s)}{d_i(s)}$, $\deg n_i^0(s) < \deg d_i(s)$, d_i
はモニックとしたとき ($i = 1, 2$), $1 + D_1 D_2 \neq 0$
であれば, このフィードバックシステムは
well-posed であるという.

フィードバックシステムの安定条件 (9)

- 上述のように, 先に述べたフィードバックシステムにおいて, $\begin{pmatrix} 1 & G_1(s) \\ -G_2(s) & 1 \end{pmatrix}$ が逆行列を持ち, その逆行列がプロパーな伝達関数行列になるための必要十分条件は, そのフィードバックシステムが well-posed であることである.

- 文献によっては, $\begin{pmatrix} 1 & G_1(s) \\ -G_2(s) & 1 \end{pmatrix}$ が逆行列を持つ, すなわち $1 + G_1(s)G_2(s) \neq 0$ であるとき, フィードバックシステムが well-posed であると定義していることがあるので注意. これは, プロパーでない伝達関数行列を許容していることになる.
- 加算器の符号の取り方によっては, well-posed のための必要十分条件が $1 - D_1D_2 \neq 0$ のように変わることがある.

フィードバックシステムの安定条件 (11)

- $G_i(s) = \frac{n_i(s)}{d_i(s)}$ ($i = 1, 2$) とし, 多項式 $\delta(s)$ を $\delta(s) = d_1(s)d_2(s) + n_1(s)n_2(s)$ と定義すると ...

$$\begin{pmatrix} 1 & G_1(s) \\ -G_2(s) & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d_1(s)d_2(s)}{\delta(s)} & -\frac{n_1(s)d_2(s)}{\delta(s)} \\ \frac{n_2(s)d_1(s)}{\delta(s)} & \frac{d_1(s)d_2(s)}{\delta(s)} \end{pmatrix}$$

フィードバックシステムの安定条件 (12)

$(U_1, U_2)^T$ と $(Y_1, Y_2)^T$ の関係は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n_1(s)d_2(s)}{\delta(s)} & -\frac{n_1(s)n_2(s)}{\delta(s)} \\ \frac{n_1(s)n_2(s)}{\delta(s)} & \frac{d_1(s)n_2(s)}{\delta(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix}$$

フィードバックシステムの安定条件 (13)

- よって, well-posed なフィードバックシステムが BIBO 安定であるための必要十分条件は, $\delta(s)$ の零点がすべて左半平面にあること.
- 次に, 複素平面における偏角の原理について述べる. $C : z = z(t) \ (a \leq t \leq b)$ を複素平面でパラメータ表示された単一閉曲線とする.

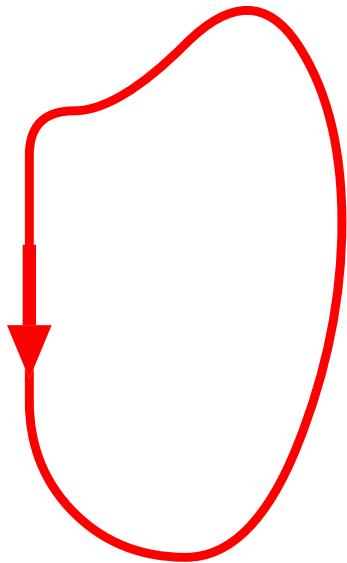
偏角の原理 z は複素数, 関数 $f(z)$ は z の有理関数で, 閉曲線 C 上には極および零点を持たず, C の内部に, 重複度も含めて, Z 個の零点と, P 個の極を持つものとする. $f(z(t))$ の偏角を t に関して連続に変化するように調整したものを $\theta(z(t))$ とすると,
$$\frac{\theta(z(b)) - \theta(z(a))}{2\pi} = Z - P$$
 となる. すなわち, f による閉曲線 C の像は, 原点を通らず, 原点のまわりを反時計まわりに $Z - P$ 回まわる閉曲線である.

