システム工学 I
第 10 回
環上の線形代数

ベクトル空間とその一般化 (1)

体 $\mathbb{K}$ のベクトル空間 V とは $\cdots$

1. V は $\mathbf{0}$ という特別な元を含む集合
2. 加算 $+ : V \times V \to V$ が定義され，次の性質を満たす：i)$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \in V$, $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$ ii) $\forall \boldsymbol{x} \in V$, $\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, iii) $\forall \boldsymbol{x} \in V$, $\exists(-\boldsymbol{x}) \in V$, $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$, iv) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$

ベクトル空間とその一般化 (2)

3. スカラー倍 $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ が定義され (通常は $\cdot$ は省略される), 次の性質を満たす: i) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \boldsymbol{x} \in V, \lambda \cdot (\mu \cdot \boldsymbol{x}) = (\lambda\mu) \cdot \boldsymbol{x}$, ii)$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \boldsymbol{x} \in V, (\lambda + \mu) \cdot \boldsymbol{x} = \lambda \cdot \boldsymbol{x} + \mu \cdot \boldsymbol{x}$, iii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V, \lambda \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda \cdot \boldsymbol{x} + \lambda \cdot \boldsymbol{y}$, iv) 1 を体 $\mathbb{K}$ の単位元としたとき, $\forall \boldsymbol{x} \in V$, $1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

ベクトル空間とその一般化 (3)

- 以上から「スカラー倍」の部分を除いたものを加法群という.
- 今回の講義では, 伝達関数行列を取り扱うが…
- 議論の過程で多項式をスカラーとして扱う必要があり, 「スカラーの割り算ができる」という条件に抵触してしまう.

ベクトル空間とその一般化 (4)

- スカラーに関する要求事項から「除算」を除きたい.
- 加減乗算が定義された数学的対象を**環**という.
- 環の要素とのスカラー倍が定義された加法群のことを**加群**という.

ベクトル空間とその一般化 (5)

- この講義では体 $\mathbb{K}$ を 1 変数多項式環あるいは有理式環で置き換えれば十分で, 環や加群の一般論は必要ではないので, 深入りせず, 環および加群の定義のみを述べる.

環 (1)

- R を加法群とする.
- R に 2 項演算 $\cdot : R \times R$ が定義され, 次の性質を満たすとき, R を環という: i) $\forall x, y, z \in R$, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$, ii) $\forall x, y, z \in R$, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, iii) $\forall x, y, z \in R$, $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

環 (2)

- $+$ を加算, $\cdot$ を乗算と呼ぶ. 乗算の記号は曖昧さがないときは省略される.
- $\exists u \in R, \forall x \in R, ux = xu = x$ となるとき, u を (乗法) 単位元と呼ぶ. 単位元を持つ環を, ただの環と区別して単位的環と呼ぶ.
- 環の定義に単位元の存在を含めることもある.

環 (3)

- $\forall x, y \in R,\ xy = yx$ となるとき, R を可換環という.
- R が単位的可換環で, $xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$ となるとき, R を整域という.
- R が可換環で, $1 \neq 0$ であり, $\forall x \neq 0,\ \exists y,\ xy = 1$ となるとき, R を体と呼ぶ.

環 (4)

- $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ は体の例である.
- $\mathbb{Z}$ は体でない単位的可換環の例である. $m, n \in \mathbb{Z}$, $mn = 0 \Rightarrow m = 0 \vee n = 0$ だから, $\mathbb{Z}$ は整域である.
- $\mathbb{Q}[x]$ を有理数を係数として持つ有限次元多項式全体とすると, $\mathbb{Q}[x]$ は整域となる.

環 (5)

- $n \in \mathbb{N}$ に対し, 体 $\mathbb{K}$ の元から成る n 行 n 列の行列全体が作る集合は, 行列の和および積に関して環である. これは非可換環である.
- 同様に, 可換環 R の元から成る n 行 n 列の行列全体が作る集合も行列の和および積に関して環である.

加群 (1)

- M を加法群, R を単位元を持つ環とする.
- 集合 $R \times M$ において, $\cdot : R \times M \to M$ が定義され, 次の性質を持つとき, $(M, \cdot)$ を左 R 加群という. i) $\forall r \in R, \forall x, y \in M, r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$, ii) $\forall r, s \in R, \forall x \in M, (r + s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot x$, iii) $\forall r, s \in R, \forall x \in M, (r \cdot (s \cdot x)) = (rs) \cdot x$, iv) $\forall x \in M, 1 \cdot x = x$.

