

システム工学 I

第 11 回

システムの応答

状態方程式とシステムの応答 (1)

- $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}$ というシステムを考える ($\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^p$; $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$)
- $\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{u}(t)$, $\boldsymbol{y}(t)$ の Laplace 変換を $\boldsymbol{X}(s)$, $\boldsymbol{U}(s)$, $\boldsymbol{Y}(s)$ とする.
- 変数 t や s を省略することがある.

このシステムの解は …

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \left(e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \right) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t)$$

- $\mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0$: 零入力応答
- $\mathbf{C} \left(\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \right) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t)$: 零状態応答

状態方程式とシステムの応答 (3)

- システムの応答は, 零入力応答と零状態応答の重ね合わせになる.
- 入力 $\mathbf{u}_1(t)$ に対する零状態応答を $\mathbf{y}_1(t)$, 入力 $\mathbf{u}_2(t)$ に対する零状態応答を $\mathbf{y}_2(t)$ とすると, 入力 $\alpha_1\mathbf{u}_1(t) + \alpha_2\mathbf{u}_2(t)$ に対する零状態応答は $\alpha_1\mathbf{y}_1(t) + \alpha_2\mathbf{y}_2(t)$ となる (重ね合わせの原理).

次に状態方程式を Laplace 変換する. $s\mathbf{X} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}$ だから ...

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s),$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0$$

$$+ \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)$$

- $\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0$: 零入力応答の Laplace 変換
- $(\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D})\mathbf{U}(s)$: 零状態応答の Laplace 変換

状態方程式とシステムの応答 (5)

- システムの伝達関数行列では初期値を零とおく. よって, このシステムの伝達関数行列は $C(sI - A)^{-1}B + D$
- 時間領域でシステムの応答を求めるときには, e^{At} が必要になる. 既出だが, e^{At} の構造を調べるには Jordan 標準形が必要.

状態方程式とシステムの応答 (6)

- $P^{-1}AP = \lambda I_n + N_n$ の場合 (Jordan ブロックが 1 個だけの場合) には …

$$e^{At} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\lambda t} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & te^{\lambda t} \\ & & & e^{\lambda t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

- ただし, $N_n = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-1} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right)$ とする ($n \geq 2$).
- $n = 1$ のときは $N_1 = 0$ と定義する. したがって, $N_1 = 0$ の項は無視できる.

状態方程式とシステムの応答 (8)

- $P^{-1}AP = \text{diag}(\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_k)$ のように Jordan 標準形が k 個のブロックを持つ場合には
($\mathbf{J}_i = \lambda_i \mathbf{I}_{n_i} + \mathbf{N}_{n_i}$ ($1 \leq i \leq k, n_i \geq 1$))
 $e^{At} = P \text{diag}(e^{\mathbf{J}_1 t}, \dots, e^{\mathbf{J}_k t}) P^{-1},$

$$e^{\mathbf{J}_i t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} e^{\lambda_i t} \\ & \ddots & \vdots \\ & & e^{\lambda_i t} \end{pmatrix}$$

状態方程式とシステムの応答 (9)

- 次に, $(sI - A)$ を Jordan 標準形を使って表現する. $J = \text{diag}(J_1, \dots, J_k)$ を A の Jordan 標準形とし ($J_i = \lambda_i I_{n_i} + N_{n_i}$), $P^{-1}AP = J$ とする.
- $(sI - A) = P(sI - J)P^{-1}$ だから,
 $(sI - A)^{-1} = P(sI - J)^{-1}P^{-1}$.

状態方程式とシステムの応答 (10)

- $\mathbf{X} = \text{diag}(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_k)$ のすべての対角ブロックが正方で逆行列を持てば, \mathbf{X} も逆行列を持ち, $\mathbf{X}^{-1} = \text{diag}(\mathbf{X}_1^{-1}, \dots, \mathbf{X}_k^{-1})$
- よって, $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{P} \text{diag}((s\mathbf{I} - \mathbf{J}_1)^{-1}, \dots, (s\mathbf{I} - \mathbf{J}_k)^{-1}) \mathbf{P}^{-1}$.

$$\begin{pmatrix} s - \lambda_i & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & s - \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s - \lambda_i} & \frac{1}{(s - \lambda_i)^2} & \cdots & \frac{1}{(s - \lambda_i)^{n_i}} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \frac{1}{(s - \lambda_i)^2} \\ & & & \frac{1}{s - \lambda_i} \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

となることは直接計算することで確認できるから …

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{J}_i)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-\lambda_i} & \frac{1}{(s-\lambda_i)^2} & \cdots & \frac{1}{(s-\lambda_i)^{n_i}} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \frac{1}{(s-\lambda_i)^2} \\ & & & \frac{1}{s-\lambda_i} \end{pmatrix}$$

これを Laplace 逆変換すると先に述べた時間領域における形になる。

状態方程式とシステムの応答 (13)

- MATLAB や Scilab のような科学技術計算のためのソフトウェアには行列の指数関数を計算する関数が用意されていることがある (MATLAB, Scilab では `expm`).
- 通常の指数関数は `exp` とは違うので注意.

状態方程式とシステムの応答 (14)

- 我々は先ほど状態方程式から次のような表現を導いたのだが:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s),$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) + \mathbf{D}U(s)$$

多入力多出力系の零点を定義する目的で、別の表現を用いることもある。

状態方程式とシステムの応答 (15)

- 前のページの式を変形し,

$$\Pi(s) = \begin{pmatrix} (A - sI) & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ と定義すると,}$$

$$\Pi(s) \begin{pmatrix} X(s) \\ U(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x(0) \\ Y(s) \end{pmatrix} \text{ となる.}$$

- $\Pi(s)$ を **Rosenbrock のシステム行列** という.

状態方程式とシステムの応答 (16)

- 多項式行列 $sI - A$ を Smith 標準形:
$$\left(\begin{array}{c|c} \text{diag}(g_1(s), \dots, g_r(s)) & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right) \quad (\forall i, g_i(s) \text{ はモニック}, g_i(s) | g_{i+1}(s))$$
 に変形したときの, 多項式 $g_1(s), \dots, g_r(s)$ に対し, $g_i(s) = 0 (1 \leq i \leq r)$ の根を **システム極** と呼び, その重複度を **システム極の重複度** と呼ぶ.

状態方程式とシステムの応答 (17)

- 多項式行列 $\mathbf{\Pi}(s)$ を Smith 標準形:

$$\left(\begin{array}{c|c} \text{diag}(h_1(s), \dots, h_u(s)) & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right), \quad (\forall i, h_i(s) \text{ は}$$

モニック, $h_i(s) | h_{i+1}(s)$) に変形したときの, 多項式 $h_1(s), \dots, h_u(s)$ に対し, $h_i(s) = 0 (1 \leq i \leq u)$ の根を **不変零点** と呼び, その重複度を **不変零点の重複度** と呼ぶ.

システムのモード (1)

- $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ という微分方程式が与えられていて, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \text{diag}(\boldsymbol{J}_1, \dots, \boldsymbol{J}_k)$, $\boldsymbol{J}_i = \lambda_i \boldsymbol{I}_{n_i} + \boldsymbol{N}_{n_i}$ ($1 \leq i \leq k, n_i \geq 1$) とする.
- $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$ という座標変換を考え, 新しい座標 \boldsymbol{z} (一般には非直交座標) に関する微分方程式を立てる.

システムのモード (2)

- $\dot{z} = P^{-1}\dot{x} = P^{-1}Ax = P^{-1}APz$ だから、新しい座標系では、 $\dot{z} = \text{diag}(J_1, \dots, J_k)z$ となっている。初期値は $z_0 = P^{-1}x_0$ である。
- $\dot{z} = \text{diag}(J_1, \dots, J_k)z$ の解を $\dot{x} = Ax$ のモードという。

システムのモード (3)

- この解は $z(t) = \text{diag}(e^{J_1 t}, \dots, e^{J_k t}) z_0$ だから、システムのモードは $e^{J_i t}$ の要素を (初期値を使って) 組み合わせたものになる。
- システムのモードを構成する関数が λ_i と n の値に応じてどのように変わるかを見てゆく。

システムのモード (4)

- $n = 1$ で λ_i が正の実数のときには, $e^{\lambda_i t}$ は $t \rightarrow \infty$ で発散する指数関数である.
- $n = 1$ で λ_i が負の実数のときには, $e^{\lambda_i t}$ は $t \rightarrow \infty$ で零に収束する指数関数である.
- A は実行列だから, λ_i が虚数なら, $(\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_k)$ の中に λ_i の複素共役に対応するものがある.

システムのモード (5)

- $n = 1$ で λ_i が虚数のときは,
$$e^{(a+ib)t} = e^{at} (\cos bt + i \sin bt)$$
 である. これは, $t \rightarrow \infty$ とすると, $a > 0$ なら振動的に発散し, $a < 0$ なら振動的に零に減衰する.
 $a = 0$ のときは振幅が一定の三角関数である.

