# システム工学 I
# 第 6 回
# ブロック線図・
# 伝達関数・状態方程式

# 伝達関数 (1)

- 入力 $u(t)$ と出力 $y(t)$ の関係が次のような微分方程式で与えられたシステムを考える:

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} y^{(i)} = \sum_{i=0}^{m} b_{m-i} u^{(i)}$$

- $t$ は時間で, $y^{(i)}$ は $y$ の時間に関する $i$ 階微分をあらわす ($u$ についても同様). なお, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ と仮定する.

# 伝達関数 (2)

- 初期値を零とした上で, 両辺を Laplace 変換すると, $(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n) Y(s) = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m) U(s)$ となり, したがって,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

となる. これを, 先の入出力微分方程式に対応する伝達関数という.

# 伝達関数 (3)

- 伝達関数は, 初期値零の 1 入力 1 出力のシステムに対して, $Y(s)/U(s)$ によってを定義される ($U(s)$ および $Y(s)$ は入力を $u(t)$ および出力 $y(t)$ の Laplace 変換)
- システムが線形時不変で有限次元であれば伝達関数は $s$ の有理式になるが, そうでない場合には必ずしも有理式にはならない.

## 伝達関数 (4)

- 次の伝達関数を考える.

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

- $N(s)$ は分子多項式, $D(s)$ は分母多項式で, $b_0 \neq 0$, $a_0 \neq 0$ とする. よって, 分子多項式の次数は $m$, 分母多項式の次数は $n$ である.

## 伝達関数 (5)

- 分母は英語で denominator, 分子は英語で numerator, この理由から, 分母多項式を $D(s)$, 分子多項式を $N(s)$ とあらわすことがある (常にではない). 伝達関数は $G(s)$, $H(s)$ などの記号で表されることが多い.
- 最高次の係数が 1 である多項式をモニックな多項式という.

# 伝達関数 (6)

- 分母多項式がモニックでないときには,

$$G(s) = \frac{\frac{b_0}{a_0}s^m + \frac{b_1}{a_0}s^{m-1} + \cdots + \frac{b_m}{a_0}}{\underbrace{s^n + \frac{a_1}{a_0}s^{n-1} + \cdots + \frac{a_n}{a_0}}_{\text{モニック}}}$$

と書き直せるので, 分母多項式はモニックであるとはじめから仮定することも多い.

# 伝達関数 (7)

- $N(s)$ および $D(s)$ はそれぞれ (複素数の範囲で)1 次の項の積で表現される.
- 分母と分子の 1 次の項の積による表現が共通項を持つ場合には, これらを打ち消すことにより, 共通項をなくすことができる. 以下では, 当面, この処理はすでに済んでいると仮定する.

## 伝達関数 (8)

- 分母多項式の次数は $n$, 分子多項式の次数は $m$ であった.
- $n \geq m$ のとき, この伝達関数はプロパーであるという. とくに, $n > m$ のとき, 厳密にプロパーであるという. 自然界に存在するシステムは, 大抵はプロパーである.

# 伝達関数 (9)

伝達関数 $G(s)$ が $G(s) = g_0 \dfrac{(s-\beta_1)\cdots(s-\beta_m)}{(s-\alpha_1)\cdots(s-\alpha_n)}$ のように表現されているとき ⋯

- $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ をこの伝達関数の**極**という.
- $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ をこの伝達関数の**零点**という.
- $g_0 = \beta_0/\alpha_0$ をこの伝達関数の**高周波ゲイン**という.

# 伝達関数 (10)

- $G(s) = \dfrac{\sum_{i=0}^{n} b_i s^{n-i}}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^{n-i}}$ がプロパーで, 厳密にプロパーではないと仮定する ($a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$).
  このとき, $G(s) = \dfrac{b_0}{a_0} + \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \left( b_i - \frac{b_0}{a_0} a_i \right) s^{n-i}}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^{n-i}}$
  となる. すなわちプロパーな伝達関数は, 定数項と厳密にプロパーな伝達関数の和になる.

# 伝達関数 (11)

- $G(s)$ がプロパーで, $G(s) = G_0 + G_1(s)$, $G_0$ は定数, $G_1(s)$ は厳密にプロパー, というふうに表記されていたものとする.
- 初期値が零と仮定したとき, この伝達関数に入力 $U(s)$ を印加したときの出力は, $G_0U(s) + G_1(s)U(s)$ となる. これを Laplace 逆変換すると応答波形が得られる.