フィードバックシステムの安定条件 (15)

- 複素解析では正に向き付けられた曲線を考えるのであるが, システム工学では, 虚軸を $-R$ から $+R$ まで移動し, 続いて閉右半平面を時計回りに半周する曲線の $R \rightarrow \infty$ とした極限を考える. この曲線を C_R とする. 曲線が負に向き付けられていることに注意.

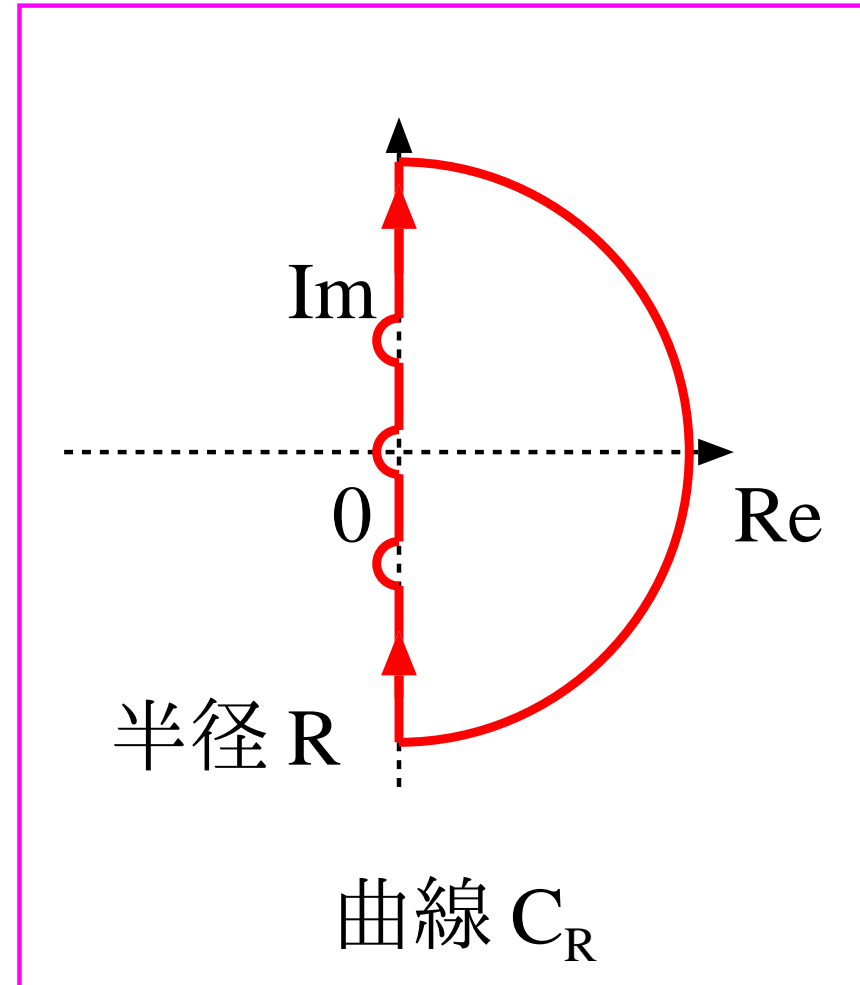
フィードバックシステムの安定条件 (16)

- C_R を使う目的は、偏角の原理を使って $\delta(s)$ の閉右半平面における零点を調べることなのだが、 $\delta(s)$ が虚軸上に零点を持つと偏角の原理が使えない。そこで、虚軸上に $\delta(s)$ の零点がある場合は、経路の一部を、その零点の左側を通過する小さな半円で置き換える (次ページ図)。



正の向きの曲線

曲線C



半径 R

曲線 C_R

複素解析ではこちら

システム工学ではこちら

フィードバックシステムの安定条件 (18)

- $z(t)$ が C_R 上を 1 周したときの $\delta(z(t))$ の軌跡を考える. $\delta(s)$ が閉右半平面に零点を持てば, 偏角の原理により, この軌跡は原点を時計回りに零点の数だけ回る. よって, フィードバックシステムが BIBO 安定であるための必要十分条件は, この軌跡が原点を通過せず, かつ原点をまわらないことである.