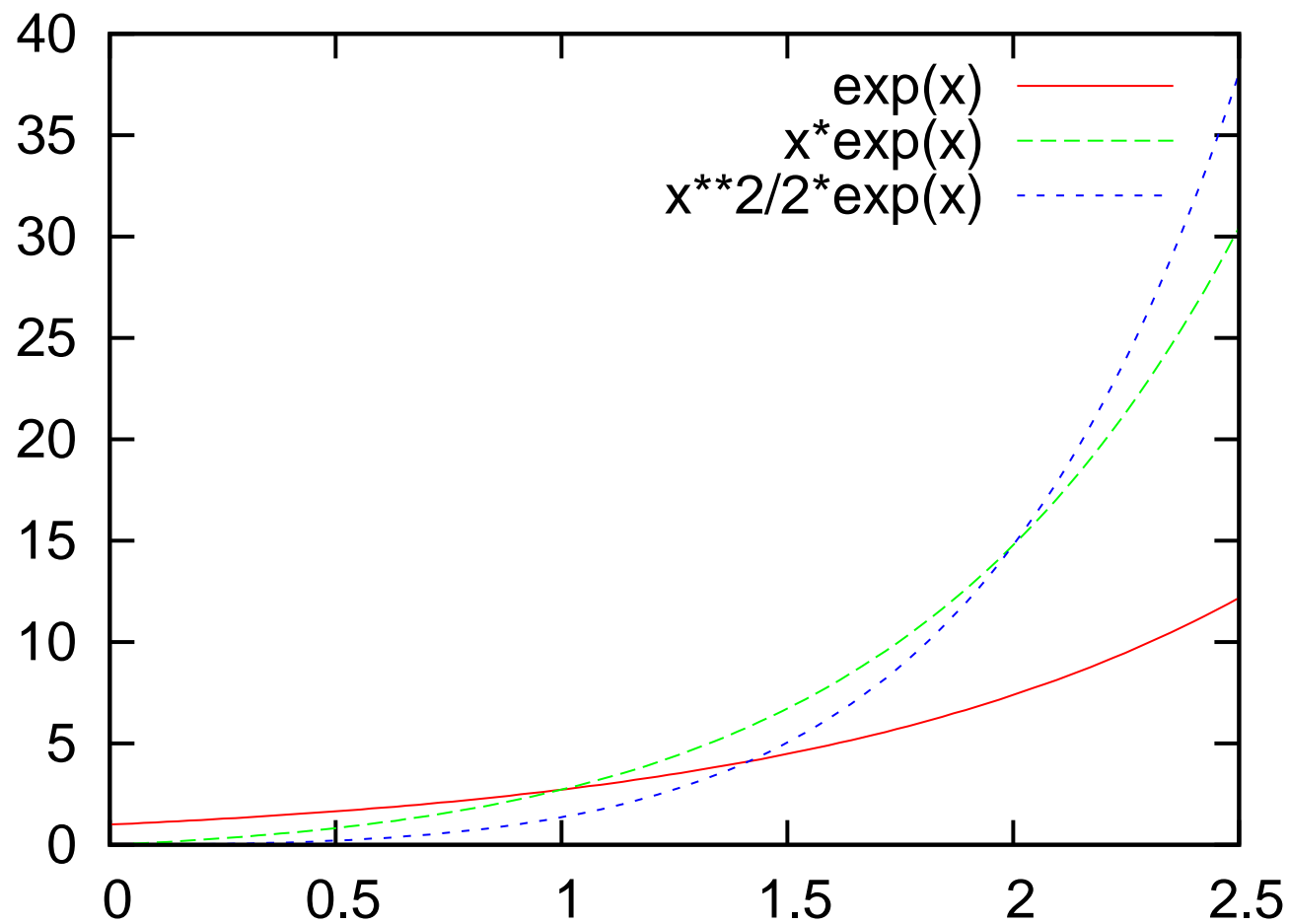
システムのモード (6)

- λ_i が虚数であっても, \mathbf{A} , \mathbf{x}_0 が実行列および実ベクトルである場合には, これに対応する応答波形は, λ_i の複素共役に対する応答波形と対になっている. 初期値が実数である場合には, 複素共役どうしが打ち消し合うことで, 応答の虚数成分は消える.

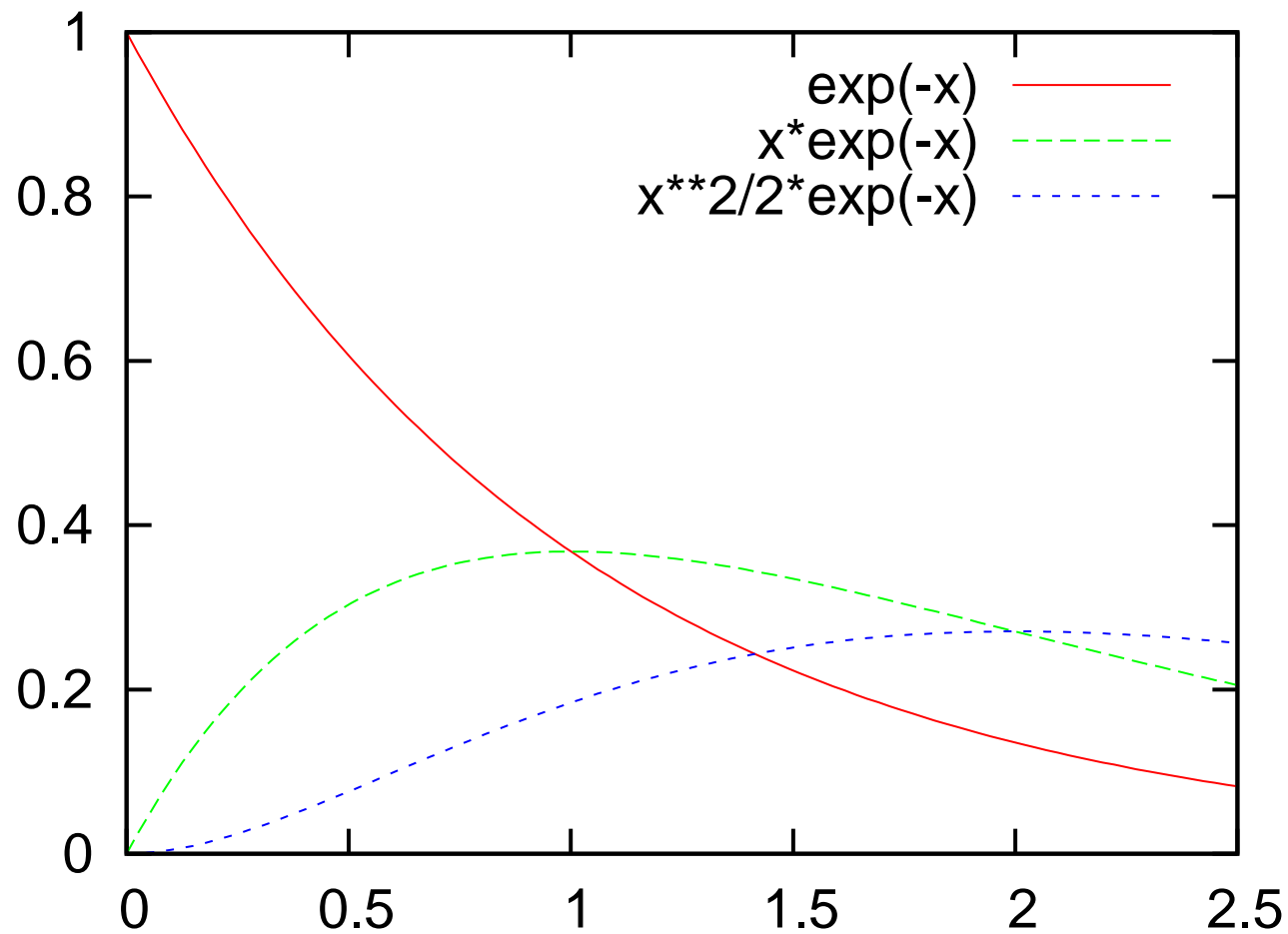
システムのモード (7)

- $n \geq 2$ のときには、ブロック \mathbf{J}_i に対応するモードは、 $e^{\lambda_i t}$, $te^{\lambda_i t}$, \dots , $\frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}e^{\lambda_i t}$ の組み合わせである。 λ_i の値と解の挙動の関係は $n = 1$ の場合と同様であるが、 t の多項式がそれに乗じられる点が異なる。
- $n = 3$ の場合の様々なモードの図を示す。

