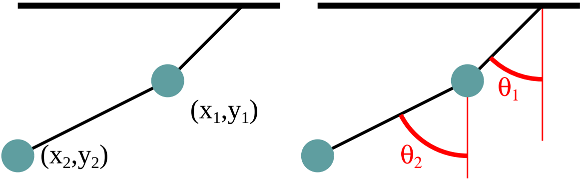
システム工学 I
第 5 回
Lagrange 運動方程式
と状態方程式

一般化座標の必要性 (1)

- 制御対象はふつう微分方程式によってモデリングされるが, そのためには座標系が必要
- どのような座標系を取るかが問題になる
- 素朴に考えると実験室に固定された直交座標系で良さそうだが ⋯

一般化座標の必要性 (2)

- 例として 2 次元の 2 重振り子を考える



一般化座標の必要性 (3)

- 素朴には, (x_1, y_1), $(\dot{x}_1, \dot{y}_1)$, (x_2, y_2), $(\dot{x}_2, \dot{y}_2)$ を変数として 8 次元の微分方程式を立てればよいが ⋯
- $(\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2)$ の 4 個の変数で運動は完全に記述される筈
- 8 次元の微分方程式を立てることは無駄

一般化座標の必要性 (4)

- 運動を記述するために必要なパラメータ (座標を一般化したもの) を一般化座標という.
- 一般化座標の時間微分を一般化速度という.
- 一般化座標の次元は, その運動を直交座標系で表現したときの座標系の次元と同じこともあれば, そうでないこともある.

一般化座標の必要性 (5)

- 今回の講義以降, 時間に関する 1 階微分をドット, 2 階微分を 2 重ドットであらわすことがある.
- たとえば, $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ と $\dot{\boldsymbol{x}}$, $\dfrac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}$ と $\ddot{\boldsymbol{x}}$ は同じ意味.
- 稀に $\dddot{\boldsymbol{x}}$, $\ddddot{\boldsymbol{x}}$ などといった記号が使われることがある.

Lagrangean(1)

- 「力学系の運動を最小限の変数で記述したい」という要求に答えるのが**Lagrangean**(**Lagrange 関数**ともいう) を用いた定式化
- Lagrangean はもともと Newton 力学の再定式化のために使われたもので, 運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの差として定義された.

Lagrangean(2)

- 後述するが, Newton 力学は, **Lagrangean の積分が停留値を取る**という形で再定式化されるということが発見された.
- この事実を**最小作用の原理**という. 最小作用の原理は Newton 力学の言い換えと解釈することもできる.

Lagrangean(3)

- 最小作用の原理は, 物理現象に関する実験事実を記述した原理であり, 他の物理法則から導かれるものではない.
- 実は最小作用の原理という名前は不正確. 物理現象は Lagrangean の積分が停留値を取る形で実現されるが, 最小であることは保証されない.

Lagrangean(4)

- Lagrangean の積分が停留値を取るための条件は, **変分法**という手法によって導かれ, その結果, **Euler の方程式**と呼ばれる微分方程式が出て来る.
- Lagrangean から導かれた Euler の方程式を **Lagrange の運動方程式**, **Euler-Lagrange 方程式**などと呼ぶ.

Lagrangean(5)

- Lagrangean を用いた古典力学の再定式化を解析力学と呼び, これは量子力学を学ぶために必須
- 2 足歩行ロボットや多関節マニピュレータのモデリングの際にも, 変数の数を減らすためには, Lagrangean を用いた定式化が必須

Lagrangean(6)

- Lagrangean と, そこから導かれる **Hamilton 関数**と呼ばれる関数は, **受動性**と呼ばれる性質に基づく制御などに利用されている.
- 古典的な Lagrangean や Hamilton 関数の変数には物理的な意味があるが(位置, 速度など), その変数に物理的な意味を与えずに一般化したものが最適制御で用いられている

Lagrangean(7)

- 物理学および最適制御では, ともに Lagrangean あるいは Hamiltonian が取り扱われるのであるが, その意味合いは異なる:
  - 物理学にとって, 物理法則は Lagrangean が停留値を取る条件として定式化されるというのは, 物理法則
  - 最適制御では, Lagrangean が停留値を取るような制御入力を求めることが目的

Lagrangean(8)

- Hamilton 関数の一般化については, van der Schaft によって **port-controlled Hamiltonian system** (あるいは **port-Hamiltonian system**) という名称で取り纏められた体系が有名.
- 以下ではまず古典力学における Lagrangean について説明する.