加群 (2)

- 集合 $R \times M$ において, $\cdot : M \times R \to M$ が定義され, 次の性質を持つとき, $(M, \cdot)$ を右 R 加群という. i) $\forall r \in R, \forall x, y \in M, (x + y) \cdot r = x \cdot r + y \cdot r$, ii) $\forall r, s \in R, \forall x \in M, x \cdot (r + s) = x \cdot r + x \cdot s$, iii) $\forall r, s \in R, \forall x \in M, ((m \cdot r) \cdot s) = m \cdot (rs)$, iv) $\forall x \in M, x \cdot 1 = x$.

加群 (3)

- 要素が有理式から成る行列 (伝達関数行列) を考え, スカラーとして s の多項式を考えた場合, 数学的には我々はベクトル空間ではなく加群を取り扱っていることになるのであるが,「加群」という舞台を意識する必要が生じることは稀.
- この講義では加群の一般論には立ち入らない.

多項式行列 (1)

- $\mathbb{K}$ を実数体あるいは複素数体, $\mathbb{K}[x]$ を $\mathbb{K}$ の要素を係数とする 1 変数多項式全体の集合とし, $M(m, n; \mathbb{K}[x])$ を, 各要素が x の ($\mathbb{K}$ 係数) 多項式である m 行 n 列の行列全体とする. $\boldsymbol{A}(x) \in M(m, n; \mathbb{K}[x])$ を多項式行列という.
- $M(m, n; \mathbb{K}[x])$ は $\mathbb{K}[x]$ 加群であるが, この事実を今後使うことはない.

多項式行列 (2)

- $\mathbb{K}[x]$ はEuclid整域である．すなわち，$f(x) \in \mathbb{K}[x]$ と $g(x) \in \mathbb{K}[x]$ が与えられているとき，$f(x)$ と $g(x)$ をともに割り切るモニックな多項式の中で次数が最大のもの (これを**最大公約多項式**といい，gcd (f, g) であらわす) を，Euclidの互除法によって求めることができる．

多項式行列 (3)

- $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$ に対し, $f(x)$ と $g(x)$ によってともに割り切れるモニックな多項式の中で次数が最小のものを**最小公倍多項式**といい, $\mathrm{lcm}\,(f, g)$ と書く.
- $d(x) = \gcd\,(f, g)$, $l(x) = \mathrm{lcm}\,(f, g)$ とすると, $d(x)l(x) = f(x)g(x)$ である.

多項式行列 (4)

- $\boldsymbol{G}(s) = (g_{ij}(s))$ を m 行 n 列の伝達関数行列とし, $g_{ij}(s) = n_{ij}(s)/d_{ij}(s)$ とする． $D(s) = \operatorname{lcm}_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} d_{ij}(s)$ とすると, $D(s)\boldsymbol{G}(s)$ は多項式行列である.
- 伝達関数行列の解析の際には, 上記のように多項式行列に帰着させることもあれば, 有理式のまま取り扱うこともある.

多項式行列 (5)

- $\boldsymbol{A}(x) \in M(n, n, \mathbb{K}[x])$ の行列式が非零のとき, $\boldsymbol{A}(x)$ を要素が有理式である行列と解釈すると, その逆行列を余因子行列と行列式により書き下すことができる.
- $\det \boldsymbol{A}(x)$ が零でない定数であれば (このような行列をユニモジュラという), 逆行列も多項式行列となる.

多項式行列 (6)

- $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ に対する行基本変形と同様に, $\boldsymbol{A}(x) \in M(m,n,\mathbb{K}[x])$ に対する行基本変形を定義することができる:

1. ある行に零でない定数を掛ける
2. 2 個の行を入れ換える
3. ある行に他の行の多項式倍を掛ける

多項式行列 (7)

- 同様に, 列基本変形を定義することができる.
- $\mathbb{K}^{m \times n}$ との違いは, 第 3 番目の基本変形に限り, 倍率として多項式倍が許されること.
- 基本変形は基本行列を行列に左あるいは右から掛けることに対応し, 基本行列はユニモジュラである.

多項式行列 (8)

- 第 1 番目と第 2 番目の基本変形に対応する基本行列は $\mathbb{K}^{m\times n}$ と同一.
- 第 3 番目の基本変形に対応する基本行列では, 非対角要素として, スカラーだけでなく多項式も許容される.