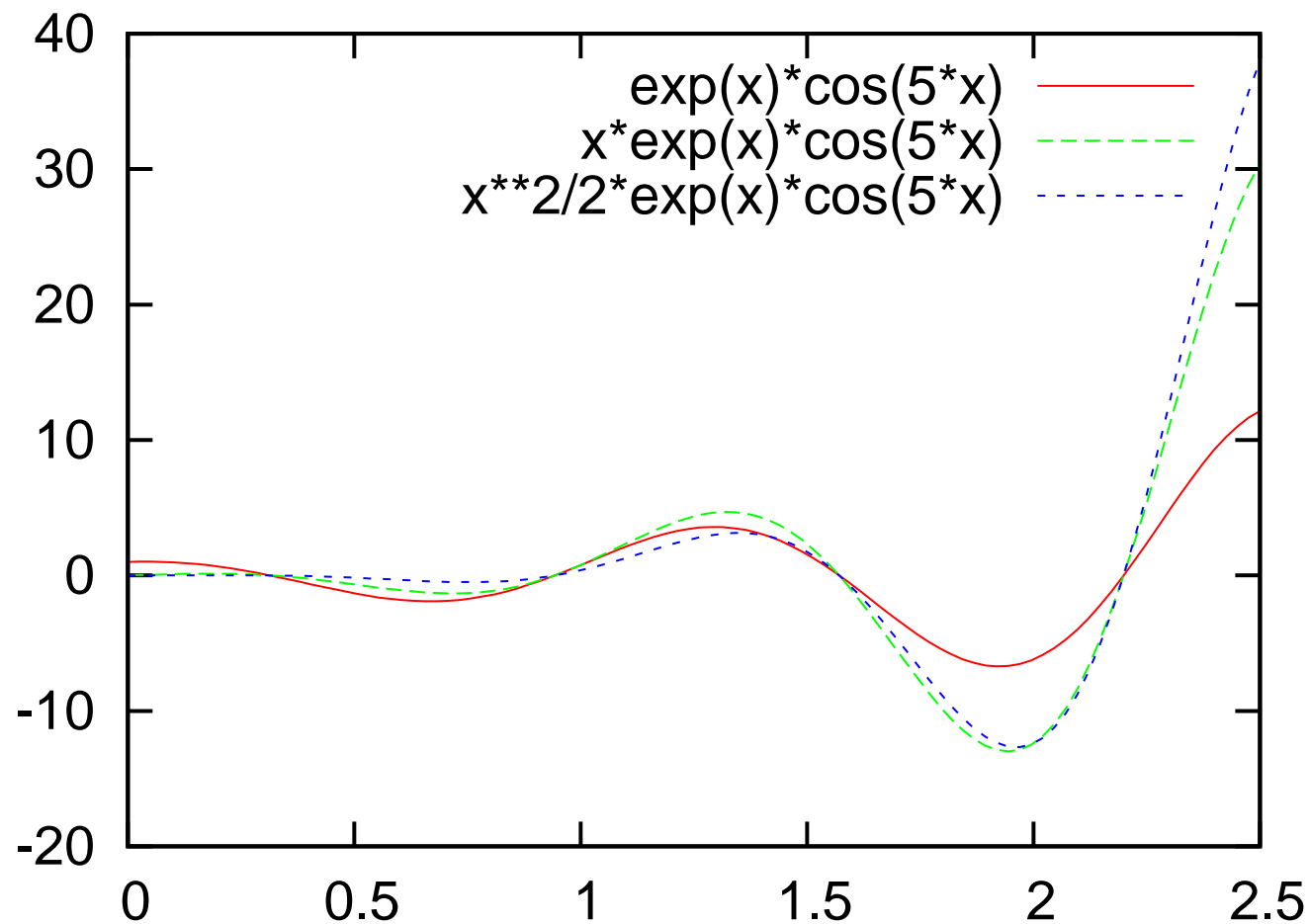
$$n_i = 3, \lambda_i = 1$$



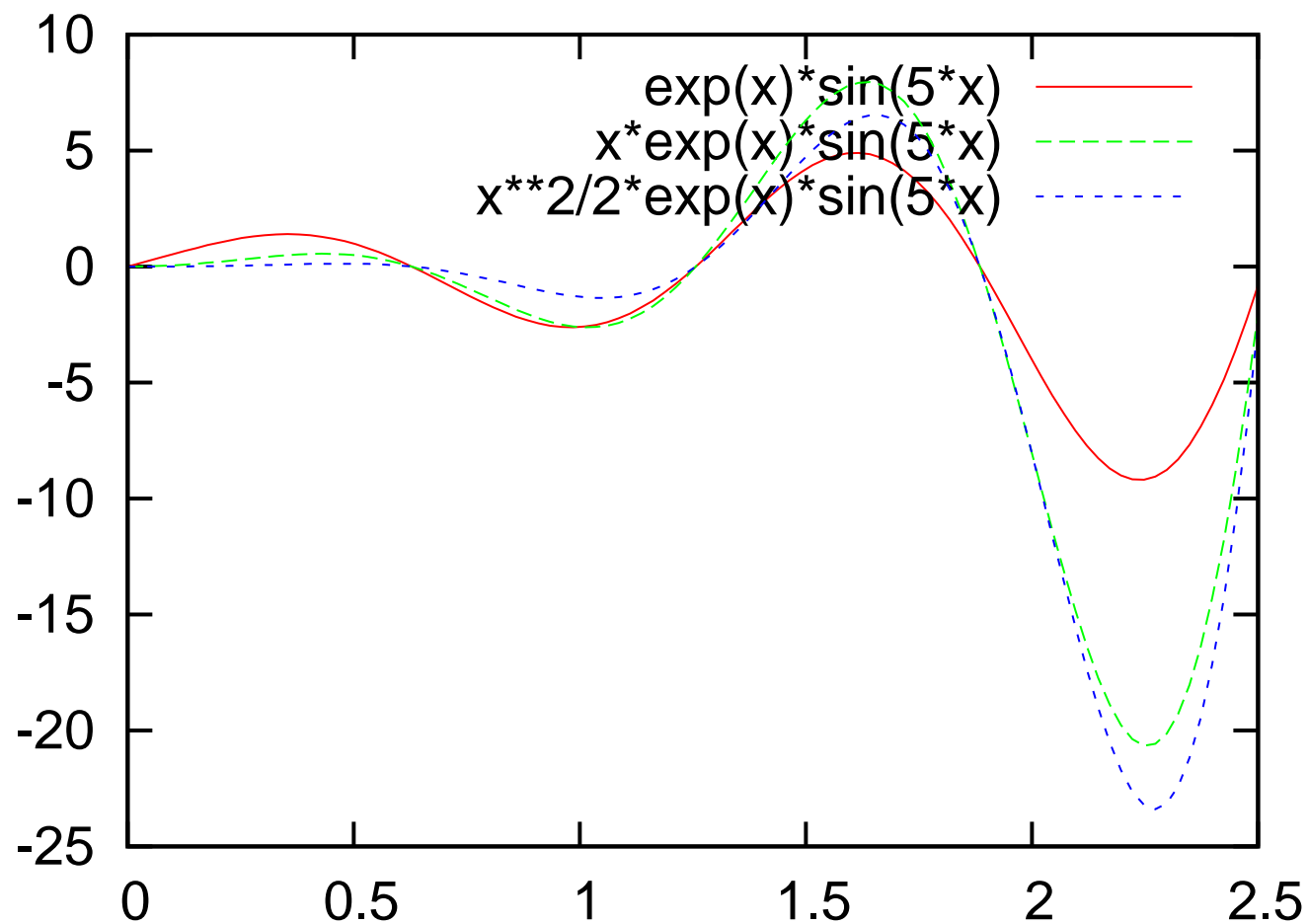
$$n_i = 3, \lambda_i = -1$$



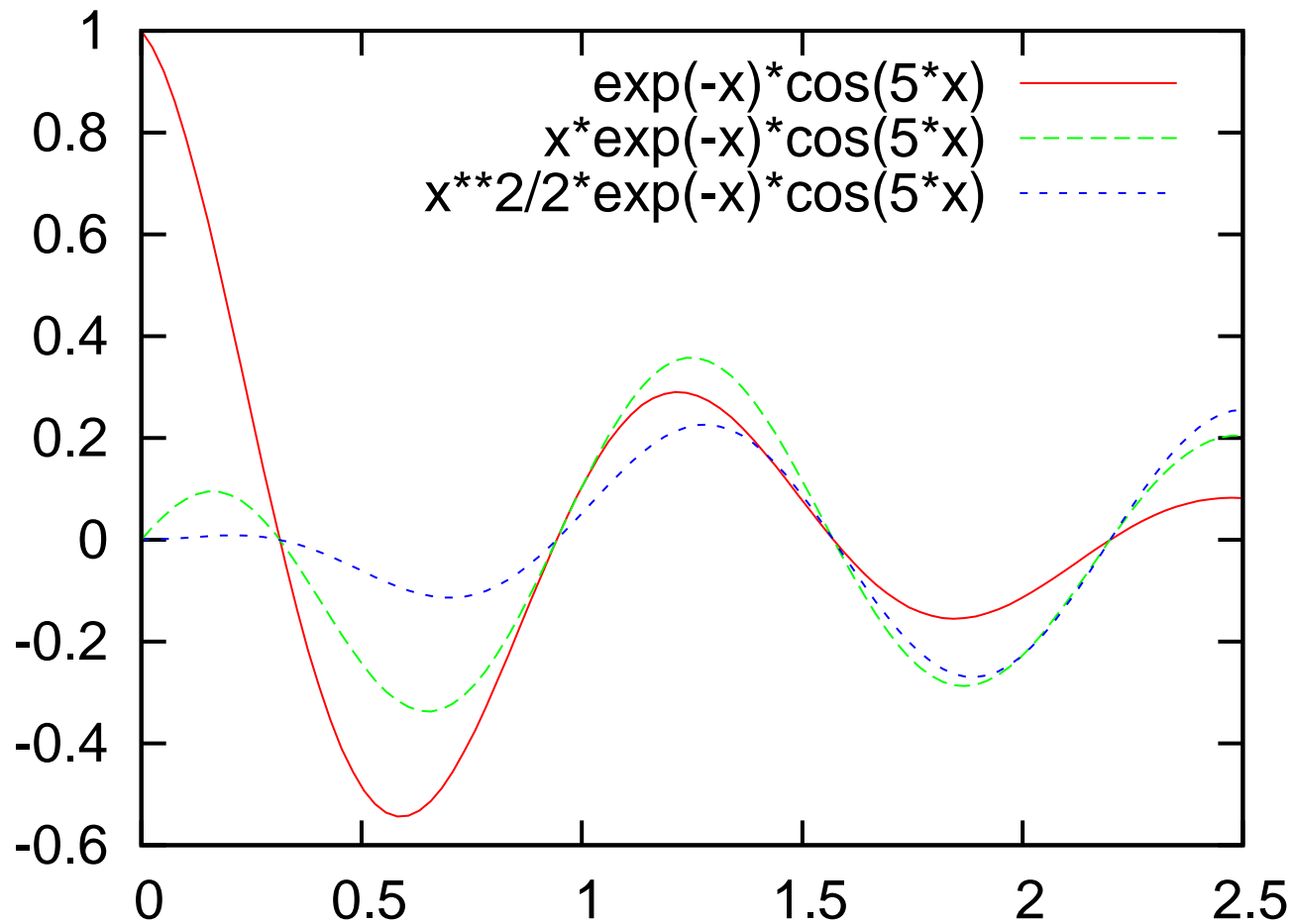
$$n_i = 3, \lambda_i = 1 + 5i \text{ (実部)}$$



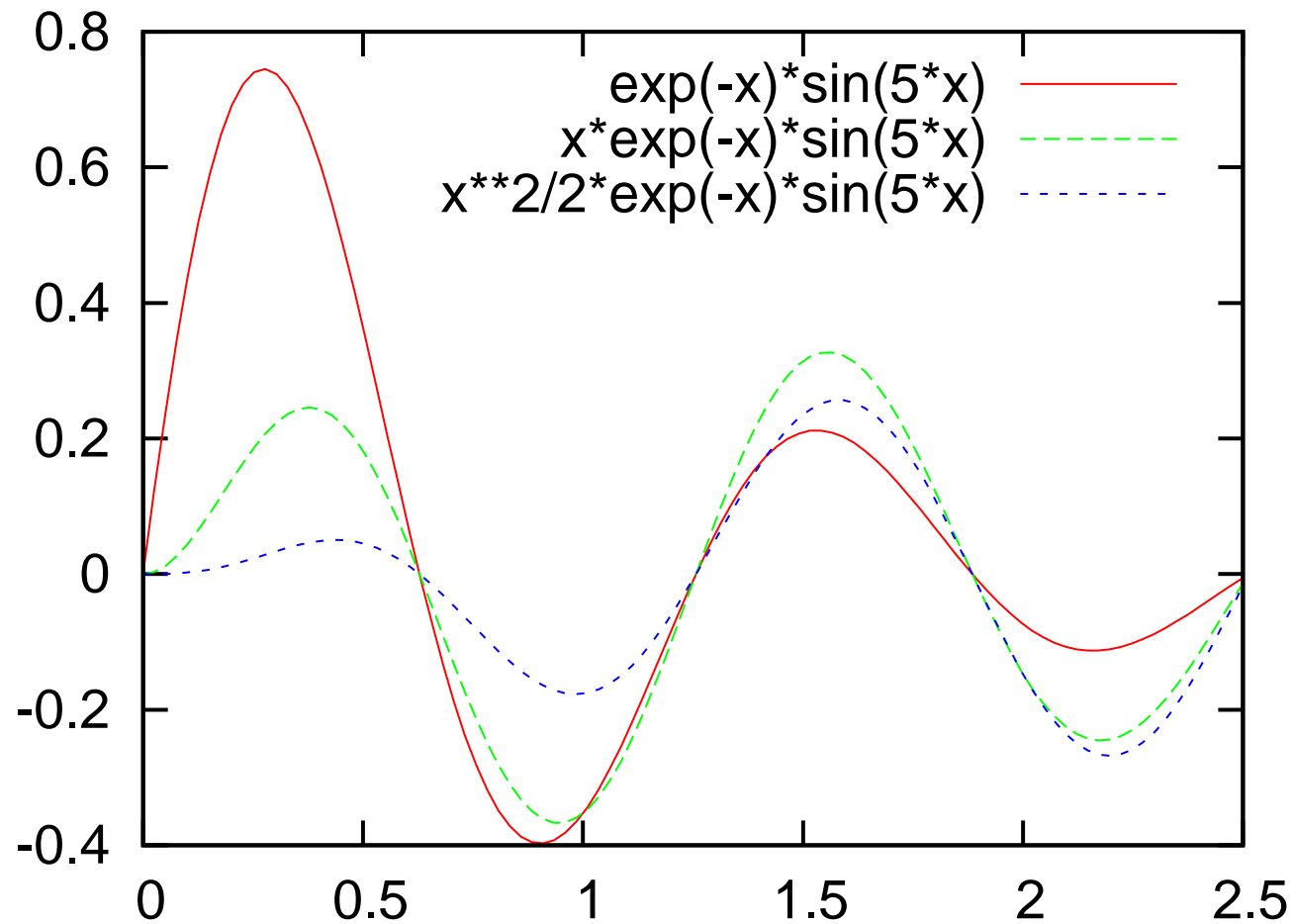
$$n_i = 3, \lambda_i = 1 + 5i \text{ (虚部)}$$