# 伝達関数 (12)

- $G_0U(s)$ を Laplace 逆変換すると $G_0u(t)$ となる. すなわち, この項は入力の定数倍である.
- $G_1(s)U(s)$ の Laplace 逆変換は, $G_1(s)$ の Laplace 逆変換 (これを $g_1(t)$ とする) と $u(t)$ の畳み込み積分である. $g_1(t)$ を求めるときに役立つのが, 部分分数展開である.

# 伝達関数 (13)

- $G(s) = g_0 \dfrac{(s-\beta_1)\cdots(s-\beta_m)}{(s-\alpha_1)\cdots(s-\alpha_n)}$ が厳密にプロパーであるものとする.

- $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ に重複がない場合には, $G(s) = g_0 \left( \dfrac{A_1}{s-\alpha_1} + \cdots + \dfrac{A_n}{s-\alpha_n} \right)$ と書ける. これを部分分数展開という.

# 伝達関数 (14)

- 係数 $A_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ は, $\sum_{i=1}^{n} A_i \left( \prod_{j \neq i} (s - \alpha_j) \right)$ がもとの伝達関数の分子と一致するように定める (連立 1 次方程式を解けばよい).
- $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ に重複があると, もう少し複雑.

# 伝達関数 (15)

- $G(s) = g_0 \dfrac{(s-\beta_1)\cdots(s-\beta_m)}{(s-\alpha_1)^{r_1}\cdots(s-\alpha_k)^{r_k}}$ が厳密にプロパーであるものとする.
- このとき, $G_s = g_0 \left( \sum_{i=1}^{k} \left( \sum_{j=1}^{r_i} \dfrac{A_{ij}}{(s-\alpha_i)^j} \right) \right)$ という形に展開できることが示せる. こちらも部分分数展開という.

# 伝達関数 (16)

- $A_{ij}$ を求めるには連立一次方程式を解く.
- $\mathcal{L}^{-1}$ を逆 Laplace 変換としたとき, $t \geq 0$ で

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-\alpha)^k}\right] = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\exp[\alpha t],$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^k}\right] = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$$ だから, 部分分数展開によりシステムの応答波形が定まる.

# 部分分数展開による微分方程式の解法 (1)

- Laplace 変換を使って線形時不変 (高階) 微分方程式を解こうとするとき, 覚えておくべきことは,
  - ▷ $sX(s) = \mathcal{L}[x'(t)] + x(0)$ (第 2 回)
  - ▷ $\mathcal{L}\left[\dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\alpha t}\right] = \dfrac{1}{(s-\alpha)^k}$ ($k$ は自然数, $\alpha$ は複素数で零でもよい； 第 2 回)
  - ▷ 部分分数展開

  の 3 個だけ ($\mathcal{L}[\quad]$ は Laplace 変換の意味).

## 部分分数展開による微分方程式の解法 (2)

- 第一の規則は, 高階の微分にも拡張できる (次ページ). $x$ を時間 $t$ の関数とし, その $k$ 階の微分までの絶対値が時間に関する指数関数で上から押さえられるものと仮定する. $\frac{d^k x}{dt^k}$ を $x^{(k)}$ と書くと $\cdots$

$$
\mathcal{L}\left[x^{(k)}\right] = \int_0^\infty x^{(k)} e^{-st} dt = \left[x^{(k-1)} e^{-st}\right]_0^\infty
- (-s) \int_0^\infty x^{(k-1)} e^{-st} dt = -x^{(k-1)}(0) + s\mathcal{L}\left[x^{(k-1)}\right]
$$

# 部分分数展開による微分方程式の解法 (3)

- ただし $\left[f(t)\right]_0^\infty = f(\infty) - f(0)$. また, $s$ が任意であることと, $x^{(k)}$ の絶対値が指数関数で上から押さえられることを使った.
- 帰納法を使うと, $\mathcal{L}\left[x^{(k)}\right] = s\mathcal{L}\left[x^{(k-1)}\right] - x^{(k-1)}(0) = s\left(s\mathcal{L}[x^{(k-2)}] - x^{k-2}(0)\right) - x^{(k-1)}(0) = \cdots$
- よって, $\mathcal{L}\left[x^{(k)}\right] = s^k X(s) - s^{k-1}x(0) - \cdots - x^{(k-1)}(0)$