フィードバックシステムの安定条件 (19)

- $\delta(s)$ が原点を通過しないという条件を付けておけば, 虚軸上の極を横切る経路の一部をその経路の左側を通る半円で置き換えるという操作は不要なのだが, 慣習に合わせて上記のように経路を取った.

フィードバックシステムの安定条件 (20)

- 次に, 一巡伝達関数 $G_1(s)G_2(s)$ を使って well-posed なフィードバックシステムが BIBO 安定性を判定することを考える $G_i(s) = n_i(s)/d_i(s)$ ($i = 1, 2$) で, これらの分母と分子は既約であったことを思い出しておく.
- $G_1(s)$ と $G_2(s)$ のあいだで閉右半平面にある極と零点が相殺されることはないと仮定する.

フィードバックシステムの安定条件 (21)

- $\delta(s) = d_1(s)d_2(s)(1+G_1(s)G_2(s))$ であり, $1+G_1(s)G_2(s)$ を使って BIBO 安定性を判定したい.
- $G_1(s)$ と $G_2(s)$ のあいだで閉右半平面にある極と零点が相殺されることがなければ, $\delta(s)$ の虚軸上の零点と $1+G_1(s)G_2(s)$ の虚軸上の零点は一致することが示せる (後述).

まず, $\delta(i\omega) = 0$ のとき $1 + G_1(i\omega)G_2(i\omega) = 0$ となることを示すために, $1 + G_1(i\omega)G_2(i\omega) \neq 0$ と仮定して矛盾を導く. $\delta(s)$ は多項式だから, ω は有限. $\delta(s) = d_1(s)d_2(s)(1 + G_1(s)G_2(s))$ で, $1 + G_1(i\omega)G_2(i\omega) \neq 0$ だから, $d_1(i\omega)d_2(i\omega) = 0$ でなければならない. また, $\delta(s) = d_1(s)d_2(s) + n_1(s)n_2(s)$ だったから, $n_1(i\omega)n_2(i\omega) = 0$ である. $(d_i(s), n_i(s))$ は既約だから ($i = 1, 2$), これは $G_1(s)$ と $G_2(s)$ で閉右半平面にある極と零点が相殺されていることを意味し, 仮定に矛盾する.

次に, $1 + G_1(i\omega)G_2(i\omega) = 0$ のとき, $\delta(i\omega) = 0$ となることを見る. まず, 背理法により ω が有限であることを示す. ω が無限大と仮定し, $i = 1, 2$ に対し $D_i + \frac{n_i^0(s)}{d_i(s)}$, $\deg n_i^0(s) < \deg d_i(s)$ とおいて $s = \lim_{\omega \rightarrow \infty} i\omega$ とすると, $1 + D_1D_2 = 0$ となり, これはフィードバックシステムが well-posed であるという仮定に矛盾する.

以上により, ω は有限で, $d_1(s)d_2(s)$ は多項式だから, $d_1(i\omega)d_2(i\omega)$ も有限, よって $\delta(i\omega) = d_1(i\omega)d_2(i\omega)(1 + G_1(i\omega)G_2(i\omega))$ より $\delta(i\omega) = 0$ である.

フィードバックシステムの安定条件 (24)

- $\delta(s)$, $(1 + G_1(s)G_2(s))$, $G_1(s)G_2(s)$ による曲線 C_R の像を, $\delta(C_R)$, $(1 + G_1G_2)(C_R)$ および $(G_1G_2)(C_R)$ と書く.
- $d_1(s)d_2(s)$ が閉右半平面に N_d 個の零点を持つと仮定する.

フィードバックシステムの安定条件 (25)

- 上述の結果を使うと, $G_1(s)$ および $G_2(s)$ がプロパーで, フィードバックシステムが well-posed, $G_1(s)$ と $G_2(s)$ のあいだで閉右半平面における極零相殺がない, という仮定のもとで, 以下の3条件が等価であることがわかる.

