システム工学 I

第 4 回

状態空間

微分方程式の解の存在と一意性 (1)

- 前回の講義で, 多くの動的システムが微分方程式で表現できることを学んだ.
- 制御対象をモデリングした微分方程式の解は, 実システムの物理的挙動に対応する筈である.
- したがって, 正しくモデリングされたシステムは解を持つ筈なのだが ⋯

微分方程式の解の存在と一意性 (2)

- モデリングは人間がおこなう行為であるから, 何かの間違いにより解が存在しない微分方程式モデルができてしまうことはあり得る.
- シミュレーションで制御対象のモデルを用いるのは, モデルの挙動が実システムの挙動と似ていることを期待しているからである.

微分方程式の解の存在と一意性 (3)

- 解が無数にある場合には, シミュレー ション により制御対象の挙動を予想することは困難.
- モデリングの際にはふつうは制御対象を単純化するので, モデルと実システムには差異がある. この差異が解に与える影響が大きい場合にも, シミュレー ション により制御対象の挙動を予想することは困難.

微分方程式の解の存在と一意性 (4)

- まとめると, 微分方程式モデルが有用であるためには, 以下の 3 項目が必要となる.
  - ▷ 解が存在すること (存在性)
  - ▷ 解が一意的であること (一意性)
  - ▷ 初期値やパラメータが少しだけ変わったとき, 解も少しだけ変わること

微分方程式の解の存在と一意性 (5)

- 3 番目の項目は曖昧な書き方になっているが，解が初期値やパラメータの連続関数あるいは微分可能関数になっていれば，この要求は満たされる．
- これらが保証されるための見通しの良い十分条件が知られている．

微分方程式の解の存在と一意性 (6)

- 以下では, 次の形の連立微分方程式を考える.

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

- $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ とし, $D = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \leq b\}$ とする. 関数 $\boldsymbol{f}$ の定義域は D を含む開集合で, 値域は $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする.

微分方程式の解の存在と一意性 (7)

- $\boldsymbol{f}$ は D 上連続で，かつ t に関して一様に $\boldsymbol{x}$ について Lipschitz 連続，すなわち $\exists K > 0$, $\forall (t, \boldsymbol{x}_1), (t, \boldsymbol{x}_2) \in D$, $\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_2) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_1)\| \leq K\|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1\|$ と仮定する．
- $M = \max_{(t,x)\in D} \|f(t, \boldsymbol{x})\|$, $h = \min\{a, b/M\}$ とする．

微分方程式の解の存在と一意性 (8)

- 以上の条件が成り立つとき, 微分方程式 $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ は区間 $\{t : |t - t_0| \leq h\}$ において唯一の解 (**一意解**) を持つ (**微分方程式の解の存在と一意性の定理**). 解は初期値の連続関数になる.
- この解を $\boldsymbol{\varphi}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$ と書く.

微分方程式の解の存在と一意性 (9)

- 次に, 微分方程式に p 次のパラメータベクトル $\boldsymbol{\lambda}$ が含まれる場合を考える (p の値は重要でない).

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}), \ \ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

微分方程式の解の存在と一意性 (10)

- $\boldsymbol{f}$ は D 上で t および $\boldsymbol{\lambda}$ に関して一様に $\boldsymbol{x}$ について Lipschitz 連続であれば，微分方程式 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$, $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ の解はパラメータの連続関数になることが示せる．$\boldsymbol{f}$ が各変数について k 階連続微分可能であれば，解は $\boldsymbol{\lambda}$ について k 階連続微分可能な関数になる．

微分方程式の解の存在と一意性 (11)

- 所与の初期値に対して微分方程式が一意解を持つか否かという問題を研究したのは Cauchy. よって, この問題を Cauchy 問題ともいう.
- 解が一意的であるための必要十分条件は岡村によって見出だされた (1940).

微分方程式の解の存在と一意性 (12)

- 先に述べたように, 微分方程式の解の存在と一意性は $\{t : |t - t_0| \leq h\}$ で保証されるが $\cdots$
- ある t_1 を取り, $(t_0, \boldsymbol{\varphi}(t_1, t_0, \boldsymbol{x}_0))$ を初期時刻および初期値として再び先の定理を適用すると, 解が存在する時間軸上の区間を延長できる. これを繰り返すことにより, それ以上延長することができない解が得られる.