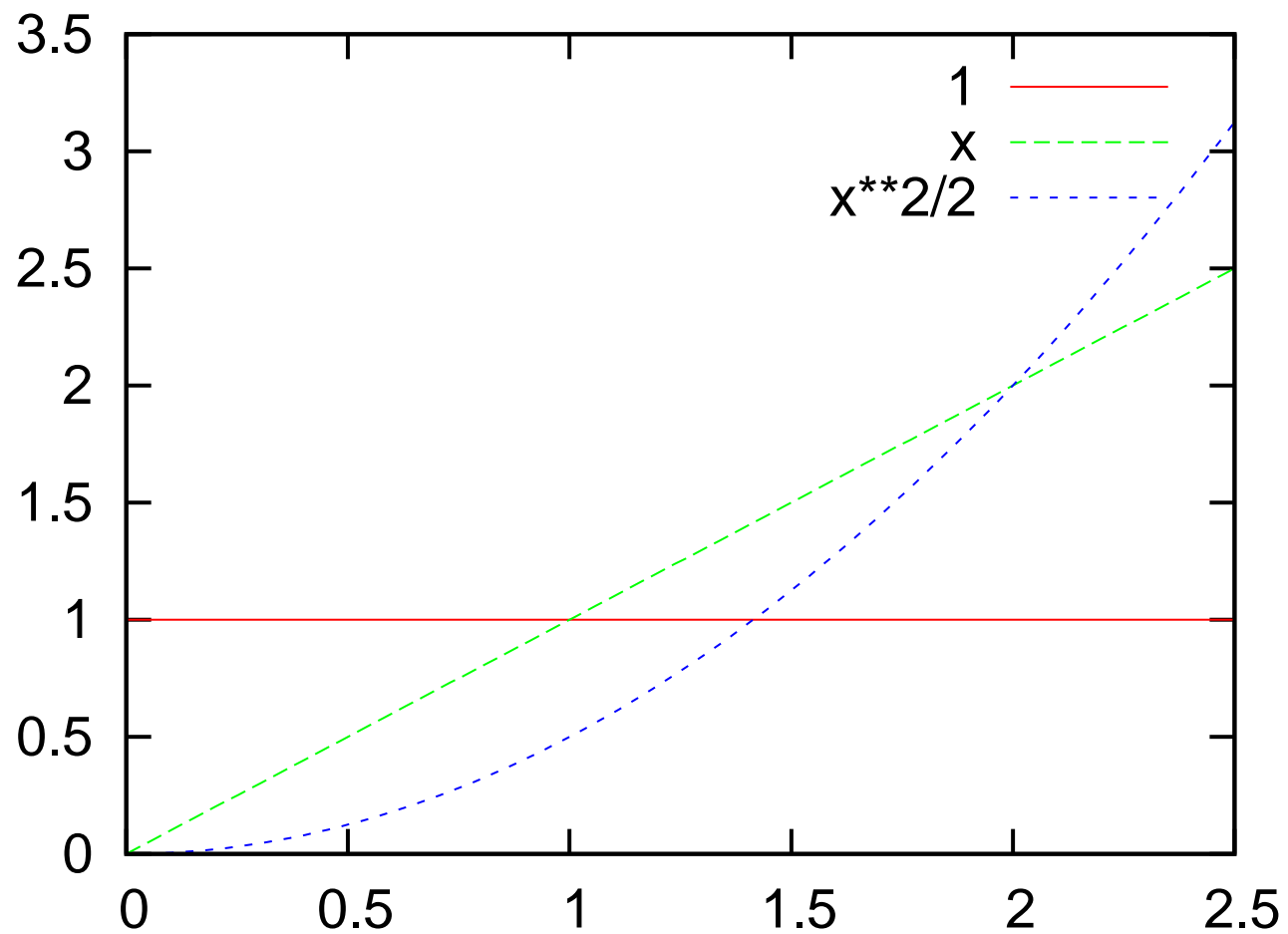
$$n_i = 3, \lambda_i = -1 + 5i \text{ (実部)}$$



$$n_i = 3, \lambda_i = -1 + 5i \text{ (虚部)}$$



$$n_i = 3, \lambda_i = 0$$



伝達関数とシステムの応答 (1)

- 次のような伝達関数で表現されたシステムを考える: $G(s) = g_0 \frac{(s - \beta_1) \cdots (s - \beta_m)}{(s - \alpha_1) \cdots (s - \alpha_n)}$; ただし分子と分母には共通項がないものとする.
- 代数学の基本定理により, 伝達関数の分母と分子は1次の項の積で表現されるので, それらの共通項を打ち消せば上記の形になる.

伝達関数とシステムの応答 (2)

- $G(s)$ は $n \geq m$ のときプロパー, $n > m$ のとき厳密にプロパーと言うのであった.
- $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ を $G(s)$ の極, $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ を $G(s)$ の零点, g_0 を $G(s)$ の高周波ゲインとこのであった.
- $n - m$ を $G(s)$ の**相対次数**という.

伝達関数とシステムの応答 (3)

- $G(s)$ が厳密にプロパー (相対次数が 1 以上) であるとき, $\lim_{|s| \rightarrow \infty} |G(s)| = 0$ であるから, 複素平面に無限遠点を付け加えて考えたとき, 無限遠点も $G(s)$ の零点であると解釈できる. これを $G(s)$ の**無限零点**という.

伝達関数とシステムの応答 (4)

- 伝達関数 $G(s)$ で記述されたシステムの入力 $u(t)$ に対する応答は, $u(t)$ の Laplace 変換を $U(s)$ としたとき, $G(s)U(s)$ を Laplace 逆変換することにより求められる.
- 伝達関数表現を用いるときには, システムの初期値は零に固定されていることに注意.

伝達関数とシステムの応答 (6)

- 伝達関数が有理関数で入力が多項式および指数関数と三角関数の組み合わせのときには、部分分数展開によって $G(s)U(s)$ の Laplace 逆変換を求めることができる。
- 入力としてよく使われる関数の Laplace 変換を次に示す。

関数

Laplace 変換

単位インパルス

$$\delta(t)$$

$$1$$

単位ステップ

$$1$$

$$\frac{1}{s}$$

多項式

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\frac{s}{1}$$

指数関数

$$e^{at}$$

$$\frac{1}{s-a}$$

指数関数+多項式

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at}$$

$$\frac{1}{(s-a)^n}$$

関数

Laplace 変換

正弦関数

 $\sin at$

$$\frac{a}{s^2 + a^2}$$

余弦関数

 $\cos at$

$$\frac{s}{s^2 + a^2}$$

双曲線関数

 $\sinh at$

$$\frac{s}{s^2 - a^2}$$

 $\cosh at$

$$\frac{s}{s^2 - a^2}$$

伝達関数とシステムの応答 (8)

- 単位インパルスは, Dirac のデルタ関数と同じものである.
- 正弦関数, 余弦関数, 双曲線関数の Laplace 変換は, 指数関数の Laplace 変換から代数的に求めることができる.

伝達関数とシステムの応答 (9)

- 伝達関数 $G(s) = g_0 \frac{(s - \beta_1) \cdots (s - \beta_m)}{(s - \alpha_1) \cdots (s - \alpha_n)}$ を持つシステムに $\prod_{1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_r \leq m} \frac{1}{s - \beta_{j_r}}$ なる入力が印加された場合 (ただし $r \leq m$), これらは伝達関数の分子で相殺され, 出力にはまったく現れない.

例

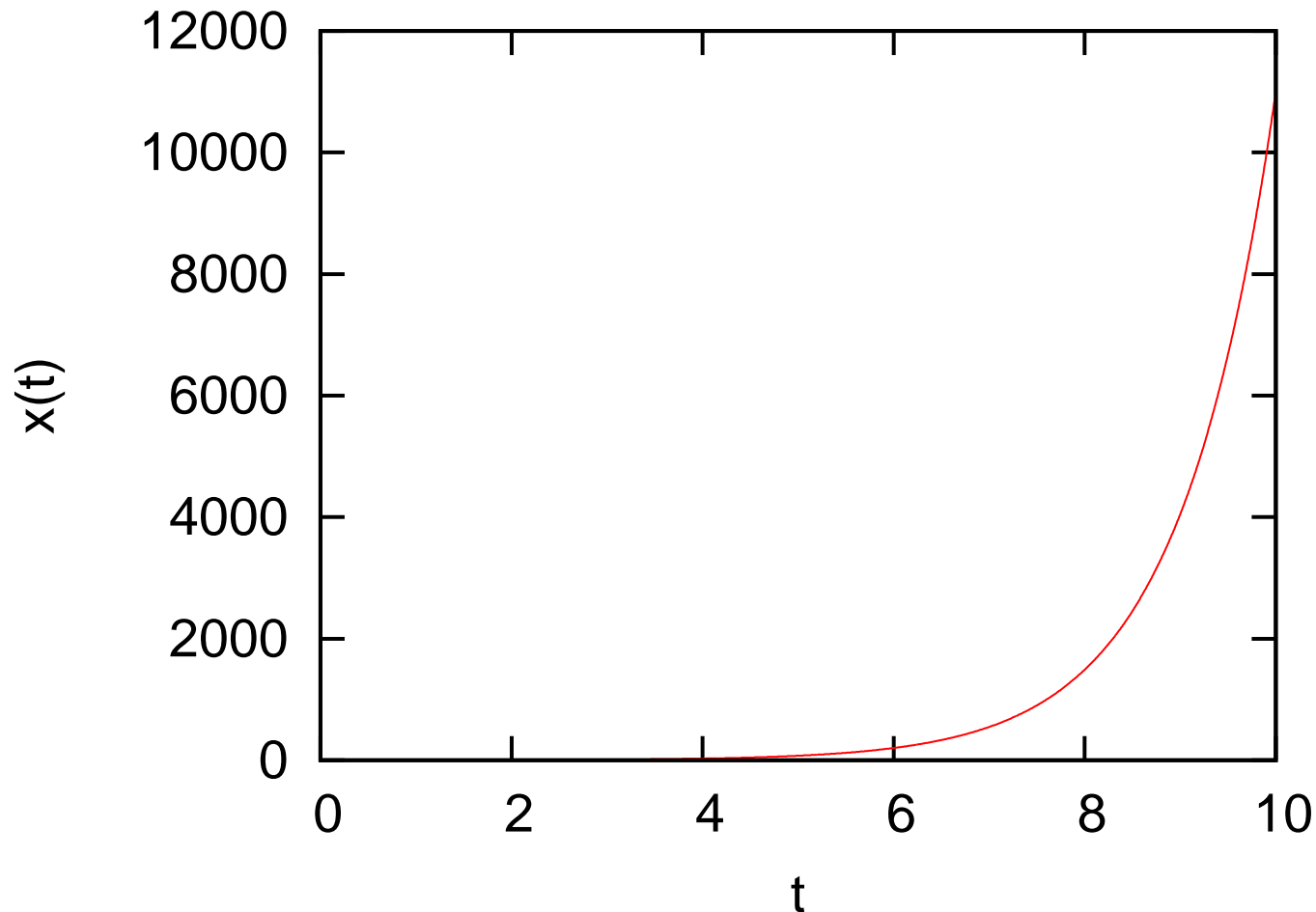
- $\dot{x} = -x + u, y = -2x + u$ というシステムを考える. 初期値を $x(0) = 0$ とおく. また, $u(t) = e^t$ とする.
- $X(s) = \frac{1}{s+1}U(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)} = \frac{1}{s^2-1}$ である.
- $Y(s) = U(s) - 2X(s) = \frac{1}{s-1}\left(1 - \frac{2}{s+1}\right) = \frac{1}{s-1}\left(\frac{s-1}{s+1}\right) = \frac{1}{s+1}$ だから, $y(t) = e^{-t}$ である.
入力 e^t は出力に現れない.