フィードバックシステムの安定条件 (26)

- $\delta(C_R)$ が原点を通過せず, 原点のまわりを回らない
- $(1 + G_1G_2)(C_R)$ が原点を通過せず, 原点のまわりを反時計回りに N_d 周する
- $(G_1G_2)(C_R)$ が -1 を通過せず, -1 のまわりを反時計回りに N_d 周する

フィードバックシステムの安定条件 (27)

- 上述の第3の条件によってフィードバックシステムの BIBO 安定性を判定する方法を, **Nyquist の安定判別法** という.

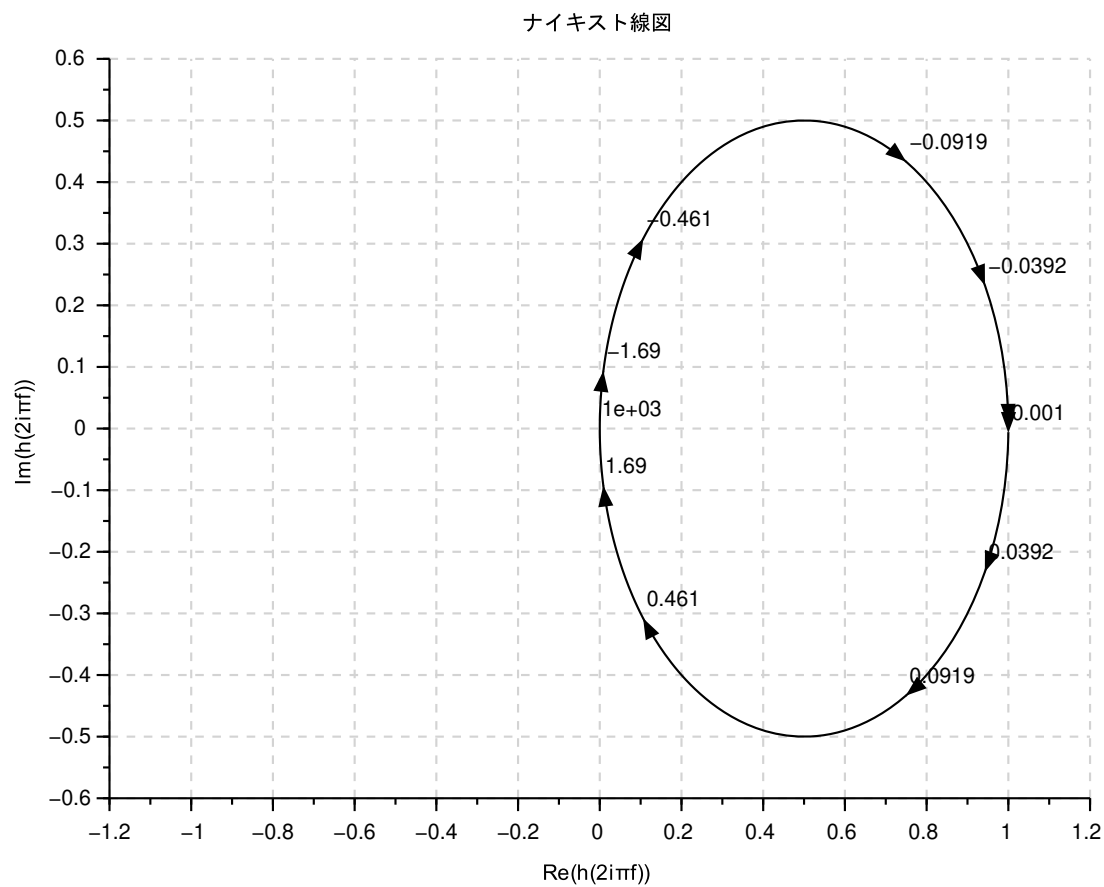
$G_1(s)$ と $G_2(s)$ が閉右半平面に極を持たないときには, Nyquist の安定判別法を用いると, $G_1(s)$ と $G_2(s)$ の周波数応答からフィードバックシステムの BIBO 安定性を判定することができる.