## 部分分数展開による微分方程式の解法 (4)

- 微分方程式の強制項が三角関数という問題はよくある.
- $\cos\beta t = \dfrac{e^{i\beta t}+e^{-i\beta t}}{2}$, $\sin\beta t = \dfrac{e^{i\beta t}-e^{-i\beta t}}{2i}$ だから $\cdots$
- $\mathcal{L}\left[\cos\beta t\right] = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s-i\beta}+\dfrac{1}{s+i\beta}\right)$
- $\mathcal{L}\left[\sin\beta t\right] = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{s-i\beta}-\dfrac{1}{s+i\beta}\right)$

以下の微分方程式を Laplace 変換して解く.

$$\dot{y} + y = \sin t, \quad y(0) = 1$$

- 左辺: $(sY(s) - y(0)) + Y(s)$
- 右辺: $\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i} - \frac{1}{s+i}\right)$
- 初期値を代入して整理すると:
  $(s+1)Y(s) = 1 + \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i} - \frac{1}{s+i}\right)$
- よって $Y(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2i(s+1)}\left(\frac{1}{s-i} - \frac{1}{s+i}\right)$
- あとは部分分数展開によって第 2 項と第 3 項の Laplace 逆変換を求めればよい.

- $\frac{1}{(s+1)(s-i)} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{B_1}{s-i}$ とおいて $A_1$,$B_1$ を求めると, $A_1 = -\frac{1}{2}(1-i)$, $B_1 = \frac{1}{2}(1-i)$
- $\frac{1}{(s+1)(s+i)} = \frac{A_2}{s+1} + \frac{B_2}{s+i}$ とおいて $A_2$,$B_2$ を求めると, $A_2 = -\frac{1}{2}(1+i)$, $B_2 = \frac{1}{2}(1+i)$
- したがって,

$$
\begin{aligned}
y(t) = e^{-1} &+ \frac{1}{2i}\left(-\frac{1}{2}(1-i) + \frac{1}{2}(1+i)\right)e^{-t} \\
&+ \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{2}(1-i)e^{it} - \frac{1}{2}(1+i)e^{-it}\right)
\end{aligned}
$$

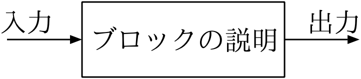
- 以上を整理して, $1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ を使うと,

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{3}{2}e^{-1} + \frac{1}{2i\sqrt{2}}\left(e^{i(t-\frac{\pi}{4})} - e^{-i(t-\frac{\pi}{4})}\right) \\
&= \frac{3}{2}e^{-1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t-\frac{\pi}{4})
\end{aligned}
$$

# ブロック線図 (1)

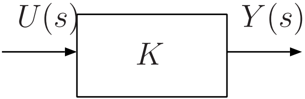
- ブロック線図とは, 制御系のさまざまな構成要素の関係を図を用いて表現する方法のひとつ.
- 基本的な入出力関係をあらわす構成要素をブロックと呼ぶ. 矩形の中に説明文や数式を書き, 入力信号をブロックに向かう矢印, 出力信号をブロックから出る矢印でこれを表現する.

# ブロック線図 (2)

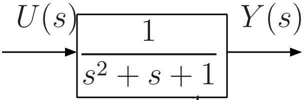



- ブロックの説明文には, 伝達関数に対応する有理式, 伝達関数をあらわす記号, 信号に乗じられるゲイン, 非線形要素に対応する数式など, 色々なものが書かれる.

# 例



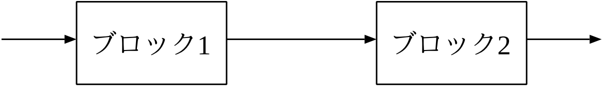

$$Y(s) = KU(s)$$




$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} U(s)$$

# ブロック線図 (4)

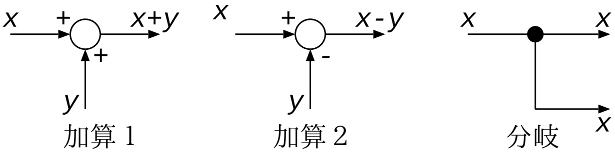
- 構成要素の依存関係を矢印であらわす．以下の図は, ブロック 1 の出力端子がブロック 2 の入力端子に接続されていることを意味する．



# ブロック線図 (5)

- 複数の信号の加減算もブロックの一種ではあるが, 通常のブロックと記号を変えて, ○印に加減算の符号を付して表記することがふつう.
- 信号が分岐して複数のブロックに接続されるときには, 分岐点に●を書く.