- $x(t)$ は無限大に発散するにもかかわらず, $y(t)$ が零に収束することに注意. このように, 「不安定零点」の取り扱いには注意が必要である.
- Scilab でこの微分方程式を解いてみる. 数値計算の誤差が問題となることに注意.

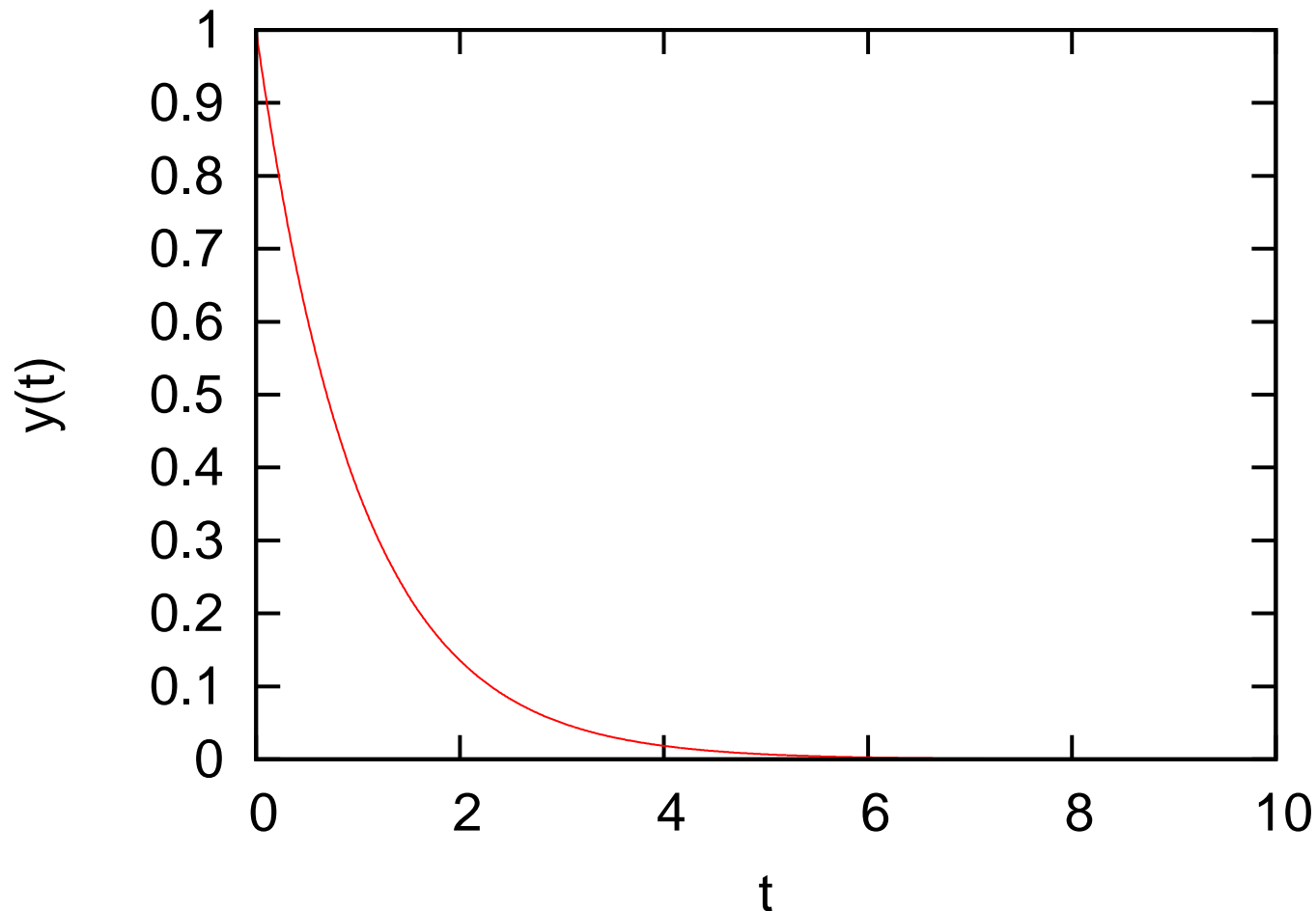
```
def f('dx=f(t,x)', 'dx=-x+exp(t)');  
x0=0; t0=0; t=0:.01:10;  
x=ode('rk', x0, t0, t, f);  
y=exp(t)-2*x;
```

- Runge-Kutta 法を使っていることに注意. デフォルトの解法だと正しい解が得られない. 厳密解は $y(t) = e^{-t}$ なので, 値が負になることはないのだが...

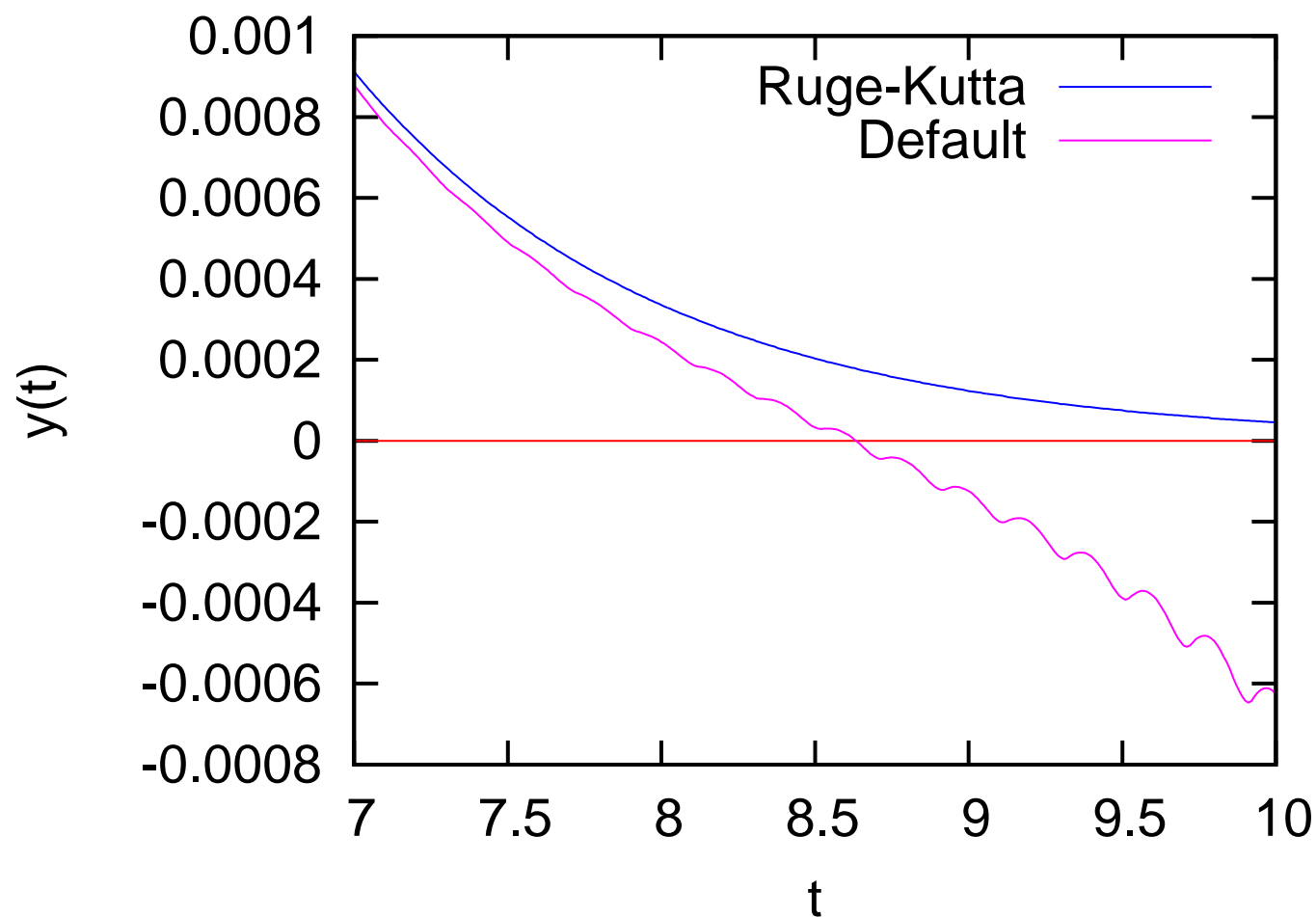
Runge-Kutta 法: $x(t)$ は発散するが...