計算例 先の図において, $G_1(s) = \frac{1}{s+1}$, $G_2(s) = K$ (定数) の場合を考える. 一巡伝達関数は $G_1(s)G_2(s) = \frac{K}{s+1}$ である. $G_1(s)$ の極は左半平面にあり, $G_2(s)$ は極を持たない. よって, BIBO 安定であるための必要十分条件は, $\frac{K}{1+s}$ による C_R の像が $-1 + i0$ のまわりを回らないことである.

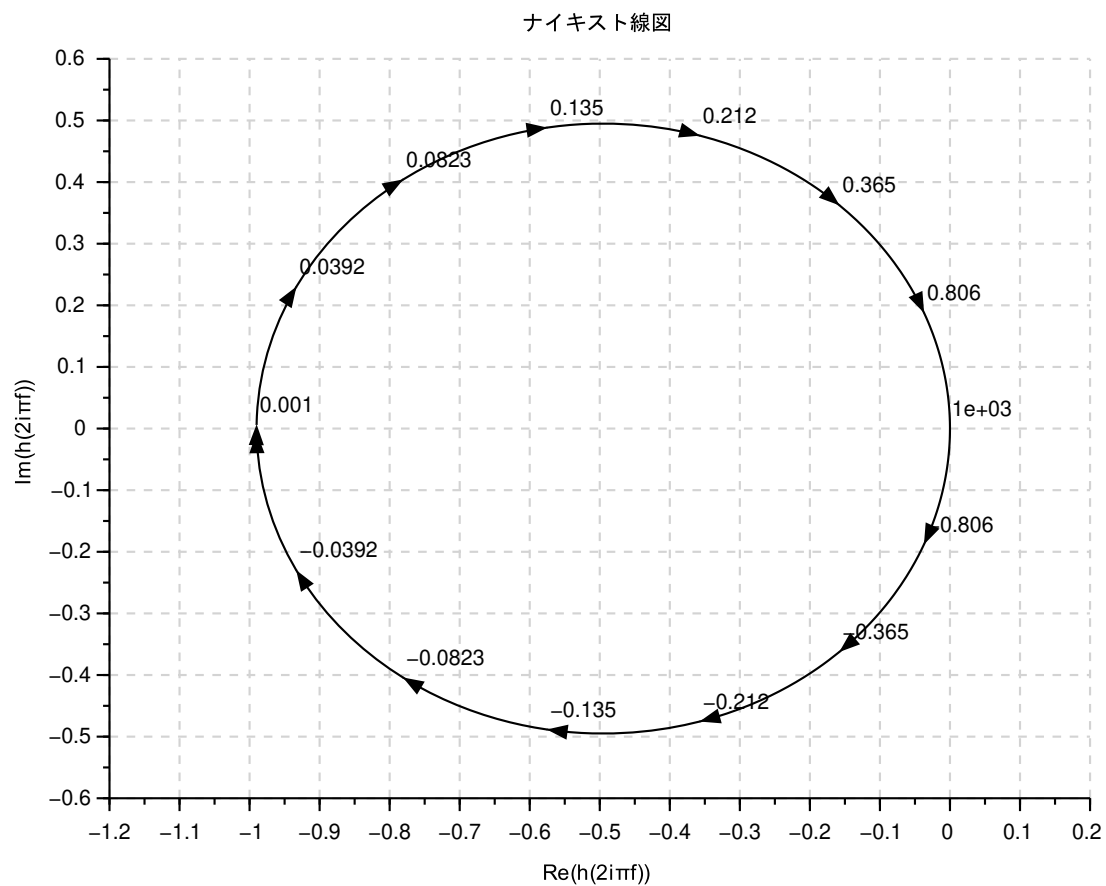
$$\begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+K+1} & -\frac{K}{s+K+1} \\ \frac{K}{s+K+1} & \frac{K(s+1)}{s+K+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix}$$

だから, このフィードバックシステムが BIBO 安定であるための必要十分条件は, $K > -1$ である.