入出力微分方程式の別表現 (1)

- 微分方程式はつねに一階であるとは限らない.
- 解の存在と一意性の定理が適用できるようにするために, 高階の微分方程式を 1 階の連立微分方程式に変形することを考える.
- 例として, $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = 5\dfrac{du}{dt} + 4u$ という微分方程式を考える (u は入力, y は出力).

入出力微分方程式の別表現 (2)

- 次の連立微分方程式を考える:

$$\frac{dx_1}{dt} = -3x_1 + x_2 + 5u$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 4u$$

- 第1式を微分して, そこに第2式を代入し, 移項すると $\cdots$

入出力微分方程式の別表現 (3)

- $$\frac{d^2x_1}{dt^2}+3\frac{dx_1}{dt}+2x_1=5\frac{du}{dt}+4u$$
- もとの微分方程式は
  $$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=5\frac{du}{dt}+4u$$
- 同じ微分方程式であったことがわかる

入出力微分方程式の別表現 (4)

- 要するに, 連立 1 次微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -3x_1 + x_2 + 5u \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 4u \end{cases}$$

は, $y = x_1$ とすると, 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = 5\dfrac{du}{dt} + 4u$ の別表現

入出力微分方程式の別表現 (5)

- 入出力微分方程式を Laplace 変換すると伝達関数が得られるのであるが, これらに対応する連立 1 次微分方程式を求めることを伝達関数の実現という.
- 先ほどの例は $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = 5\dfrac{du}{dt} + 4u$ に対応する伝達関数のひとつの実現である.

状態方程式 (1)

- システムの挙動を完全に記述する (連立)1 次微分方程式を状態方程式という.
- 状態方程式の一般系は, $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ である. $\boldsymbol{u}$ は入力である. $\boldsymbol{x}$ を状態変数という. 入力, 状態変数ともスカラーのこともベクトルのこともある.

状態方程式 (2)

- 状態方程式を使うときには, これと, 状態変数と出力 $\boldsymbol{y}$ の関係をあらわす式 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ を組み合わせる. こちらの式を出力方程式という. $\boldsymbol{y}$ は出力であり, スカラーのこともベクトルのこともある.

状態方程式 (3)

- 先の例で伝達関数の実現によって得られたのは, 状態方程式の 1 例である.
- $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{y}$ は時間の関数なのであるが, $\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{u}(t)$, $\boldsymbol{y}(t)$ と書くかわりに, 変数 (時間) を略して上記のように書くことも多い.
- 先に得られた例を改めて書くと $\cdots$

状態方程式と出力方程式の例

状態方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -3x_1 + x_2 + 5u \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 4u \end{cases}$$

出力方程式

$$y = x_1$$

入出力微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 5\frac{du}{dt} + 4u$$

状態方程式 (5)

- 状態方程式あるいは出力方程式の右辺が $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{u}$ だけではなく時間 t に明示的に依存するとき, そのようなシステムを時変システムという. 時変システムでないシステムを時不変システムという.

状態方程式 (6)

- 状態方程式および出力方程式の右辺が $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$ と (時変) 行列の積であらわされるとき:

$$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u},$$

$$\boldsymbol{h}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}$$

このシステムを**線形システム**という．線形でないシステムを**非線形システム**という．

状態方程式 (7)

- 今まで $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{y}$ の次元を明示してこなかったが, 当面 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^l$ とする.

- $\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{B}(t)$, $\boldsymbol{C}(t)$, $\boldsymbol{D}(t)$ は, 状態方程式の右辺が矛盾なく定義できるように定められているものとする (これを, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{y}$ に**適合する** (compatible) と呼ぶことがある.

状態方程式 (8)

- 具体的に書くと, $\boldsymbol{A}(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B}(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\boldsymbol{C}(t) \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $\boldsymbol{D}(t) \in \mathbb{R}^{l\times m}$ はである.
- $\boldsymbol{A}(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ という記法には不慣れかもしれないが, 時刻 t を変数とし, 各時刻で $\mathbb{R}^{n\times n}$ の値を取る関数という意味である. $\boldsymbol{B}(t)$, $\boldsymbol{C}(t)$, $\boldsymbol{D}(t)$ についても同様.

状態方程式 (9)

- 時変システムでは, システムの挙動が初期時刻に応じて変わる． 一方, 時不変システムの挙動は初期時刻に依存しない.
- 線形システムには, 重ね合わせの原理が成り立つという, 非線形システムにはない顕著な特徴がある.