Runge-Kutta 法: $y(t)$ は零に収束する



Runge-Kutta 法とデフォルト解法の比較



伝達関数とシステムの応答 (15)

- 多入力多出力系では, $\mathbf{G}(s) = (g_{ij}(s))$, $\mathbf{U}(s) = (U_1(s), \dots, U_m(s))^T$, $\mathbf{Y}(s) = (Y_1(s), \dots, Y_p(s))^T$ とすると, $Y_i(s) = \sum_{j=1}^m g_{ij}(s)U_j(s)$ だから, 各 j について $g_{ij}(s)U_j(s)$ を部分分数展開で計算してから, それらを足し合わせれば, $Y_i(s)$ が得られる.

伝達関数とシステムの応答 (16)

- 多入力多出力系でも $G(s)$ から 1 入力 1 出力系の極と零点に相当するものを定義することは可能.
- まず, m 行 n 列の伝達関数行列 $G(s)$ が, 次のように Smith-McMillan 標準形で表現されているものとする.

$$\mathbf{U}(s)\mathbf{G}(s)\mathbf{V}(s) = \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{\nu_1(s)}{\delta_1(s)} & & & \\ & \ddots & & \\ & & & \frac{\nu_r(s)}{\delta_r(s)} \\ \hline & & & \end{array} \right)$$

(Smith-McMillan 標準形; 空白の部分は零)

伝達関数とシステムの応答 (18)

- $\delta_1(s) \cdots \delta_r(s) = 0$ の根およびその重複度構造を, $G(s)$ の**伝達極**という.
- $\nu_1(s) \cdots \nu_r(s) = 0$ の根およびその重複度構造を, $G(s)$ の**伝達零点**という.
- $G(s) = 0$ となる s のことを, $G(s)$ の**ブロッキング零点**という.

伝達関数とシステムの応答 (19)

$G(s)$ の可制御かつ可観測な実現が $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$ であるとき、 $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$ のシステム極および不変零点が $G(s)$ の伝達極および伝達零点に一致することが示されるが、可制御性と可観測性はシステム工学 II の範囲なので深入りしない。

伝達関数とシステムの応答 (20)

一般には、 $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$ に対応する伝達関数行列が $G(s)$ であるとき、 $G(s)$ の伝達極および伝達零点は $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$ のシステム極および不変零点の一部になる。

phase portrait(1)

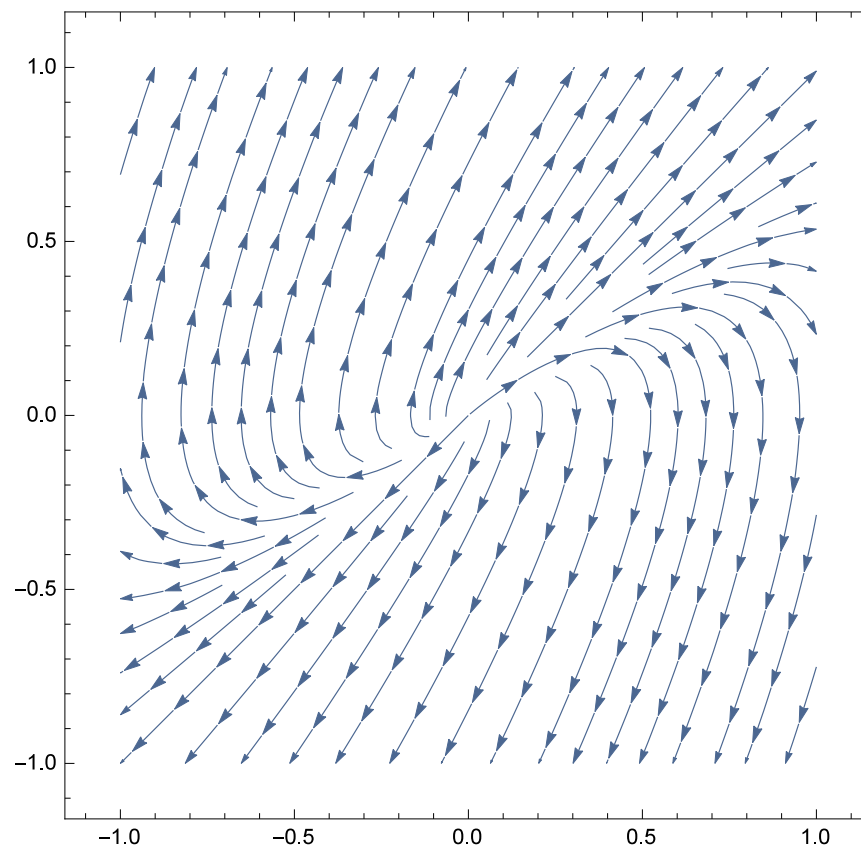
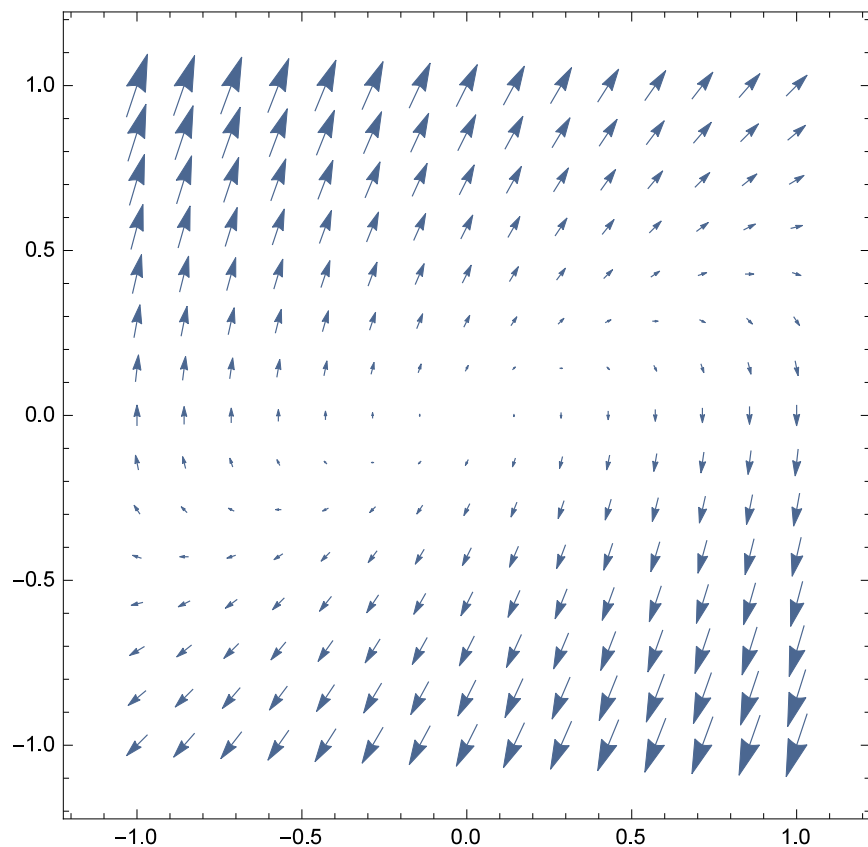
- 時不変な微分方程式 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ の解は, $\varphi(t, 0, \boldsymbol{x}_0)$ という形の時間の関数であり, (t, \boldsymbol{x}) 空間にそのグラフをプロットすることができるとは, そのグラフの \boldsymbol{x} 空間への射影を, このシステムの **phase portrait** という.
- phase portrait という言葉は上記以外の意味で使われることもあるので注意.

phase portrait(2)

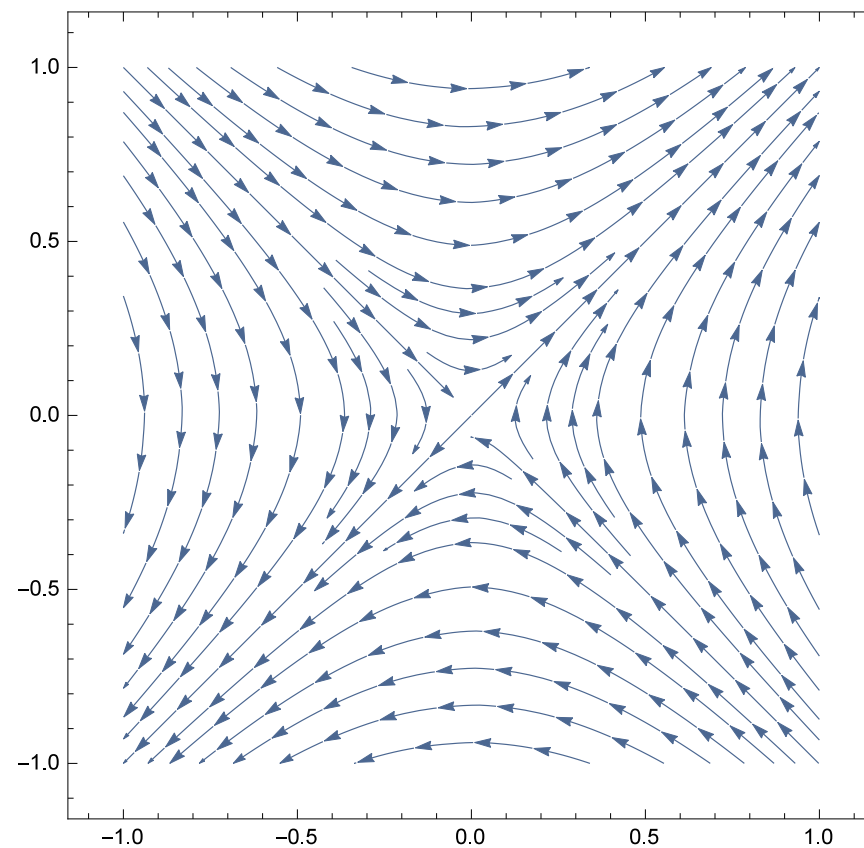
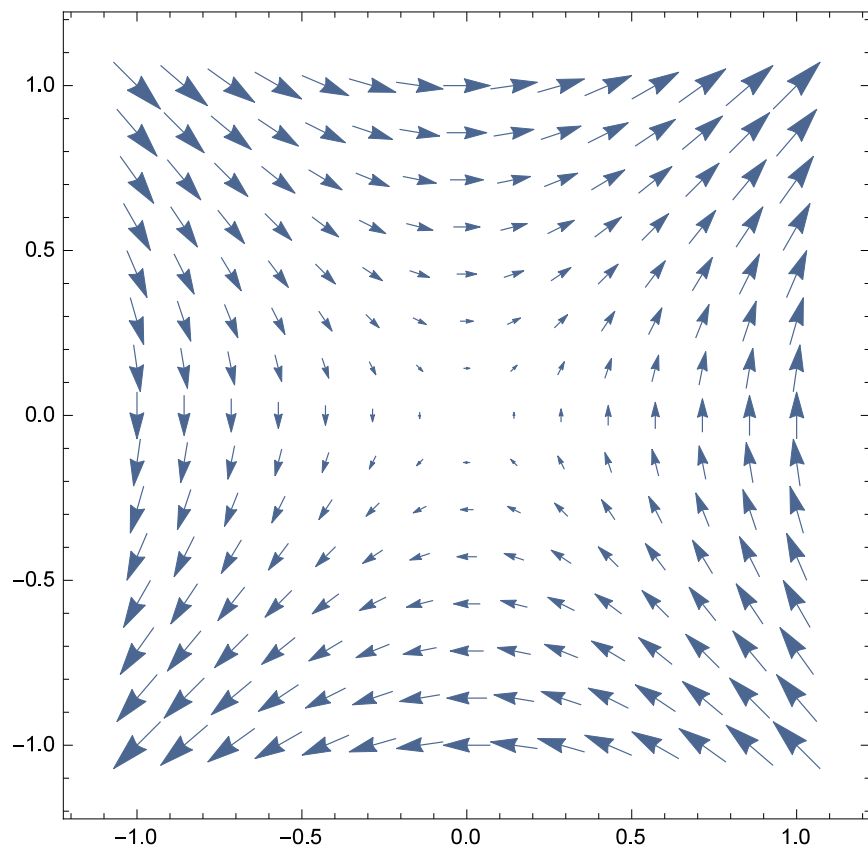
- 線形時不変システムを固有値で分類すると…
 - ▷ 固有値の実部が正 vs 固有値の実部が負
 - ▷ 固有値が実数 vs 固有値が共役複素数
- よって、2次元のシステムの解を分析することで、 n 次元のシステムの解の特徴をある程度理解できる。

phase portrait(4)