例

基本行列 1: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

基本行列 2: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

基本行列 3: $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1+x^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^5 & 1 \end{pmatrix}$

多項式行列 (10)

- Eulcid の互除法と基本変形の関係を調べる.
- 2 個の多項式 $a(x)$ と $b(x)$(ただし $a(x)$ の方が高次) に対し, $a(x) = b(x)q(x) + r(x)$ とすると, Euclid の互除法は $(a(x), b(x))$ を $(b(x), r(x))$ に変える演算だが, 実はこれは $(a(x), b(x))^T$ に対する行基本変形になっている.

Euclid の互除法を行列の形で書いてみると …

$$\begin{pmatrix} r(x) \\ b(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -q(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(x) \\ b(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b(x) \\ r(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(x) \\ b(x) \end{pmatrix}$$

よって $\begin{pmatrix} b(x) \\ r(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -q(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(x) \\ b(x) \end{pmatrix}$

多項式行列 (12)

- $\boldsymbol{a}(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x))^T \in M(n, 1, \mathbb{K}[x])$ とし, $d(x) = \gcd(a_1(x), \ldots, a_n(x))$ を $\boldsymbol{a}(x)$ の全要素の最大公約多項式とすると, 先に述べた事実により, あるユニモジュラ行列 $\boldsymbol{U}(x)$ が存在して, $\boldsymbol{U}(x)\boldsymbol{a}(x) = \begin{pmatrix} d(x) \\ \mathbf{0}_{n-1} \end{pmatrix}$ となる.

多項式行列 (13)

- $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{A}(x) \in M(m, n; \mathbb{K}[x])$ を，都合が良い「標準形」に変形することを考える.
- $\boldsymbol{A}(x)$ の非零要素の中で次数が最低のものをひとつ選び，行および列基本変形によって，その要素を $(1,1)$ 要素に移動する．得られた行列を $\boldsymbol{A}^{(1)}(x) = (a_{ij}^{(1)}(x))$ とする．そして，$\boldsymbol{A}^{(1)}(x)$ に対して，以下の操作を繰り返す.

1. 行基本変形により, $a_{j1}^{(1)}(x)$ を, $a_{11}^{(1)}(x)$ による $a_{j1}^{(1)}(x)$ の剰余に変える.
2. 列基本変形により, $a_{1j}^{(1)}(x)$ を, $a_{11}^{(1)}(x)$ による $a_{1j}^{(1)}(x)$ の剰余に変える.
3. $j \neq 1$ に対し, $a_{j1}^{(1)}(x)$ と $a_{1j}^{(1)}(x)$ がすべて零であれば終了. そうでなければ, 行および列基本変形により, 第 1 行および第 1 列の全要素の中で次数が最低のものを第 $(1,1)$ 要素に移して最初のステップに戻る.

多項式行列 (15)

- 上述のループを 1 回実行するごとに, $a_{11}^{(1)}(x)$ の次数は 1 以上低下するから, 上記のループは有限回で終了し, $j \neq 1$ に対し, $a_{j1}^{(1)}(x)$ と $a_{1j}^{(1)}(x)$ はすべて零となる: $\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)}(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & * \end{pmatrix}$
- $*$ の部分に帰納法を適用すると $\cdots$

多項式行列 (16)

- $\boldsymbol{A}(x)$ は行および列基本変形によって
$$\begin{pmatrix} \mathrm{diag}(d_1(x), \ldots, d_r(x)) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$
という形に変換されることがわかる．さらに, $d_i(x)$ はモニックにできる ($1 \leq i \leq r$).
- $\mathrm{diag}(d_1(x), \ldots, d_r(x))$ をさらに簡単にすることを考える．

多項式行列 (17)

- $\gcd(d_1(x), d_2(x)) = g(x)$ とすると, ある $p_1(x)$ と $p_2(x)$ が存在し, $d_1(x)p_1(x) + d_2(x)p_2(x) = g(x)$ となることが証明できる.
- $d_1(x) = g(x)q_1(x)$, $d_2(x) = g(x)q_2(x)$, $l(x) = \mathrm{lcm}(d_1(x), d_2(x))$ とする. $l(x) = d(x)q_1(x)q_2(x)$ である.

$$\begin{pmatrix} 1 & p_2(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1(x) & 0 \\ 0 & d_2(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & p_1(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1(x) & g(x) \\ 0 & d_2(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q_2(x) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1(x) & g(x) \\ 0 & d_2(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q_1(x) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & g(x) \\ -l(x) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & d(x) \\ -l(x) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d(x) & 0 \\ 0 & l(x) \end{pmatrix}$$

よって, $\begin{pmatrix} d_1(x) & 0 \\ 0 & d_2(x) \end{pmatrix}$ は, 基本変形により, $\begin{pmatrix} g(x) & 0 \\ 0 & l(x) \end{pmatrix}$ という形に変形でき, $g(x)$ は $l(x)$ を割り切る.