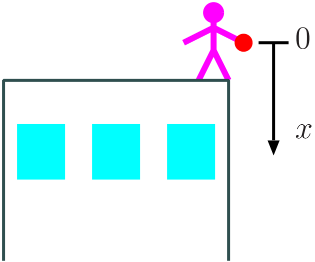
古典力学における Lagrangean(1)

- 古典力学における Lagrangean(これを L であらわす) は, 運動エネルギー (T とする) とポテンシャルエネルギー (U とする) の差として定義される. 以下がその定義.

$$L = T - U$$

- 続いて, Lagrangean の例を挙げる.

質量 m の物体の自由落下



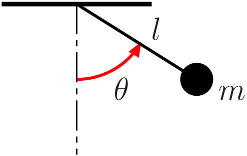
$$U = -mgx$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx$$

座標軸の原点と向きに注意

長さ l 単振り子 (質量 m)



$$U = mgl(1 - \cos\theta)$$
$$T = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2$$
$$L = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 - mgl(1 - \cos\theta)$$

変分法 (1)

- $\boldsymbol{x}$, $\dot{\boldsymbol{x}}$ および t に関する Lagrangean が与えられているものとし, これを $L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)$ とする.
- 運動開始時刻を t_i, 運動終了時刻を t_f とし, $J = \displaystyle\int_{t_i}^{t_f} L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)dt$ が停留値となるための条件を求めたい. ただし始点と終点を固定する: $\boldsymbol{x}(t_i) = \boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{x}(t_f) = \boldsymbol{x}_f$

変分法 (2)

- この問題を解くための方法が変分法
- 変分法では, $\boldsymbol{x}(t)$ が $J = \displaystyle\int_{t_i}^{t_f} L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)dt$ の停留値を与えるための条件を求める.
- $\boldsymbol{x}(t)$ がこの積分の停留値を与えているのであれば, $\boldsymbol{x}(t)$ に微小な摂動が加えられても上記積分はほとんど変動しない.

変分法 (3)

- 変分法では, この「微小な摂動が積分値に影響を与えない」という条件から, 微分方程式を導く. このために, $\boldsymbol{x}(t)$ を少しずらして, $\boldsymbol{x}(t) + \varepsilon \boldsymbol{h}(t)$ としてみる.
- $\boldsymbol{h}(t)$ は $\boldsymbol{h}(t_i) = \boldsymbol{0}$ および $\boldsymbol{h}(t_f) = \boldsymbol{0}$ という条件のみ指定された関数, ε はパラメータ

変分法 (4)

- 積分値の変動を ΔJ とすると ⋯

$$\Delta J = \int_{t_i}^{t_f} \Big(L(\boldsymbol{x} + \varepsilon \boldsymbol{h}, \dot{\boldsymbol{x}} + \varepsilon \dot{\boldsymbol{h}}, t) - L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) \Big) \, dt$$

- Taylor 展開して,

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{x} + \varepsilon \boldsymbol{h}, \dot{\boldsymbol{x}} + \varepsilon \dot{\boldsymbol{h}}, t) &= L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) \\ &\quad + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} \varepsilon \boldsymbol{h} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} \varepsilon \dot{\boldsymbol{h}} + (\text{高次項}) \end{aligned}$$

- 高次項は無視する.

変分法 (5)

- 低次項が零となる条件を求めたい
- 任意関数 $\boldsymbol{h}$ の微分が含まれるのは都合が悪いので, 部分積分によりこれを消すと …

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} \dot{\boldsymbol{h}} dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{h} \right]_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} \right) \boldsymbol{h} dt$$

ただし $\left[f(t) \right]_{t_i}^{t_f}$ は $f(t_f) - f(t_i)$ を意味する.

変分法 (6)

- ここで $\boldsymbol{h}(t_i) = \boldsymbol{h}(t_f) = \mathbf{0}$ を使うと $\cdots$
- $\varepsilon \left(\int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} \right) \right) \boldsymbol{h} dt \right)$ が零となる，というのが求める条件
- ε, $\boldsymbol{h}$ は任意だったから $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} \right) = \mathbf{0}$ でなければならない．

変分法 (7)

- 微分方程式 $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right) = \dfrac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}}$ を Euler 方程式, あるいは Euler-Lagrange 方程式という.