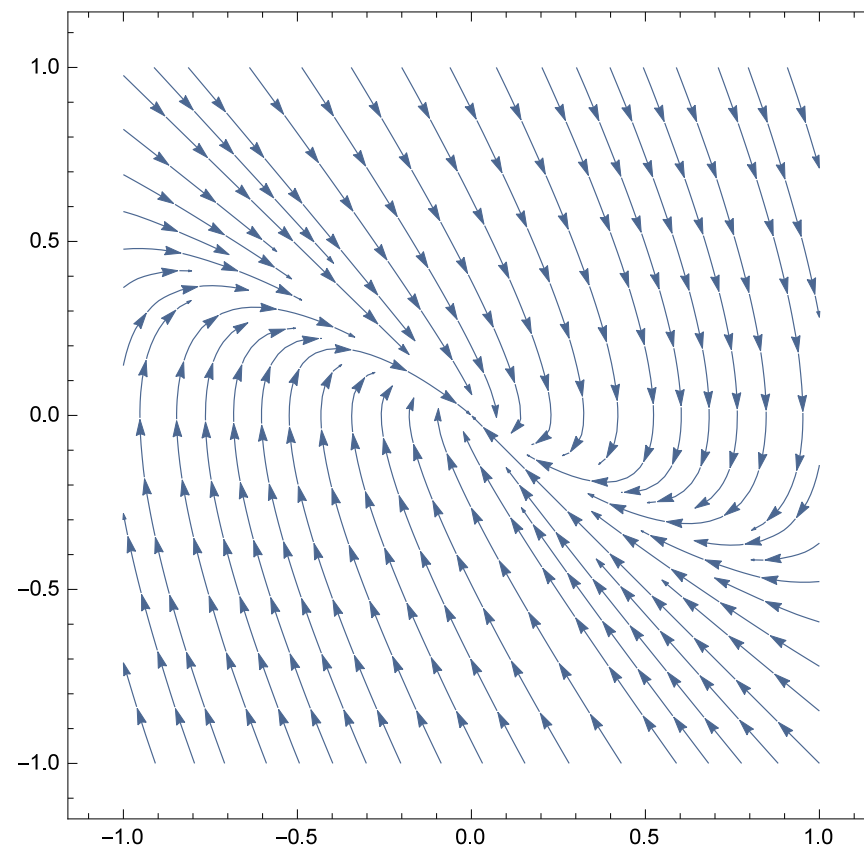
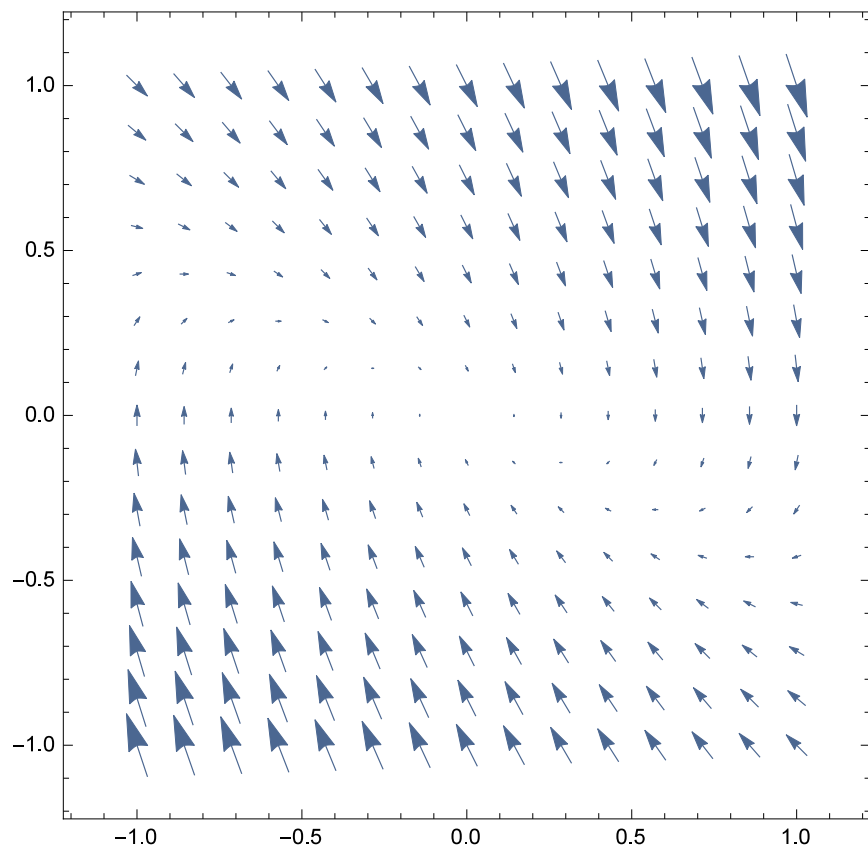
- $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とし, (a_1, a_2) を変えて (固有値が変わる), そのベクトル場と phase portrait(流線) をプロットする.
- Mathematica の組み込み関数 VectorPlot と StreamPlot を利用.



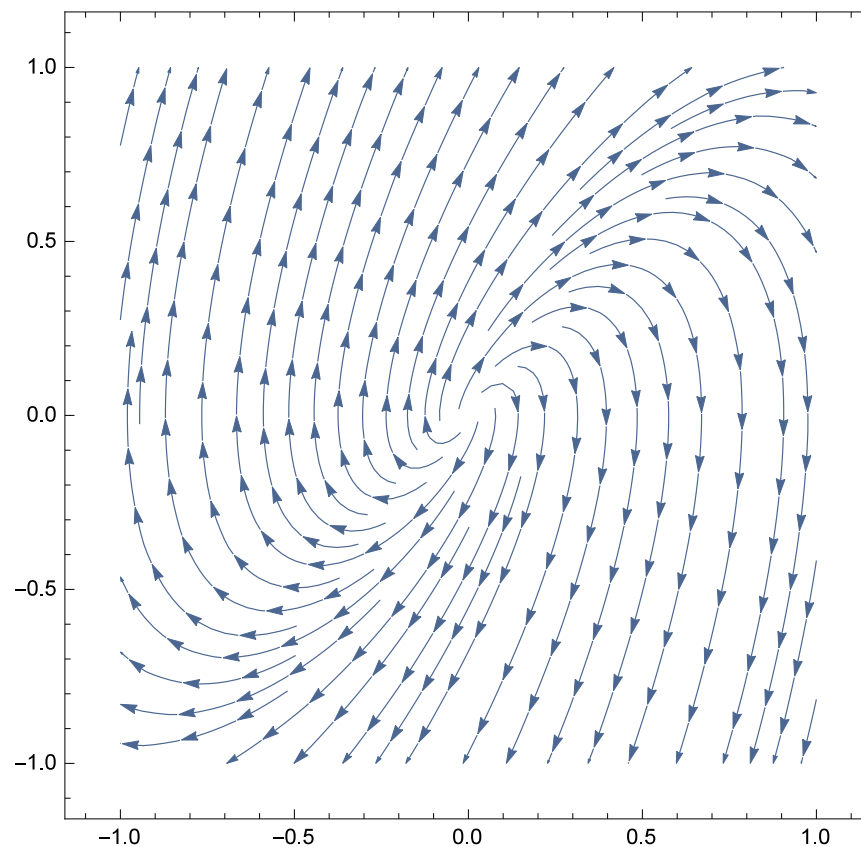
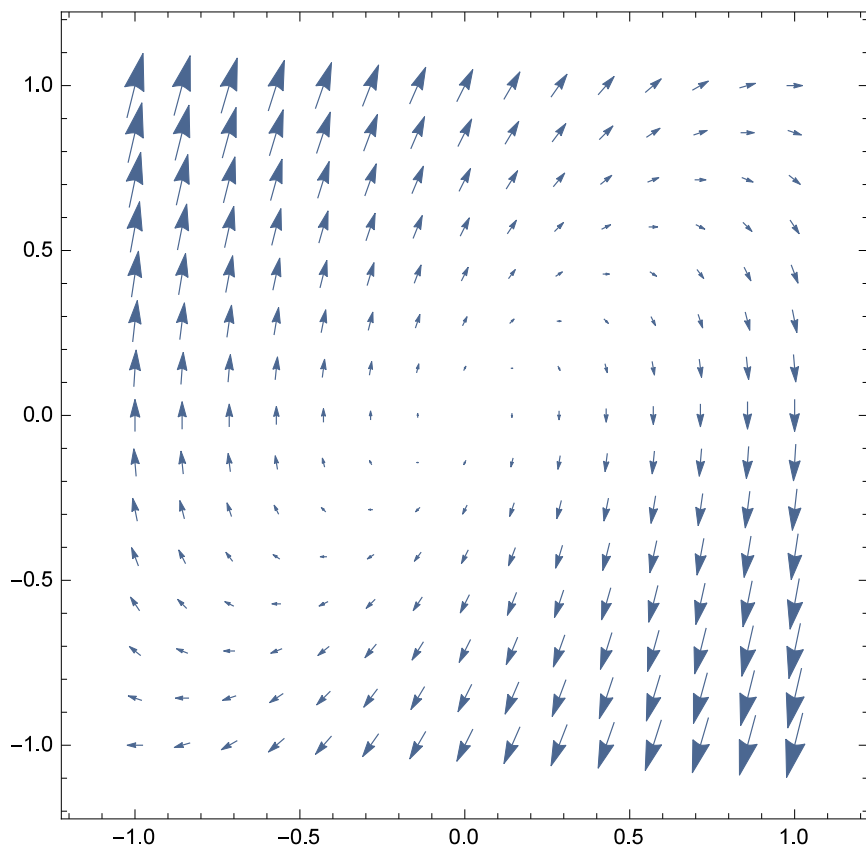
固有値が 1 と 1 (重根, 2 個とも正)