多項式行列 (19)

- $g(x) = \gcd(d_1(x), \dots, d_r(x))$ とおき，帰納法により，$\mathrm{diag}(d_1(x), \dots, d_r(x))$ が，基本変形により，$\mathrm{diag}(g(x), l_2(x), \dots, l_r(x))$ という形に変形でき，かつ $\forall k \geq 2$，$g(x) | l_k(x)$ となることを示す ($g(x) | l_k(x)$ は $g(x)$ が $l_k(x)$ を割り切ることを意味する記号).
- $g_k(x) = \gcd(d_1(x), \dots, d_k(x))$ とおく.

- $\mathrm{diag}(d_1(x), \ldots, d_k(x))$ を基本変形して $\mathrm{diag}(g_k(x), l_2(x), \ldots, l_k(x))$ が得られ, かつ $\forall j,\ g_k(x)|l_j(x)$ と仮定する.
- 先に述べた結果より, $\mathrm{diag}(g_k(x), d_{k+1}(x))$ は, 基本変形により, $\mathrm{diag}(\mathrm{gcd}(g_k(x), d_{k+1}(x)), l_{k+1}(x))$ という形に変形される. $\mathrm{gcd}(g_1(x), \ldots, g_k(x), d_{k+1}(x)) = \mathrm{gcd}(g_k(x), d_{k+1}(x))$ $l_{k+1}(x)$ は $g_{k+1}(x)$ で割り切れるから, ここで帰納法を使うと ⋯
- $\mathrm{diag}(d_1(x), \ldots, d_{k+1}(x))$ を基本変形して $\mathrm{diag}(g_{k_1}(x), l_2(x), \ldots, l_k(x), l_{k+1}(x))$ という形になり, $g_{k+1}(x)|l_{k+1}(x)$ で, かつ $\forall j \le k,\ g_k(x)|l_j(x)$ で $g_{k+1}(x)|g_k(x)$ だから, $\forall j \le k,\ g_{k+1}(x)|l_j(x)$

多項式行列 (21)

- $k=r$ のとき $\mathrm{diag}(g(x), l_2(x), \ldots, l_r(x))$, $\forall j \geq 2$, $g(x)|l_j(x)$ が得られる.
- $g^{(2)}(x) = \gcd(l_2(x), \ldots, l_r(x))$ とすると, $g(x)|g^{(2)}(x)$ で, 同様の計算を $\mathrm{diag}(l_2(x), \ldots, l_r(x))$ に適用すると, $\mathrm{diag}(g(x), g^{(2)}(x), l_3^{(2)}(x), \ldots, l_r^{(2)}(x))$ という形になり, $\forall j \geq 3$, $g^{(2)}(x)|l_j^{(2)}(x)$ が得られる.
- 同様の計算を, 第 r 回目まで繰り返す.

多項式行列 (22)

- この結果をまとめると, $\boldsymbol{A}(x)$ は, 基本変形により, $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{diag}(g_1(x), \ldots, g_r(x)) & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right)$, $\forall i,\ g_i(x)$ はモニック, $g_i(x) | g_{i+1}(x)$, という条件を満たす行列に変形できることがわかる. この形を $\boldsymbol{A}(x)$ の **Smith 標準形**あるいは**単因子標準形**という.

Smith 標準形は $\boldsymbol{A}(x)$ から一意的に定まる．これは次のようにして示す．m 行 n 列の行列 $\boldsymbol{A}(x)$ から作った k 次の正方行列 $\begin{pmatrix} a_{i_1 j_1}(x) & \cdots & a_{i_1 j_k}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k j_1}(x) & \cdots & a_{i_k j_k}(x) \end{pmatrix}$ (ただし $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq m$, $1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_k \leq n$) の行列式を $\boldsymbol{A}(x)$ の (ひとつの)k 次小行列式といい, k 次小行列式すべての最大公約多項式を $\boldsymbol{A}(x)$ の k 次の行列式因子という．行列式の定義から, 行列式因子は基本変形によって不変である．

さて，$\boldsymbol{A}(x)$ が基本変形によって 2 種類の Smith 標準形

$$\begin{pmatrix} \mathrm{diag}(g_1(x),\ldots,g_r(x)) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{と} \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(h_1(x),\ldots,h_s(x)) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