# ブロック線図 (6)




- 信号はスカラーでもベクトルでもよい.

# ブロック線図 (7)

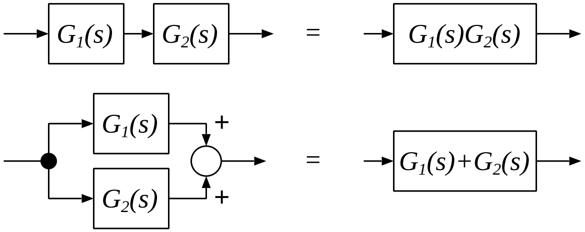
- ブロック線図には上記以外の記号が使われることもある.
- 特に加算の記号にはバリエーションがあり, $\textcircled{\Sigma}$, $\otimes$ などといった記号が使われることもある. 記号 $\otimes$ は乗算の意味で使われることもあるため要注意.

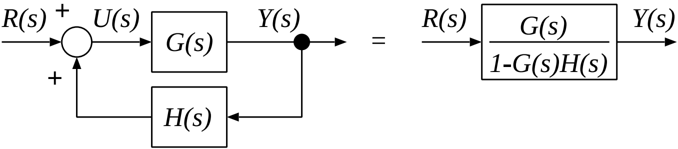
# ブロック線図 (8)

- ブロック線図は非線形系にも使用可能だが, 線形系に対して使うことが一般的.
- 加算以外のブロックはすべて線形時不変システムで, 伝達関数で表記されていることが普通. 初期値は一般に無視される.

# ブロック線図 (9)

- ブロックの直列接続は伝達関数の積に, 並列接続は伝達関数の和に対応する.
- フィードバックを含む系の伝達関数を求めるには計算が必要.
- ブロック線図の書き方は何通りもある


$G_1(s)$
$G_2(s)$
=
$G_1(s)G_2(s)$
$G_1(s)$
+
$G_2(s)$
+
=
$G_1(s)+G_2(s)$

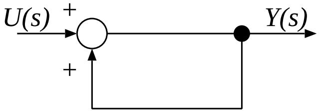



$$Y(s) = G(s)U(s), \quad U(s) = R(s) + H(s)Y(s)$$
$$\Rightarrow Y(s) = G(s)R(s) + G(s)H(s)Y(s)$$
$$\Rightarrow Y(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)} R(s)$$

# ブロック線図 (12)

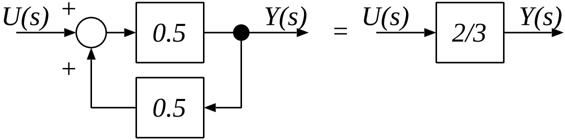
- フィードバックループの構成要素が $s$ の有理式 (動的システム) であるときにはフィードバックループの伝達関数の計算に注意を要する点はないが $\cdots$
- 代数的な要素のみから成るフィードバックループは無意味なことがあるので注意

## 無意味な例 (注意)




- $Y(s) = U(s) + Y(s) \Rightarrow U(s) = 0,\ Y(s)$ : 任意
- こういうブロック線図を書いてはいけない; 代数的要素のみから成るループには要注意

# こちらは意味を持つ (が混乱のもと)



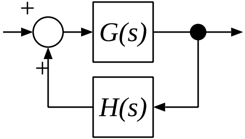

- $0.5(U(s)+0.5Y(s)) = Y(s)$ から, $0.5U(s) = 0.75Y(s)$, よって $Y(s) = \dfrac{2}{3}U(s)$

# シグナルフローグラフ (1)

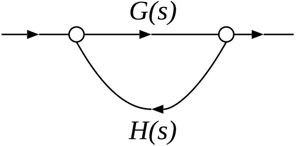
- シグナルフローグラフは, ブロック線図とは別の, 制御系のさまざまな構成要素の関係を図を用いて表現する方法. 北米の教科書でよく用いられる.
- 構成要素は枝 **(branch)** と節点 **(node)** の 2 種類.
- 枝はブロック線図の伝達関数に相当し, 矢印 (直線あるいは曲線) で表記される ($\longrightarrow$). 枝に沿って, その信号に乗じられる倍率, 枝の伝達関数などが書かれる.