- 関数 $\boldsymbol{x}(t)$ が Euler 方程式を満たすことが, その関数を代入したときの $\displaystyle\int_{t_i}^{t_f} L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)dt$ の値が停留値となるための必要条件である.

自由落下の Lagrangean と運動方程式

- 自由落下の問題では $L = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx.$
- $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$, $\dfrac{\partial L}{\partial x} = mg$ を Euler 方程式に代入すると $\cdots$
- $\dfrac{d}{dt}m\dot{x} = mg$, すなわち $\ddot{x} = g$ で, 確かに自由落下の運動方程式になっている.

単振り子の Lagrangean と運動方程式 (1)

- 単振り子では, $L = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 - mgl(1-\cos\theta)$.
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$, $\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta$ を Euler 方程式に代入すると ⋯
- $ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$, よって

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

単振り子の Lagrangean と運動方程式 (2)

- 微分方程式 $\ddot{\theta} = -\dfrac{g}{l}\sin\theta$ から単振り子の周期を求めるためには, 楕円積分という手法が必要になる.
- 初学者向けの議論では, θ が十分小さいと仮定し, $\sin\theta \simeq \theta$ と近似する. このとき,

$$\ddot{\theta} \simeq -\frac{g}{l}\theta$$

散逸関数 (1)

- 物理における Lagrangean は保存則に対応したものであり, 摩擦などのエネルギー散逸構造を持つ系には対応できない
- この問題を解消するために, **(Rayleigh の) 散逸関数**という関数を Lagrangean に付加することがある.

散逸関数 (2)

- 1 次元の並進運動では, 典型的な動摩擦力モデルは, $-c\dot{x}$.
- 系に摩擦などがある場合には, Euler 方程式を次のように変更すれば良さそう

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} - \underbrace{\text{散逸力の項}}_{\text{追加}}$$

散逸関数 (3)

- 1 次元の並進運動では, 動摩擦力 $-c\dot{x}$ は, $-\dfrac{d}{d\dot{x}}\left(\dfrac{1}{2}c\dot{x}^2\right)$ によって与えられる.
- 一般化座標および一般化速度で記述された系では, 散逸力が $\dfrac{\partial D(\dot{\boldsymbol{x}})}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}$ となる関数 $D(\dot{\boldsymbol{x}})$ を, 何らかの形で構成することを試みる.

散逸関数 (4)

- 散逸力が $\dfrac{\partial D(\dot{\boldsymbol{x}})}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}$ となる関数 $D(\dot{\boldsymbol{x}})$ がうまく見付かったとき，これを **(Rayleigh の) 散逸関数**という．
- 先に挙げた $Q(\dot{x}) = \dfrac{1}{2}c\dot{x}^2$ は Rayleigh の) 散逸関数の一例である．

散逸関数 (5)

- うまく散逸関数 $Q(\dot{\boldsymbol{x}})$ が見付かった場合，エネルギー散逸構造を含む系の Euler 方程式は次のように変わる．

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{\partial Q(\dot{\boldsymbol{x}})}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}$$

Lagrange 制御システムと状態方程式 (1)

Lagrangean で記述されたシステムを制御システムと捉える場合には, もっとも単純には, Euler 方程式の右辺に入力ベクトル $\boldsymbol{u}$ を追加する. すなわち,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{u} \quad \text{(散逸力なし)}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{\partial Q(\dot{\boldsymbol{x}})}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} + \boldsymbol{u} \quad \text{(散逸力あり)}$$

Lagrange 制御システムと状態方程式 (2)

- Lagrange 制御システムにおいて, 状態変数 $\boldsymbol{z}$ を $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{z}_1^T, \boldsymbol{z}_2^T)^T = (\boldsymbol{x}^T, \dot{\boldsymbol{x}}^T)^T$ とし, 関数 $\boldsymbol{\psi}$ を次のように定義する.

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{z}, \dot{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{u}, t) = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial Q(\dot{\boldsymbol{x}})}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} - \boldsymbol{u}$$

- $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{0}$ が $\dot{\boldsymbol{z}}_2$ について解け, $\dot{\boldsymbol{z}}_2 = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}, t)$ という形になっていると仮定すると $\cdots$

Lagrange 制御システムと状態方程式 (3)

- 次の (非線形) 状態方程式が得られる.