に変形されたものと仮定すると，各 k に対し，$\boldsymbol{A}$ の k 次の行列式因子は $g_1(x)\cdots g_k(x)$ と一致し，同時に $h_1(x)\cdots h_k(x)$ とも一致するから，$r=s$ で，$\forall k, g_k(x)=h_k(x)$ でなければならない．

多項式行列 (25)

- $\boldsymbol{A}(x) \in M(m,n;\mathbb{K}[x])$, $\boldsymbol{B}(x) \in M(m,p;\mathbb{K}[x])$, $\boldsymbol{C}(x) \in M(p,m;\mathbb{K}[x])$ とする.
- $\boldsymbol{A}(x) = \boldsymbol{B}(x)\boldsymbol{C}(x)$ であるとき, $\boldsymbol{B}(x)$ を $\boldsymbol{A}(x)$ の左因子, $\boldsymbol{C}(x)$ を $\boldsymbol{A}(x)$ の右因子という.
- $\boldsymbol{A}_i(x) = \boldsymbol{B}(x)\boldsymbol{C}_i(x) \ (i = 1,2)$ であるとき, $\boldsymbol{B}(x)$ を $\boldsymbol{A}_1(x)$ と $\boldsymbol{A}_2(x)$ の共通左因子という.

多項式行列 (26)

- $\boldsymbol{D}(x)$ が $\boldsymbol{A}_1(x)$ と $\boldsymbol{A}_2(x)$ の共通左因子で, $\boldsymbol{A}_1(x)$ の $\boldsymbol{A}_2(x)$ の任意の共通左因子 $\boldsymbol{B}(x)$ に対し, ある $\boldsymbol{X}(x)$ が存在して, $\boldsymbol{D}(x) = \boldsymbol{B}(x)\boldsymbol{X}(x)$ となるとき, $\boldsymbol{D}(x)$ を $\boldsymbol{A}_1(x)$ と $\boldsymbol{A}_2(x)$ の**最大共通左因子**という.
- 上記において $\boldsymbol{A}_1(x)$ と $\boldsymbol{A}_2(x)$ の次元は一致しなくてもよい.

多項式行列 (27)

- $\boldsymbol{A}_i(x) = \boldsymbol{B}_i(x)\boldsymbol{C}(x)$ $(i = 1, 2)$ であるとき, $\boldsymbol{C}(x)$ を $\boldsymbol{A}_1(x)$ と $\boldsymbol{A}_2(x)$ の共通右因子という.
- $\boldsymbol{D}(x)$ が $\boldsymbol{A}_1(x)$ と $\boldsymbol{A}_2(x)$ の共通右因子で, $\boldsymbol{A}_1(x)$ の $\boldsymbol{A}_2(x)$ の任意の共通右因子 $\boldsymbol{C}(x)$ に対し, ある $\boldsymbol{X}(x)$ が存在して, $\boldsymbol{D}(x) = \boldsymbol{X}(x)\boldsymbol{C}(x)$ となるとき, $\boldsymbol{D}(x)$ を $\boldsymbol{A}_1(x)$ と $\boldsymbol{A}_2(x)$ の最大共通右因子という.

多項式行列 (28)

- 左因子と右因子については並行した議論ができるが，重複を避けるため，以下ではおもに左因子について議論する．
- まず，$\boldsymbol{A}_i(x) \in M(m, n_i, \mathbb{K}[x])$ $(i = 1, 2)$ の最大共通左因子 $\boldsymbol{D}(x)$ が存在し，ある多項式行列 $\boldsymbol{X}_i(x)$ $i = 1, 2$ に対し，$\boldsymbol{A}_1(x)\boldsymbol{X}_1(x) + \boldsymbol{A}_2(x)\boldsymbol{X}_2(x) = \boldsymbol{D}(x)$ となることを示す．