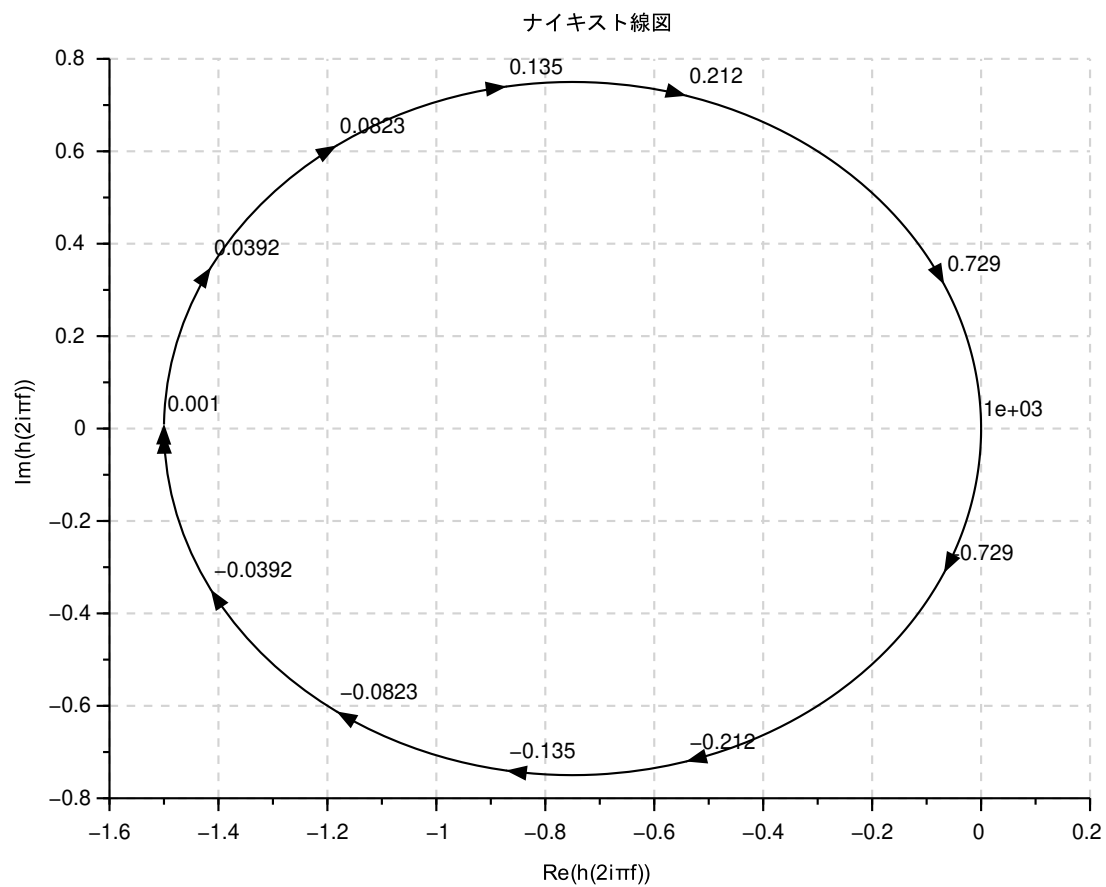
$\delta(s) = d_1(s)d_2(s)(1 + G_1(s)G_2(s))$ で, $d_1(s)d_2(s) = (s + 1)$ は閉右半平面に零点を持たないから, $\delta(C_R)$ が原点のまわりを時計回りに回る回数は, $(G_1G_2)(C_R)$ が -1 のまわりを時計回りに回る回数と, 方向も含めて一致する. だから, $(G_1G_2)(C_R)$ が -1 のまわりを時計回りに正の回数まわれば, 不安定である.



$K = 1$, BIBO 安定



$K = -0.99$, もう少しで BIBO 安定でなくなる



$K = -1.5$, BIBO 安定でない:

参考文献

- 前田, 線形システム, 朝倉書店, 2001
- K. Zhou, Essentials of Robust Control, Prentice Hall, 1998.
- 野波, 水野 (編集代表), 制御の事典, 朝倉書店, 2015
- 太田, 制御工学, オーム社, 2012
- M. Mandal and A. Asif, Continuous and Discrete Time Signal and Systems, Cambridge University Press, 2007