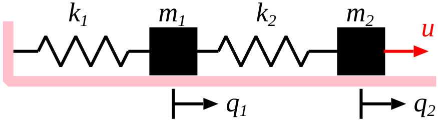
$$\dot{\boldsymbol{z}}_1 = \boldsymbol{z}_2$$
$$\dot{\boldsymbol{z}}_2 = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}, t)$$

- このように解けない場合は以下の形 (ディスクリプタシステム) を取り扱うしかない:

$$\dot{\boldsymbol{z}}_1 = \boldsymbol{z}_2, \quad \boldsymbol{0} = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{z}, \dot{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{u}, t)$$

Lagrange 制御システムと状態方程式 (4)

- 教科書の例を単純化して, 摩擦のない 2 連の振動子 (左端固定) の右端に外力 u を加える問題を考える.



Lagrange 制御システムと状態方程式 (5)

- q_i を質量 m_i の物体のつり合いの位置からの変位とし, 各ばねのばね定数を k_i とする $(i = 1, 2)$. $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2)^T$ とする.
- 運動エネルギーは $\dfrac{1}{2}\left(m_1\dot{q}_1^2 + m_2\dot{q}_2^2\right)$, ポテンシャルエネルギーは $\dfrac{1}{2}\left(k_1 q_1^2 + k_2(q_2 - q_1)^2\right)$

Lagrange 制御システムと状態方程式 (6)

入力 u は Lagrangean とは無関係なので, Euler 方程式の導出が終わった後で追加することにして ⋯

$$L = \frac{1}{2}\left(m_1\dot{q}_1^2 + m_2\dot{q}_2^2\right) - \frac{1}{2}\left(k_1 q_1^2 + k_2(q_2 - q_1)^2\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} = \left(m_1\dot{q}_1, \quad m_2\dot{q}_2\right),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} = -\left((k_1 + k_2)q_1 - k_2 q_2, \quad -k_2 q_1 + k_2 q_2\right)$$

Lagrange 制御システムと状態方程式 (7)

- 以上を $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}}$ に代入すると,
  $m_1\ddot{q}_1 = -(k_1 + k_2)q_1 + k_2 q_2$, $m_2\ddot{q}_2 = k_2 q_1 - k_2 q_2$
- 第 2 式には入力 u が追加されているので,
  $m_2\ddot{q}_2 = k_2 q_1 - k_2 q_2 + u$ のように変更する．第 1 式はそのまま.
- 状態変数を $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)^T$ と取る

Lagrange 制御システムと状態方程式 (8)

以上のように変数を取って整理すると …

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_3 \qquad (\dot{x}_1 = \dot{q}_1 = x_3\text{だから}) \\
\dot{x}_2 &= x_4 \qquad (\dot{x}_2 = \dot{q}_2 = x_4\text{だから}) \\
\dot{x}_3 &= \frac{-(k_1 + k_2)}{m_1} x_1 + \frac{k_2}{m_1} x_2 \\
\dot{x}_4 &= \frac{k_1}{m_2} x_1 - \frac{k_2}{m_m} x_2 + \frac{1}{m_2} u
\end{aligned}
$$

Lagrange 制御システムと状態方程式 (9)

行列を使って書き直すと,

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u,$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{pmatrix}$$

Lagrange 制御システムと状態方程式 (10)

- 先の式が教科書と違うのは, 教科書と異なり, 摩擦がない場合を考えているから
- 摩擦を考慮し, 摩擦に対応する散逸関数を $D = \frac{1}{2}\left(d_1\dot{q}_1^2 + d_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2 + d_3\dot{q}_2^2\right)$ として計算し直すと教科書の式が得られる.
- 教科書とは大文字の使い方が違うので注意.

Hamilton の運動方程式 (1)

- Lagrangean $L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)$ とが与えられているという問題設定に戻る.
- (非線形) 座標変換によって Euler 方程式を別の形に書き直したい.

Hamilton の運動方程式 (2)

- $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{x}$ と書き直し, $\boldsymbol{p} = \left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right)^T$ と定義する. $\boldsymbol{p}$ を一般化運動量と呼ぶ.
- 任意の時刻において $(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}})$ から $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ への変換が非線形座標変換になっているものと仮定する. この仮定のもとで, ある関数 $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ が存在し, $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ である.

Hamilton の運動方程式 (3)

- **Hamiltonian** $H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$ の定義は次の通り:

$$H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) = \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) - L(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t),t)$$

このようにする理由は, Hamiltonian を使って Lagrange 形式を表現し直すと (これを **Hamilo-ton の運動方程式**という) 見通しが良いこと (後述). この計算を次に見てゆく.