# シグナルフローグラフ (2)

- 節点は ◯ で表記される．節点に向かう矢印が節点への入力, 節点から出る矢印が節点からの出力である．
- 節点への入力が複数ある場合, それらは加算される．出力が複数ある場合，どの信号線にも同じ信号が出力される．
- 次ページに, 簡単なブロック線図と, それに対応するシグナルフローグラフを示す．




ブロック線図




シグナルフローグラフ

# 余因子展開と逆行列 (1)

- $n$ 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ から第 $i$ 行と第 $j$ 列を取り除くと $n-1$ 次の正方行列ができる.
- この行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ をかけたものを $A$ の $(i,j)$ 余因子, あるいは $a_{ij}$ の余因子といい, $\widetilde{a}_{ij}$ であらわす.

## 余因子展開と逆行列 (2)

- 第 $(i,j)$ 要素が $\widetilde{a}_{ji}$ である行列を $\boldsymbol{A}$ の余因子行列といい, $\mathrm{adj}\boldsymbol{A}$ という記号であらわす.
- Cramer の公式を使うと, $\boldsymbol{A}$ が正則である場合には, $\boldsymbol{A}^{-1}$ が次のようにして求められることを示せる.

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\mathrm{adj}\boldsymbol{A}$$

# 状態方程式から伝達関数へ (1)

- 前回と同様に, 時間微分を記号 $\dot{}$ であらわす.
- 1 入力 1 出力の状態方程式を考える:
  $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u,\ y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + Du.$
- ただし, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ で, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $D \in \mathbb{R}$ である.
- $u$ と $y$ がスカラーであることに注意.

# 状態方程式から伝達関数へ (2)

- $\boldsymbol{x}$, $u$, $y$ の次元と, 微分方程式が矛盾なく定義されているという条件から, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ の次元が自動的に定まる. このような状況を **$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ は適合する次元を持つ**と表現し, それらの次元を書かないことがある.
- 記号 $\mathcal{L}[\quad]$ によって Laplace 変換をあらわす.

# 状態方程式から伝達関数へ (3)

- $\mathcal{L}[\boldsymbol{x}(t)] = \boldsymbol{X}(s)$, $\mathcal{L}[u(t)] = U(s)$, $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ とする.
- 状態方程式の両辺を Laplace 変換して初期値を零とおくと, $s\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{B}U(s)$ となる．よって, $(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{B}U(s)$ である．ただし $\boldsymbol{I}$ は $n$ 次の単位行列とする.

# 状態方程式から伝達関数へ (4)

- $P(s) = \det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ は $s$ の多項式であるが，これが零多項式でない場合には，$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ は逆行列を持ち，その逆行列は次のようにあらわされる．

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{P(s)}\mathrm{adj}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$$

## 状態方程式から伝達関数へ (5)

- $(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(s)=\boldsymbol{B}U(s)$ だったから, $\boldsymbol{X}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}U(s)$ である.
- $Y(s)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(s)+DU(s)$ だから,

$$Y(s)=\left(\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+D\right)U(s)$$

となる. このようにして, 状態方程式から対応する伝達関数を求めることができる.

# 状態方程式から伝達関数へ (6)

- $(\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+D)$ (有理式) の分母と分子をそれぞれ 1 次の項の積に分解したとき, 分母と分子に共通項がある可能性がある.
- 共通項がある場合には, その項に対応する $\boldsymbol{A}$ の一般化固有値は入出力関係からは見えなくなり (極零相殺), 制御系設計の障害となる.

# 伝達関数行列 (1)

- 現代制御理論の利点は多入力多出力システムを取り扱えることであった. そこで, 次のようなシステムを考える:

  $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}, \ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}.$

- ただし, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^p$ で, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$ である.

# 伝達関数行列 (2)

- 先と同様に状態方程式を Laplace 変換すると, $s\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$ である. $s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ の逆行列を作る操作は 1 入力 1 出力系と同じなので, 初期値を零とおくと:
  $\boldsymbol{X}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$
- これと出力方程式を組み合わせると:
  $\boldsymbol{Y}(s) = \left(\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}\right)\boldsymbol{U}(s)$

# 伝達関数行列 (3)

- $\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$ とおく.
- 余因子行列の定義を思い出すと, $\boldsymbol{G}(s)$ は $m$ 行 $p$ 列の行列で, その要素は $s$ の有理式になっていることがわかる.
- $\boldsymbol{G}(s)$ をこのシステムの伝達関数行列という.