$\boldsymbol{U}(x)\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1(x) & \boldsymbol{A}_2(x)\end{pmatrix}\boldsymbol{V}(x) = \boldsymbol{S}(x)$ で，$\boldsymbol{U}(x)$，$\boldsymbol{V}(x)$ はユニモジュラ，$\boldsymbol{S}(x)$ が Smith 標準形であったものとする． $\boldsymbol{V}^{-1}(x) = \begin{pmatrix}\boldsymbol{W}_1(x) & \boldsymbol{W}_2(x)\end{pmatrix}$ のように分割し ($\boldsymbol{W}_i(x)$ と $\boldsymbol{A}_i(x)$ の列数を合わせる)，$\boldsymbol{D}(x) = \boldsymbol{U}^{-1}(x)\boldsymbol{S}(x)$ と定義すると，$\boldsymbol{A}_i(x) = \boldsymbol{D}(x)\boldsymbol{W}_i(x)$ $(i = 1, 2)$ であるから，$\boldsymbol{D}(x)$ は $\boldsymbol{A}_1(x)$ と $\boldsymbol{A}_2(x)$ の共通左因子である． また，$\boldsymbol{A}_i(x) = \boldsymbol{B}(x)\boldsymbol{C}_i(x)$ $(i = 1, 2)$ であるとき，$\boldsymbol{B}(x)\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_1(x) & \boldsymbol{C}_2(x)\end{pmatrix}\boldsymbol{V}(x) = \begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1(x) & \boldsymbol{A}_2(x)\end{pmatrix}\boldsymbol{V}(x) = \boldsymbol{D}(x)$ であるから，$\boldsymbol{X}(x) = \begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_1(x) & \boldsymbol{C}_2(x)\end{pmatrix}\boldsymbol{V}(x)$ とおくと，$\boldsymbol{B}(x)\boldsymbol{X}(x) = \boldsymbol{D}(x)$ である．よって，$\boldsymbol{D}(x)$ は最大共通左因子である．$\boldsymbol{V}(x) = \begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1(x) \\ \boldsymbol{X}_2(x)\end{pmatrix}$ のように分割すると，$\boldsymbol{A}_1(x)\boldsymbol{X}_1(x) + \boldsymbol{A}_2(x)\boldsymbol{X}_2(x) = \boldsymbol{D}(x)$ である．

$\boldsymbol{D}'$ を $\boldsymbol{A}_1(x)$ と $\boldsymbol{A}_2(x)$ の最大共通左因子のひとつ, $\boldsymbol{D}$ を上記の手順で構成された $\boldsymbol{A}_1(x)$ と $\boldsymbol{A}_2(x)$ の最大共通左因子とする．最大共通左因子の定義から, ある $\boldsymbol{X}(x)$ に対し, $\boldsymbol{D}' = \boldsymbol{D}(x)\boldsymbol{X}(x)$ であるが, $\boldsymbol{D}(x) = \boldsymbol{A}_1(x)\boldsymbol{X}_1(x) + \boldsymbol{A}_2(x)\boldsymbol{X}_2(x)$ であるので, $\boldsymbol{D}'(x) = \boldsymbol{A}_1(x)\boldsymbol{X}_1(x)\boldsymbol{X}(x) + \boldsymbol{A}_2(x)\boldsymbol{X}_2(x)\boldsymbol{X}(x)$ となる．すなわち, $\boldsymbol{A}_1(x)$ と $\boldsymbol{A}_2(x)$ の任意の最大共通左因子は, $\boldsymbol{A}_1(x)\boldsymbol{X}_1'(x) + \boldsymbol{A}_2(x)\boldsymbol{X}_2'(x)$ という形で書き表される.

多項式行列 (31)

- $\boldsymbol{A}_i(x) \in M(m, n_i, \mathbb{K}[x])$ $(i = 1, 2)$ において, $n_1 + n_2 \geq m$ で, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1(x) & \boldsymbol{A}_2(x) \end{pmatrix}$ の Smith 標準形が $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ となるとき, $\boldsymbol{A}_1(x)$ と $\boldsymbol{A}_2(x)$ は左素であるという.

多項式行列 (32)

- $\boldsymbol{U}(x)$ と $\boldsymbol{V}(x)$ により $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1(x) & \boldsymbol{A}_2(x) \end{pmatrix}$ がSmith 標準形に変形され, $\boldsymbol{A}_1(x)$ と $\boldsymbol{A}_2(x)$ が左素のとき, 最大共通左因子のひとつは $\boldsymbol{D}(x) = \boldsymbol{U}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ であるが, 零行列の部分は省略できるので, 最大共通左因子を $\boldsymbol{D}(x) = \boldsymbol{U}^{-1}(x)$ に取り直すことができる.