Hamilton の運動方程式 (4)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} &= \boldsymbol{p}^T \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \boldsymbol{q}} \\
&= \boldsymbol{p}^T \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} - \boldsymbol{p}^T \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \boldsymbol{q}} \\
&= -\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} = -\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right) = -\left(\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\right)^T
\end{aligned}
$$

Hamilton の運動方程式 (5)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} &= \boldsymbol{\eta}^T + \boldsymbol{p}^T \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \boldsymbol{p}} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \boldsymbol{p}} \\
&= \boldsymbol{\eta}^T + \boldsymbol{p}^T \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \boldsymbol{p}} - \boldsymbol{p}^T \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \boldsymbol{p}} \\
&= \boldsymbol{\eta}^T = \dot{\boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{q}}
\end{aligned}
$$

Hamilton の運動方程式 (6)

- これらをまとめたものは次の通り．これを **Hamilton の運動方程式**という．

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\right)^T$$

$$\dot{\boldsymbol{p}} = -\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T$$

Hamilton 制御システム (1)

- Hamilton 制御システムは, Hamilton の運動方程式に散逸関数に相当する項と制御入力, 出力関数を付加したもの (以下において $\boldsymbol{D}$ は定数行列).
- 次のシートには変数を $(\boldsymbol{q}^T, \boldsymbol{p}^T)^T$ のままにしたものを書くが, $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1^T, \boldsymbol{x}_2^T) = (\boldsymbol{q}^T, \boldsymbol{p}^T)^T$ と置き直すことが一般的 ($\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$).

Hamilton 制御システム (変数 $(\boldsymbol{q}^T, \boldsymbol{p}^T)^T$)

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\right)^T$$

$$\dot{\boldsymbol{p}} = -\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^T - \boldsymbol{D}\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\right)^T + \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\right)^T$$

Hamilton 制御システム: (変数 $\boldsymbol{x}$)

$$\dot{x} = \left(\mathcal{J} - \mathcal{R}\right)\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T + \boldsymbol{G}\boldsymbol{u}$$

$$y = \boldsymbol{G}^T \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T$$

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_n \\ -\boldsymbol{I}_n & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \mathcal{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}, \boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{I}_n$ は n 次の単位行列

port Hamiltonian システム (1)

Hamilton 制御システムの行列 $\mathcal{J}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{G}$ を $\boldsymbol{x}$ の関数で置き換えたシステムは **port(-controlled) Hamiltonian システム**と呼ばれ, 近年, 活発に研究されている.

$$\dot{x} = \Big(\mathcal{J}(\boldsymbol{x}(t)) - \mathcal{R}(\boldsymbol{x}(t))\Big)\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{u}$$

$$y = (\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}(t)))^T\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T$$

port Hamiltonian システム (2)

ただし, 以下の条件が成り立つものとする.

- $\mathcal{J}(\boldsymbol{x}(t))$ は $\mathcal{J}(\boldsymbol{x}(t)) = -(\mathcal{J}(\boldsymbol{x}(t)))^T$ を満たす関数行列で,
- $\mathcal{R}(\boldsymbol{x}(t)) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}(t)) \end{pmatrix}$
- $\boldsymbol{x}(t)$ を固定したとき $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}(t))$ は半正定対称行列とする.

port Hamiltonian システム (3)

- port Hamilton システムの具体例は, メカトロニクスや電気回路などで見られる
- 系に自然なエネルギー散逸構造が定まっているため, 制御系設計が比較的容易で, ロバスト性が高いことがメリット
- 一方で, 適用できる対象が限定され, かつ設計の自由度が低いことがデメリット

Lagrange の未定乗数法 (1)

- 運動方程式を立てるとき, 運動に束縛条件が付いた状況を取り扱わなければならないことがある
- たとえば円柱上の物体が斜面を滑らずに転がる, といった場合
- 一般化座標 $\boldsymbol{q}$ のもとで, ベクトル値関数 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q})$ が与えられ ($\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}) \in \mathbb{R}^l$ とする), $\boldsymbol{C}(q) = \mathbf{0}$ を満たすように運動方程式を立てたい, という状況を考える.