# 伝達関数行列 (4)

- 伝達関数行列に対して極や零点 (に相当するもの) を定義するには準備が必要
- 要素が多項式や有理式から成る行列に関する演算が必要になるため, 後回しにする

## Markov パラメータ (1)

- $(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = s\left(\boldsymbol{I} - \dfrac{\boldsymbol{A}}{s}\right)$ である.
- スカラーに関する等比級数の公式

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + \cdots$$

(ただし $|r| < 1$) を行列に対して適用すると…
(これは一定の条件のもとで正当化される)

# Markov パラメータ (2)

$|s|$ が十分大きいと仮定して $\cdots$

$$
\begin{aligned}
(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1} &= \left(s\left(\boldsymbol{I}-\frac{\boldsymbol{A}}{s}\right)\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{s}\left(\boldsymbol{I}+\frac{\boldsymbol{A}}{s}+\frac{\boldsymbol{A}^2}{s^2}+\cdots\right) \\
&= \frac{\boldsymbol{I}}{s}+\frac{\boldsymbol{A}}{s^2}+\frac{\boldsymbol{A}^2}{s^3}+\cdots
\end{aligned}
$$

# Markov パラメータ (3)

- $\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$ であった
- $(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$ を無限級数に展開したものを上式に代入すると $\cdots$

$$\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{D} + \frac{\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}}{s} + \frac{\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}{s^2} + \frac{\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}}{s^3} + \cdots$$

# Markov パラメータ (4)

- $\boldsymbol{G}(s)$ を $s$ の負のべきの無限級数に展開したときの係数 $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{CB}$, $\boldsymbol{CAB}$, $\boldsymbol{CA}^2\boldsymbol{B}\cdots$ を, このシステムの Markov パラメータという.
- Markov パラメータは, 伝達関数に対応する最小実現と呼ばれる状態空間表現を求めるために利用される (システム工学 II の範囲)

# 伝達関数行列 vs 状態方程式 (1)

- 状態方程式に基づく現代制御理論は, それ以前の制御理論 (今日では古典制御と呼ばれる) が図などを多用して制御系の設計・調整をおこなう技法であったことと対比して, 数学的に一貫した制御系の解析・設計の理論を提供する目的で構築された.

## 伝達関数行列 vs 方程式 (2)

- 古典制御が周波数領域におけるモデル (伝達関数) を利用するのに対し, 現代制御は時間領域におけるモデル (状態方程式) を利用する.
- 現代制御が古典制御に対して理論的に優位な点は色々あるが, 一方で重大な弱点もある.

# 伝達関数行列 vs 方程式 (3)

- 現代制御の優位な点は, 制御系の解析および設計のための数学的に一貫した理論体系を与えること, 多入力多出力システムが自然に扱えること, 時変システムや非線形システムに自然に拡張できることである.

# 伝達関数行列 vs 方程式 (4)

- 一方で, 制御対象や制御器に「不確か」な部分がある場合には (我々の知識は一般に不完全である), その「不確かさ」が制御系に悪影響を及ぼさないように制御系設計をおこなう必要がある. 現代制御は, この不確かさの取り扱いが古典制御より不得手で, これが現代制御の普及の障害になった.

## 伝達関数行列 vs 方程式 (5)

- (線形時不変) 多入力多出力系を取り扱いたい場合には, 伝達関数を伝達関数行列に拡張すればよい. 伝達関数行列を使うと, モデルの不確かさの取り扱いは容易になる.
- 一方で, 制御系の解析および設計のための一貫した理論という観点からは, 状態方程式の方が便利.

## 伝達関数行列 vs 方程式 (6)

- これらの理由から, 今日の線形制御理論では, 伝達関数およびそれに基づく周波数領域におけるシステムの解析および設計と, 状態方程式およびそれに基づく時間領域におけるシステムの解析および設計を組み合わせることが普通.

## 参考文献


- W. S. Levine (ed.), The Control Handbook, 2/e, CRC Press, 2011
- 野波, 水野 (編集代表), 制御の事典, 朝倉書店, 2015
- 須田, 線形システム理論, 朝倉書店, 1993
- 木村, $H_\infty$ 制御, コロナ社, 2000
- J. Mikusinsuki (松村, 松浦訳), 演算子法 (上), 第 15 版, 裳華房, 1982