状態方程式 (10)

- このため, 線形時不変システム (Linera Time-Invariant System, LTI システム) に対する制御系の解析および設計はそうでないシステムと比べて容易である. こんにち, 線形時不変システムを対象とした制御理論は, 一応完成された状態にある. 時変システムおよび非線形システムでは, そのようなことはない.

線形時不変システムの状態方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^l,$$

$$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times m},$$

$$\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{l\times n}, \boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{l\times m}$$

線形時変システムの状態方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^l,$$
$$\boldsymbol{A}(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{B}(t) \in \mathbb{R}^{n\times m},$$
$$\boldsymbol{C}(t) \in \mathbb{R}^{l\times n}, \boldsymbol{D}(t) \in \mathbb{R}^{l\times m}$$

状態方程式 (13)

線形システムの状態方程式と出力方程式をまとめて次のように略記することがある (丸括弧ではなく角括弧を使うこともある).

$$\text{時不変システム：}\quad G = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \hline \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{array}\right)$$

$$\text{時変システム：}\quad G = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}(t) & \boldsymbol{B}(t) \\ \hline \boldsymbol{C}(t) & \boldsymbol{D}(t) \end{array}\right)$$

非線形システムの線形近似 (1)

- 非線形システム $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ は取り扱いが難しいため，線形システムで近似し，近似システムに基づく制御系の解析および設計をおこなうということが，よく行われる．
- 時変システムは取り扱いが繁雑なので，以下では時不変システムを取り扱う．

非線形システムの線形近似 (2)

- 非線形システム $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ を考える (右辺の t の項が消えたことに注意).
- $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ としたとき, $\{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}\}$ を満たす点を, このシステムの**平衡点**という.

非線形システムの線形近似 (3)

- 平衡点の近傍では, システムの挙動は, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ を Taylor 展開して高次項を無視したものに近いことが期待される.
- $\boldsymbol{x}_*$ を平衡点とし, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_*, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ に注意すると, 以下の近似が得られる.

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \simeq \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_* (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_*) + \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_* \boldsymbol{u}$$

非線形システムの線形近似 (4)

- 出力方程式 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ についても,

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \simeq \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_*, \boldsymbol{0}) + \left.\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_* (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_*) + \left.\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_* \boldsymbol{u}$$

と近似される ($\simeq$ は近似を意味する).

非線形システムの線形近似 (5)

- 上記において $\left.\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_*$ 等は, 関数 $\boldsymbol{f}(\cdot)$ を偏微分して得られる関数に $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{x}_*, \boldsymbol{0})$ を代入して得られる行列を意味する.
- $\left.\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_* = \boldsymbol{A}$, $\left.\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_* = \boldsymbol{B}$,
  $\left.\dfrac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_* = \boldsymbol{C}$, $\left.\dfrac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_* = \boldsymbol{D}$ とおく.

非線形システムの線形近似 (6)

- 状態空間と出力方程式の原点を変えて $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_*$, $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_*, \mathbf{0})$ とすると, 次のような近似線形システムが得られる.

$$
\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\
\boldsymbol{\eta} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}
\end{aligned}
$$

非線形システムの線形近似 (7)

時変システムでは, $\boldsymbol{x}_*$ および $\boldsymbol{h}(t, \boldsymbol{x}_*, \boldsymbol{0})$ が時間に依存しないことを仮定しないと, 同様の計算はうまくいかない. これを仮定すれば, 時不変システムの場合と同様に, 次のような近似線形システムが得られる:

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}$$

状態方程式と入出力微分方程式 (1)

- 先に $\dfrac{d^2y}{dt^2}+3\dfrac{dy}{dt}+2y=5\dfrac{du}{dt}+4u$ の実現 (状態方程式表現) を求めた.
- 話を一般化して, $\dfrac{d^ny}{dt^n}+a_{n-1}\dfrac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_0y=b_m\dfrac{d^mu}{dt^m}+b_{m-1}\dfrac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}}+\cdots+b_0u$ の実現を求めることを考える (ただし $b_m\neq 0$).