Lagrangeの未定乗数法 (2)

- このような状況で役に立つのが **Lagrangeの未定乗数法**. 以下ではこの手法について述べる.
- $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^l$ とし, Lagrangean L のかわりに, $L_C = L + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q})$ という関数を考える.
- $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{0}$ であれば $L_C = L$ である.
- $\dfrac{\partial L_C}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q})^T$ は束縛条件に対応する関数である.

Lagrange の未定乗数法 (3)

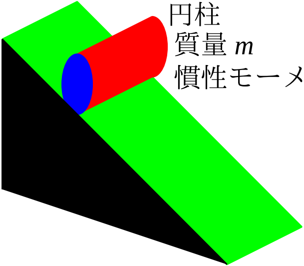
- したがって, 以下の連立 (微分) 方程式を解けば, 束縛条件がある問題を取り扱うことができる.

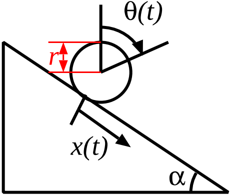
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_C}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} = \frac{\partial L_C}{\partial \boldsymbol{q}}$$
$$\frac{\partial L_C}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{0}$$

- このような手法を **Lagrange の未定乗数法**という.

Lagrange の未定乗数法 (4)

例として円柱が斜面を転がり落ちる問題を考える.





横から見た図

Lagrange の未定乗数法 (5)

- 円柱の横滑りは十分小さく無視できると仮定する.
- 円柱の質量は m, 断面の半径は r, 慣性モーメントは I とする.
- 斜面の勾配は α とする.
- 運動開始時を基点として, 円柱の設置点の斜面に沿った移動距離を $x(t)$, 円柱の回転角度を $\theta(t)$ とする. $\theta(t)$ は 360 度 (2π) を越えても零に戻さないことにする.

Lagrange の未定乗数法 (6)

- 時刻 t における円柱の運動エネルギーは $\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}I\dot{\theta}^2$ で, ポテンシャルエネルギーは $-mgx\sin\alpha$
- よって, $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mgx\sin\alpha$
- 横滑りしないなら $x(t) - r\theta(t) = 0.$

ゆえに $L_C = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mgx\sin\alpha + \lambda(x - r\theta)$

Lagrange の未定乗数法 (7)

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_C}{\partial \dot{x}}\right) &= \frac{\partial L_C}{\partial x} &\Rightarrow\quad & m\ddot{x} = mg\sin\alpha + \lambda \\
\left(\frac{\partial L_C}{\partial \dot{\theta}}\right) &= \frac{\partial L_C}{\partial \theta} &\Rightarrow\quad & I\ddot{\theta} = -r\lambda \\
\frac{\partial L_C}{\partial \lambda} &= 0 &\Rightarrow\quad & x = r\theta
\end{aligned}
$$

- 第 2 式から $\lambda = -I\ddot{\theta}/r$,
- 第 3 式を 2 回微分して $\ddot{x} = r\ddot{\theta}$
- これらをまとめて $\lambda = -I\ddot{x}/r^2$

Lagrange の未定乗数法 (8)

- $\lambda = -\dfrac{I\ddot{x}}{r^2}$ を $m\ddot{x} = mg\sin\alpha + \lambda$ に代入すると, $\left(m + \dfrac{I}{r^2}\right)\ddot{x} = mg\sin\alpha$； この微分方程式を解くと円柱の運動が決まる
- I の影響で円柱の移動が遅くなっており, 物理的には $m\ddot{x} = mg\sin\alpha + \lambda$ における $\lambda = -\dfrac{I\ddot{\theta}}{r} = -\dfrac{I\ddot{x}}{r^2}$ の項が摩擦に相当する.

Lagrange の未定乗数法 (9)

- 先に述べた解は「僅かな横滑り」を無視した極限.
- 物体の断面の形状が複雑などの理由で, 物体の回転軸と質量中心が必ずも一致しない運動には, 「斜面を滑らずに転がる」という条件が物体の質量中心の上下動を発生させることがあり得る．この場合には, 「斜面を滑らずに転がる」という条件を実現できない可能性がある.

参考文献

- 畑 (益川監修, 植松, 青山編), 解析力学, 東京図書, 2014
- 原島, 力学, 3 訂版, 裳華房, 1985
- W. M. Haddad and V. Chellaboina, Nonliner Dynamical Systems and Control, Princeton University Press, 2008
- 野波, 水野 (編集代表), 制御の事典, 朝倉書店, 2015