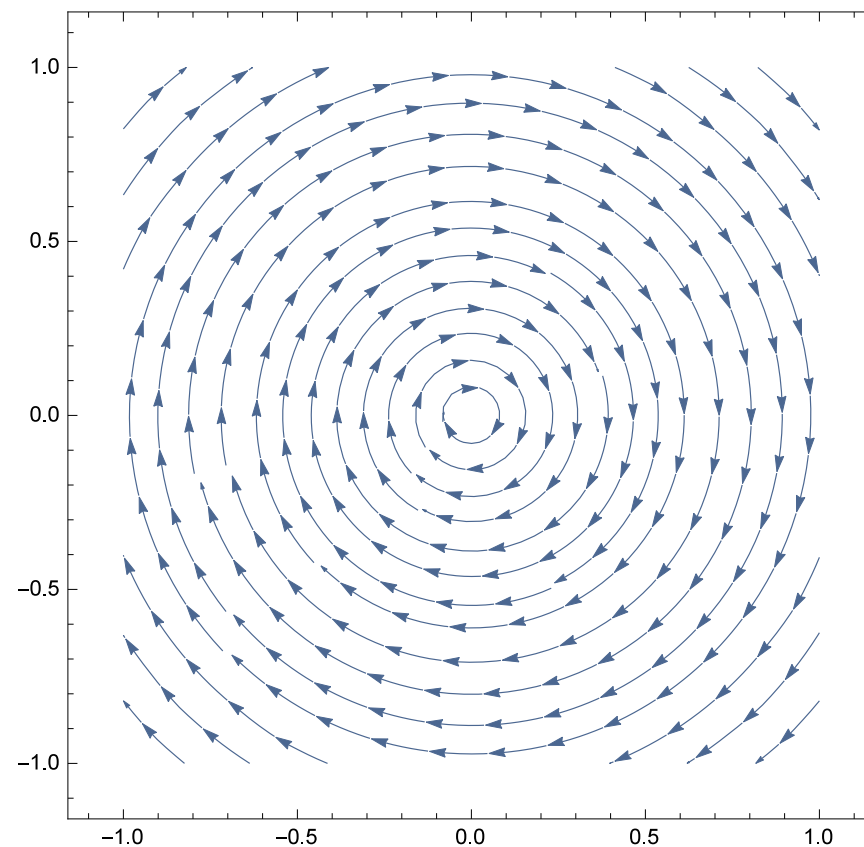
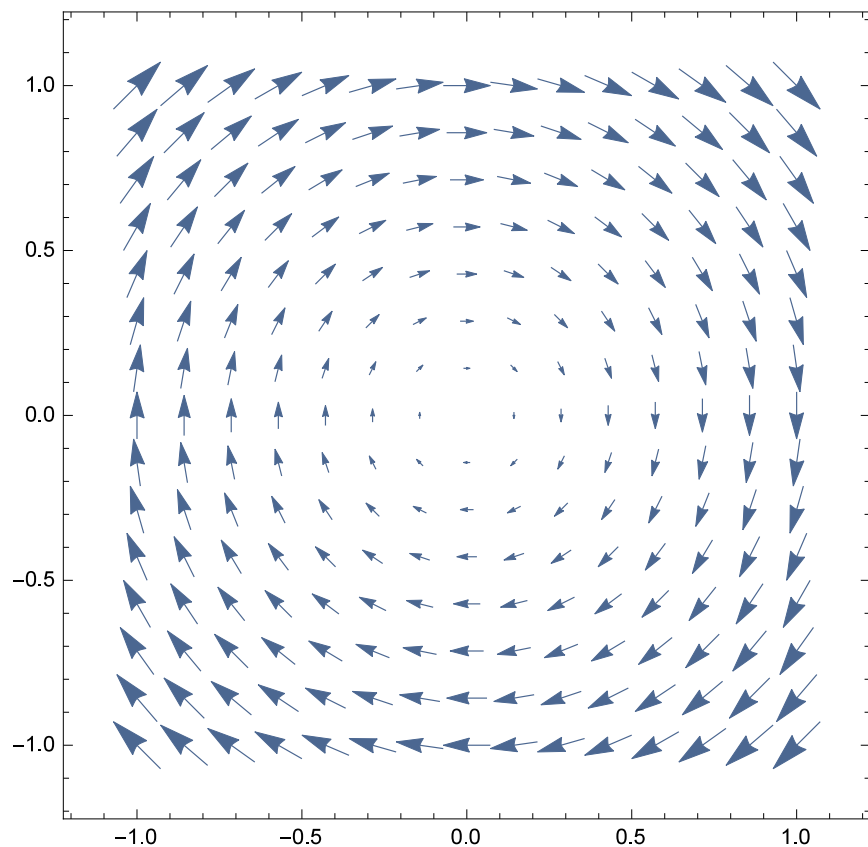
固有値が 1 と -1 (1 個が正, 1 個が負)



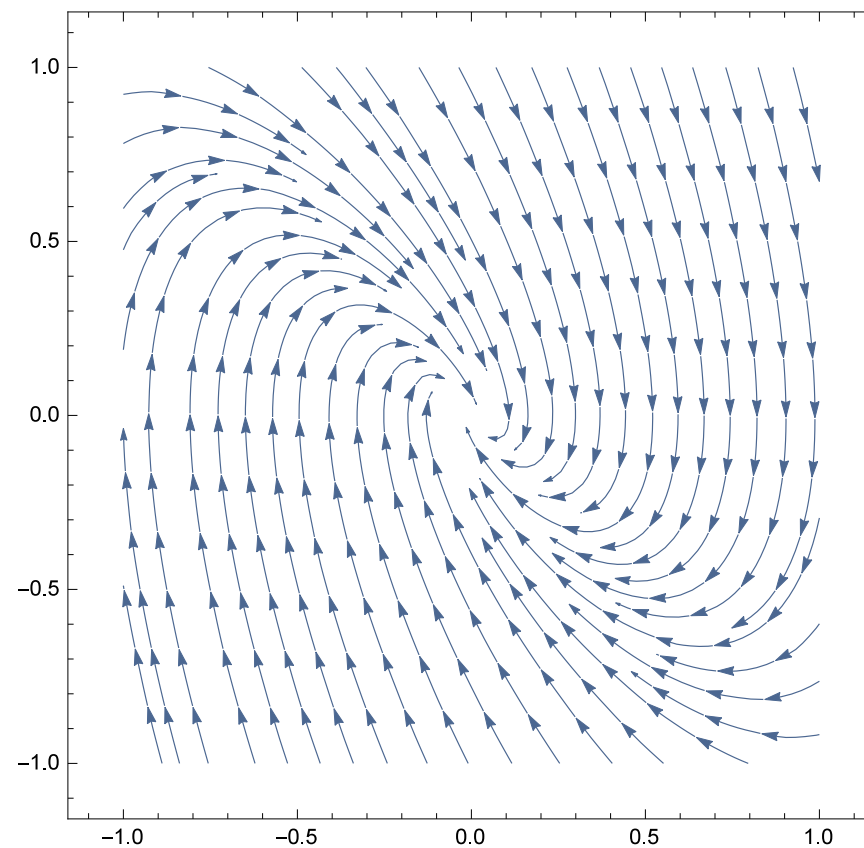
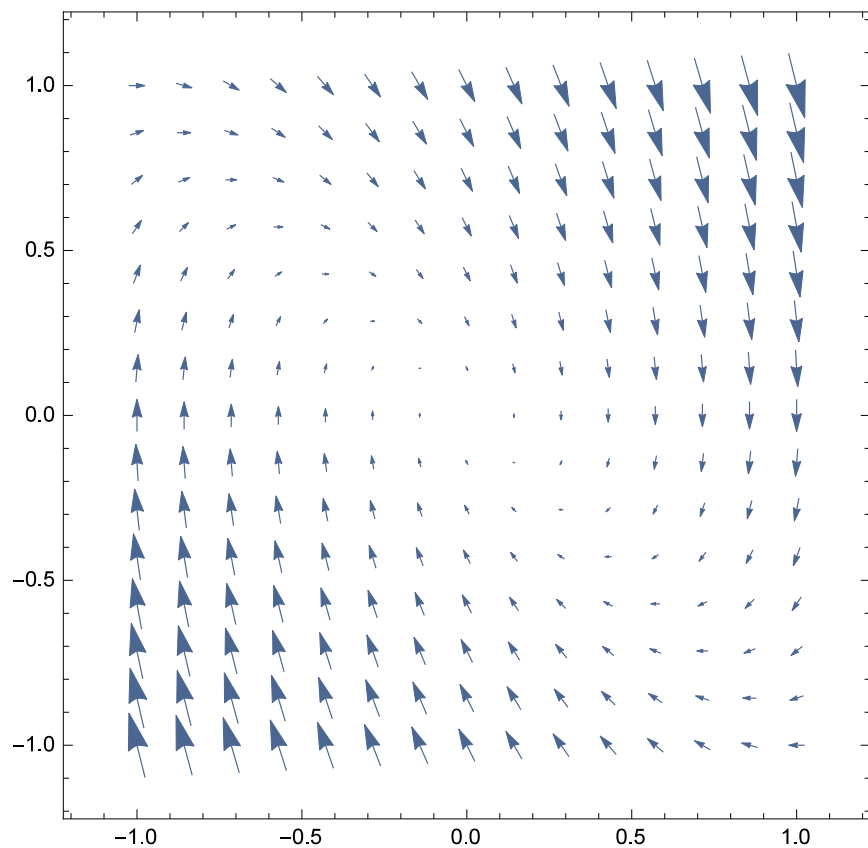
固有値が -1 と -1 (重根, 2 個とも負)



固有値が $1 - i$ と $1 + i$ (共役, 実部が正)



固有値が $-i$ と i (共役, 実部が零)



固有値が $-1 - i$ と $-1 + i$ (共役, 実部が負)

参考文献

- 須田, 線形システム理論, 朝倉書店, 1993
- 前田, 線形システム, 朝倉書店, 2001
- C. Robinson, Dynamical Systems, CRC Press, 1995.