状態方程式と入出力微分方程式 (2)

- 物理的なシステムでは, 入力の純粋な微分が出力にあらわれることは普通ないので, $n \geq m$ となる. この条件を満たすシステムをプロパーなシステムと呼ぶ. $n > m$ であれば, 厳密にプロパーなシステムと呼ぶ.
- 以下では先のシステムはプロパーであると仮定する.

状態方程式と入出力微分方程式 (3)

- まず, $m = n$ の場合を考える. このとき, 微分方程式の右辺は $b_n \dfrac{d^n u}{dt^n} + b_{n-1} \dfrac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \cdots + b_0 u$ で, $b_n \neq 0$ である.
- $\eta = y - b_n u$ と定義すると, $y = \eta + b_n u$ である. これをもとの微分方程式に代入すると…

状態方程式と入出力微分方程式 (4)

- $\left(\frac{d^n\eta}{dt^n} + b_n\frac{d^n u}{dt^n}\right) + a_{n-1}\left(\frac{d^{n-1}\eta}{dt^{n-1}} + b_n\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}\right) + \cdots + a_0(\eta + b_n u) = b_n\frac{d^n u}{dt^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} + \cdots + b_0 u$
- $\beta_j = b_j - a_j b_n$ と定義して整理すると・・・ $(0 \le j \le n-1)$

状態方程式と入出力微分方程式 (5)

- $\dfrac{d^n\eta}{dt^n} + + a_{n-1}\dfrac{d^{n-1}\eta}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0\eta = \beta_{n-1}\dfrac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} + \beta_{n-2}\dfrac{d^{n-2}u}{dt^{n-2}} + \cdots + \beta_0 u$
- ふつうは $m = \max\{j : \beta_j \neq 0\}$ とおいて β_{m+1} から β_{n-1} までが掛かった項を省略するが, ここでは説明の便宜上残す.

天下り的であるが, 次の連立微分方程式を考える.

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= -a_{n-1}x_1 + x_2 + \beta_{n-1}u \\
\frac{dx_2}{dt} &= -a_{n-2}x_1 + x_3 + \beta_{n-2}u \\
&\cdots \\
\frac{dx_{n-1}}{dt} &= -a_1x_1 + x_n + \beta_1u \\
\frac{dx_n}{dt} &= -a_0x_1 + \beta_0u
\end{aligned}
$$

- 第 1 式を t に関して微分して第 2 式を代入すると
$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -a_{n-1}\frac{dx_1}{dt} + (-a_{n-2}x_1 + x_3 + \beta_{n-2}u) + \beta_{n-1}\frac{du}{dt}$
- 上式を整理してから t に関して微分して第 3 式を代入すると $\frac{d^3x_1}{dt^3} = -a_{n-1}\frac{d^2x_1}{dt^2} - a_{n-2}\frac{dx_1}{dt} + (-a_{n-3}x_1 + x_4 + \beta_{n-3}u) + \beta_{n-1}\frac{d^2u}{dt^2} + \beta_{n-2}\frac{du}{dt}$
- 以下同様にして $\cdots$

$$\frac{d^n x_1}{dx_n} = -a_{n-1}\frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}} - a_{n-2}\frac{d^{n-2}x_1}{dt^{n-2}} - \cdots - a_0 x_n$$
$$+ \beta_{n-1}\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} + \beta_{n-2}\frac{d^{n-2}u}{dt^{n-2}} \cdots + \beta_0 u$$

- これはもとの微分方程式と同じだから ⋯
- $y = x_1 + b_n u$ という出力方程式と組み合わせると, 入出力微分方程式の実現が求められる.

状態方程式の形に直すと ($\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$):

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \left(\begin{array}{c|ccc}
-a_{n-1} & 1 & & \\
 & & \ddots & \\
-a_1 & & & 1 \\
\hline
-a_0 & & &
\end{array}\right), \quad &
\boldsymbol{B} &= \begin{pmatrix} \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{C} &= (1, \quad \cdots \quad), & D &= b_n
\end{aligned}
$$

(空白の部分は零)

状態方程式と入出力微分方程式 (10)

- 以上のようにして, 高階の入出力微分方程式の状態空間表現を求めることができる.
- 高階の連立微分方程式についても同様 (ただし入力あるいは出力はベクトルになる).
- 一方, 入出力微分方程式の状態空間表現は一意的でない.