- $\boldsymbol{A}_1(x)$ と $\boldsymbol{A}_2(x)$ が左素であれば，ある $\boldsymbol{X}_1(x)$ と $\boldsymbol{X}_2(x)$ に対し，$\boldsymbol{A}_1(x)\boldsymbol{X}_1(x)+\boldsymbol{A}_2(x)\boldsymbol{X}_2(x) = \boldsymbol{I}_m$ となる．

- 逆に，ある $\boldsymbol{X}_1(x)$ と $\boldsymbol{X}_2(x)$ に対し，$\boldsymbol{A}_1(x)\boldsymbol{X}_1(x)+\boldsymbol{A}_2(x)\boldsymbol{X}_2(x) = \boldsymbol{I}_m$ であれば，$\mathrm{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1(x) & \boldsymbol{A}_2(x)\end{pmatrix} = m$ が任意の x に対して成り立つから，その Smith 標準形の階数は x に依存しないから，Smith 標準形は $\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m & \mathbf{0}\end{pmatrix}$ でなければならない．したがって，$\boldsymbol{A}_1(x)$ と $\boldsymbol{A}_2(x)$ が左素である．

有理関数行列 (1)

- $\mathbb{K}$ を実数体あるいは複素数体, $\mathbb{K}(s)$ を $\mathbb{K}$ の要素を係数とする 1 変数有理式全体の集合とし, $M(m,n;\mathbb{K}(s))$ を, 各要素が s の ($\mathbb{K}$ 係数) 有理式 (あるいは有理関数) である m 行 n 列の行列全体とする. $\boldsymbol{A}(s) \in M(m,n;\mathbb{K}(s))$ を有理関数行列という (有理式行列という言葉は使われないようである).

有理関数行列 (2)

- 独立変数は何でもよいのだが, ここでは, 伝達関数をイメージしやすくするため, s を使った.
- $\boldsymbol{G}(s) = (g_{ij}(s)) \in M(m, n; \mathbb{K}(s))$ が与えられ, $g_{ij}(s) = n_{ij}(s)/d_{ij}(s)$ で, $n_{ij}(s)$ と $d_{ij}(s)$ の最大公約多項式は 1 であるものとする. $d(s) = \operatorname{lcm}\{d_{ij}(s) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ と定義する.

有理関数行列 (3)

- $\boldsymbol{P}(s) = d(s)\boldsymbol{G}(s)$ とおくと，$\boldsymbol{P}(s)$ は多項式行列で，$\boldsymbol{G}(s) = \dfrac{1}{d(s)}\boldsymbol{P}(s)$ である．この表現を，$\boldsymbol{G}(s)$ の最小公倍分母による表現と呼ぶ．
- $\boldsymbol{P}(s)$ の Smith 標準形は

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{diag}(g_1(x), \ldots, g_r(x)) & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right),$$

有理関数行列 (4)

- $\boldsymbol{P}(s)$ がSmith標準形に変形する際に用いられた左基本変形に対応する基本行列の積を $\boldsymbol{U}(s)$, 右基本変形に対応する基本行列の積を $\boldsymbol{V}(s)$ とする. $\boldsymbol{U}(s)$ と $\boldsymbol{V}(s)$ は正方で, ユニモジュラである.
- $\boldsymbol{U}(s)\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{V}(s) = \frac{1}{d(s)}\boldsymbol{U}(s)\boldsymbol{P}(s)\boldsymbol{V}(s)$ だから$\cdots$

$$
\boldsymbol{U}(s)\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{V}(s) = \left(\begin{array}{ccc|c}
\frac{g_1(s)}{d(s)} & & & \\
& \ddots & & \\
& & \frac{g_r(s)}{d(s)} & \\
\hline
& & & \\
\end{array}\right)
$$

(空白の部分は零)

有理関数行列 (6)

- 前ページの表現において，$i = 1, \ldots, r$ に対し，$p_i(s) = \gcd(g_i(s), d(s))$ とすると，$g_i(s) = p_i(s)\nu_i(s)$，$d(s) = p_i(s)\delta_i(s)$ と書け ($\nu_i(s)$ と $\delta_i(s)$ は多項式)，$\gcd(\nu_i(s), \delta_i(s)) = 1$ である．
- 前ページの式で $g_i(s)/d(s)$ を $\nu_i(s)/\delta_i(s)$ で置き換えたものを $\boldsymbol{G}(s)$ の **Smith-McMillan 標準形**という．

$$
\boldsymbol{U}(s)\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{V}(s) = \left(\begin{array}{ccc|c}
\dfrac{\nu_1(s)}{\delta_1(s)} & & & \\
& \ddots & & \\
& & \dfrac{\nu_r(s)}{\delta_r(s)} & \\
\hline
& & & \\
\end{array}\right)
$$

(Smith-McMillan 標準形; 空白の部分は零)

有理関数行列 (8)

- $\boldsymbol{G}(s)$ の Smith-MacMillan 標準形 (前ページ) が得られているとき, $\delta_1(s)\delta_2(s)\cdots\delta_r(s)$ の次数を, $\boldsymbol{G}(s)$ の McMillan 次数という.

有理関数行列 (8)

- 続いて, 有理関数行列の行列分解表現について述べる.
- $\boldsymbol{G}(s) \in M(m, n; \mathbb{K}(s))$ に対し, $\boldsymbol{G}(s)$ の行列分解表現とは, 以下のいずれかの表現である.
  - ▷ 左分解表現: $\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{D}_L^{-1}(s)\boldsymbol{N}_L(s)$
  - ▷ 右分解表現: $\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{N}_R(s)\boldsymbol{D}_R^{-1}(s)$

有理関数行列 (9)

- 左分解表現では, $\boldsymbol{D}_L \in M(m, m; \mathbb{K}[s])$, $\boldsymbol{N}_L \in M(m, n; \mathbb{K}[s])$ (いずれも多項式行列)
- 右分解表現では, $\boldsymbol{D}_R \in M(n, n; \mathbb{K}[s])$, $\boldsymbol{N}_R \in M(m, n; \mathbb{K}[s])$ (いずれも多項式行列)
- 行列分解表現は一意的ではない.

有理関数行列 (10)

- $\boldsymbol{G}(s) = \frac{1}{d(s)}\boldsymbol{P}(s)$ となっているとき, $\boldsymbol{D}_L = d(s)\boldsymbol{I}_m$, $\boldsymbol{N}_L(s) = \boldsymbol{P}(s)$ は左分解表現, $\boldsymbol{N}_R(s) = \boldsymbol{P}(s)$, $\boldsymbol{D}_R = d(s)\boldsymbol{I}_n$ は右分解表現である.
- $\boldsymbol{U}(s)$ および $\boldsymbol{V}(s)$ が ユニモジュラ で, $\boldsymbol{U}(s)\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{V}(s)$ が Smith - McMillan 標準形であるとき $\cdots$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
\frac{\nu_1(s)}{\delta_1(s)} & & & \\
& \ddots & & \\
& & \frac{\nu_r(s)}{\delta_r(s)} & \\
\hline
& & &
\end{array}\right)
$$

$$
= \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(\delta_1(s), \ldots, \delta_r(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{diag}(1, \ldots, 1) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(\nu_1(s), \ldots, \nu(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(\nu_1(s), \ldots, \nu(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(\delta_1(s), \ldots, \delta_r(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{diag}(1, \ldots, 1) \end{pmatrix}^{-1}
$$

- よって，

$$\boldsymbol{D}_L(s) = \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(\delta_1(s), \ldots, \delta_r(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{diag}(1, \ldots, 1) \end{pmatrix} \boldsymbol{U}(s),$$

$$\boldsymbol{N}_L(s) = \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(\nu_1(s), \ldots, \nu(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \boldsymbol{V}^{-1}(s)$$ は左分解表現

- 同様に，

$$\boldsymbol{N}_R(s) = \boldsymbol{U}^{-1}(s) \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(\nu_1(s), \ldots, \nu(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}_R(s) = \boldsymbol{V}(s) \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(\delta_1(s), \ldots, \delta_r(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{diag}(1, \ldots, 1) \end{pmatrix}$$ は右分解表現

有理関数行列 (12)

- $\boldsymbol{G}(s)$ の左分解表現 $(\boldsymbol{D}_L(s), \boldsymbol{N}_L(s))$ において, $(\boldsymbol{D}_L(s), \boldsymbol{N}_L(s))$ が左素であるとき, これを左既約分解表現という.
- $\boldsymbol{G}(s)$ の右分解表現 $(\boldsymbol{N}_R(s), \boldsymbol{D}_R(s))$ において, $(\boldsymbol{N}_R(s), \boldsymbol{D}_R(s))$ が右素であるとき, これを右既約分解表現という.

有理関数行列 (13)

- Smith-McMillan 標準形から求めた左分解表現は左既約, 右分解表現は右既約である.

参考文献

- 室田, 杉原, 線形代数 II, 丸善, 2015
- 斎藤, 線形代数入門, 東京大学出版会, 1966
- 児玉, 須田, システム制御のためのマトリクス理論, 計測自動制御学会, 1978
- 須田, 線形システム理論, 朝倉書店, 1993