状態方程式と入出力微分方程式 (11)

- $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}$ という状態方程式を考える．対応する伝達関数行列 (要素が伝達関数である行列) は, $\boldsymbol{Y}(s) = (\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D})\boldsymbol{U}(s)$ である．

状態方程式と入出力微分方程式 (12)

- $\boldsymbol{T}$ を正則行列とし, $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$, $\overline{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}$, $\overline{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}$ とおき, $\left(\begin{array}{c|c} \overline{\boldsymbol{A}} & \overline{\boldsymbol{B}} \\ \hline \overline{\boldsymbol{C}} & \boldsymbol{D} \end{array}\right)$ という状態方程式を考える.
- $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T}$ に注意する.

状態方程式と入出力微分方程式 (13)

$$
\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{C}}(s\boldsymbol{I} - \overline{A})^{-1}\overline{\boldsymbol{B}} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}\left(s\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\right)\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B} \\
&= \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}\left(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B} \\
&= \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} \text{ だから } \cdots
\end{aligned}
$$

- $\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \hline \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{array}\right)$ と $\left(\begin{array}{c|c} \overline{\boldsymbol{A}} & \overline{\boldsymbol{B}} \\ \hline \overline{\boldsymbol{C}} & \boldsymbol{D} \end{array}\right)$ は同じ入出力微分方程式を定める.

状態方程式と入出力微分方程式 (14)

- 状態方程式には, 正則行列を用いた座標変換の分の自由度がある

- この自由度を使ってシステムの解析および設計に都合がよい形にシステムを変形することが, よくおこなわれる (可制御標準形, 可観測標準形など；システム工学 II)

極零相殺 (1)

- 入出力微分方程式 (伝達関数) から対応する状態方程式を求める手法は先に述べたが ⋯
- 始めから状態方程式形でモデリングがなされることもある (航空宇宙やロボットの分野では特に)
- そのような場合に, 一旦状態方程式から伝達関数を求め, 伝達関数による制御をおこなうと, 問題が発生することがある.

極零相殺 (2)

- $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = 0$ とし (D はスカラーなので太字にしていない), $\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \hline \boldsymbol{C} & D \end{array}\right)$ という線形時不変システムを考える.

極零相殺 (3)

- $\boldsymbol{A}$ は 2 個の固有値を持ち，それらは 1 と -1 である．
- $s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{pmatrix}$ であり，2 次の逆行列を求める公式の適用により以下が得られる．

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{s^2 - 1}\begin{pmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{pmatrix}$$

が得られる．

極零相殺 (4)

$$\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} = \frac{1}{s^2-1}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s & 1\\ 1 & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{s-1}{s^2-1} = \frac{1}{s+1}$$

- このような場合は, $\boldsymbol{A}$ の固有値 (この例では 1) が入出力関係からは見えなくなる.

極零相殺 (5)

- 伝達関数の極および零点とは, その分母多項式および分子多項式の零点のことをいう.
- 状態方程式から伝達関数を求める際, 機械的に求めた伝達関数の極と零点が相殺し, 入出力関係にはあらわれないことがある. これを極零相殺という.

極零相殺 (6)

- 極零相殺がおこった場合, $\boldsymbol{A}$ の相殺された固有値は, 入出力関係には影響を与えないが, なくなったわけではない.
- その固有値に対応する微分方程式の解が時間とともに発散する場合には, システムが破壊され, それが入出力関係からは検出できないという事態も発生し得る.

線形代数の復習 (4-1)

- 行列式の定義は配付資料の通り.
- 行列式を計算する際には, 定義にしたがって直接計算するのではなく, 行基本変形によって行列を上三角行列に変形した方がよい.
- このためには, 以下の 2 種類の演算を用いる.
  - ▷ 行列のある行に別の行の定数倍を加える,
  - ▷ 行列のある行と別の行を交換する

線形代数の復習 (4-2)

- 行列 $\boldsymbol{A}$ に先の第一の操作を施したものを $\boldsymbol{A}'$ とすると, $\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{A}'$ である.
- 行列 $\boldsymbol{A}$ に先の第二の操作を施したものを $\boldsymbol{A}'$ とすると, $\det \boldsymbol{A} = (-1) \times \det \boldsymbol{A}'$ である.
- 第二の演算を施すときには, -1 のべきの部分を忘れないように注意すること.

線形代数の復習 (4-3)

- 以下の上三角行列では, どの定義を使っても,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

である ($*$ の部分の数値は結果に影響しない. 空白は零).