電 301 数値解析
第 14 回
微分方程式の
数値解法 (4)

5 点差分公式の行列表現 (1)

- 前回の講義で, 2 変数 2 階線形楕円型偏微分方程式の解法として, 5 点差分公式
$$v_{i+1,j}+v_{i-1,j}+v_{i,j+1}+v_{i,j-1}-4v_{i,j}=h^2 f_{i,j}$$
を紹介したが, これを行列で表現する方法の一般はまだ説明していなかった.
- 前回の小テストがこれに対するヒントを与えているので, まずこれを復習する.

5 点差分公式の行列表現 (2)

格子点				5 点差分公式
	g_7	g_8		$g_1 + v_{12} + v_{21} + g_3 - 4v_{11} = h^2 f_{11}$
g_5	$\boxed{v_{21}}$	$\boxed{v_{22}}$	g_6	$g_2 + g_4 + v_{22} + v_{11} - 4v_{12} = h^2 f_{12}$
g_3	$\boxed{v_{11}}$	$\boxed{v_{12}}$	g_4	$v_{11} + v_{22} + g_7 + g_5 - 4v_{21} = h^2 f_{21}$
	g_1	g_2		$v_{12} + g_6 + g_8 + v_{21} - 4v_{22} = h^2 f_{22}$

5 点差分公式の行列表現 (3)

格子点

$$
\begin{array}{ccc}
 & v_{21} & \\
g_3 & \boxed{v_{11}} & v_{12} \\
 & g_1 &
\end{array}
$$

5 点差分公式

$g_1 + v_{12} + v_{21} + g_3 - 4v_{11} = h^2 f_{11}$
第 1 行目の公式では左の部分を参照する.
v_{11}のまわりの要素を足し合わせてから
v_{11}の 4 倍を引いたものが $h^2 f_{11}$
と等しいという式. 第 2 行目以降も同様.

5 点差分公式の行列表現 (4)

この場合の 5 点差分公式の行列表現は以下の通り.

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right)\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 + g_3 \\ g_2 + g_4 \\ g_5 + g_7 \\ g_6 + g_8 \end{pmatrix} - h^2 \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{21} \\ f_{22} \end{pmatrix}$$

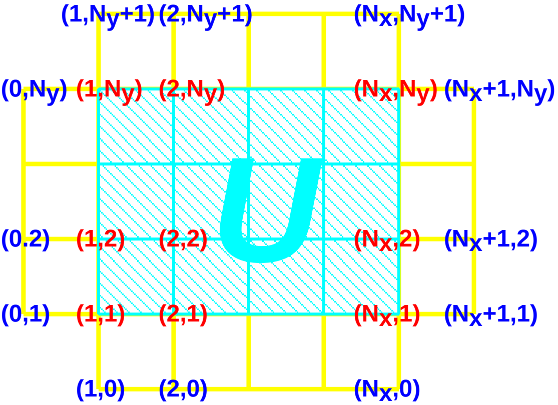
v_{ij} が v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22} という順で並べられていることが重要.
これを一般化する ([山本]).

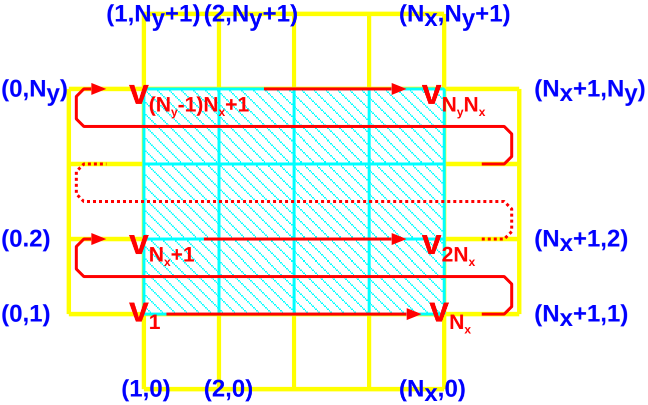
5 点差分公式の行列表現 (5)

- x 軸, y 軸にそれぞれ N_x 個, N_y 個の格子点が取られているものとする. 前回と同様に, 格子点を, $(1, 1)$, $\ldots$, $(N_x, 1)$, $\ldots$, $(1, N_y)$, $\ldots$, (N_x, N_y) であらわす.

- 境界を, $(1, 0)$, $\ldots$, $(N_x, 0)$, $(1, N_y + 1)$, $\ldots$, $(N_x, N_y + 1)$ $(0, 1)$, $\ldots$, $(0, N_y)$, $(N_x + 1, 1)$, $\ldots$, $(N_x + 1, N_y)$ とし (次ページ図), 縦ベクトル $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_{N_x N_y})^T$ をその次のページのように定義する. 続いて, 同じ並べ方で縦ベクトル $\boldsymbol{f}$ を構成する. さらに, 行列 $\boldsymbol{A}$, ベクトル $\boldsymbol{g}$ を後述のように構成すると ⋯

$$\boxed{5\ \text{点差分方程式は}\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g} - h^2 \boldsymbol{f}\ \text{と書ける}}$$


(1,Ny+1)
(2,Ny+1)
(Nx,Ny+1)
(0,Ny)
(1,Ny)
(2,Ny)
(Nx,Ny)
(Nx+1,Ny)
U
(0.2)
(1,2)
(2,2)
(Nx,2)
(Nx+1,2)
(0,1)
(1,1)
(2,1)
(Nx,1)
(Nx+1,1)
(1,0)
(2,0)
(Nx,0)


(1,Ny+1)
(2,Ny+1)
(Nx,Ny+1)
(0,Ny)
V(Ny-1)Nx+1
VNyNx
(Nx+1,Ny)
(0.2)
VNx+1
V2Nx
(Nx+1,2)
(0,1)
V1
VNx
(Nx+1,1)
(1,0)
(2,0)
(Nx,0)

N_x 次の正方行列 $\boldsymbol{H}$ を次式左のように定義する．また, $\boldsymbol{I}$ を N_x 次の単位行列とする．これらを使って, N_xN_y 次の正方行列 $\boldsymbol{A}$ を次式右のように定義する．

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{H} & -\boldsymbol{I} & & & \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{H} & -\boldsymbol{I} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -\boldsymbol{I} \\ & & & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{H} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g} = (& g_{01} + g_{10}, g_{20}, \ldots, g_{N_x-1,0}, g_{N_x,0} + g_{N_x+1,1}; g_{0,2}, 0, \ldots, 0, g_{N_x+1,2}; \\ & \ldots; g_{0,N_y-1}, 0, \ldots, 0, g_{N_x+1,N_y-1}; \\ & g_{0,N_y} + g_{1,N_y+1}, g_{2,N_y+1}, \ldots, g_{N_x-1,N_y+1}, g_{N_x,N_y+1} + g_{N_x+1,N_y})^T \end{aligned}$$

とする．

Laxの同等定理 (1)

- 独立変数の一部に時間を含む方程式(放物型, 双曲型など) は, 解が時間に関して正の方向に進展してゆくという楕円型とは異なる性質があるため, その数値解の収束に関して楕円型と異なる分析が必要になる.
- これに関し, Laxの同等定理と呼ばれる事実が知られている ([河村]).

Lax の同等定理 (2)

- 線形偏微分方程式 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = Lu$ の初期値問題を考える．独立変数を (x, t) とする．L は (x に関する) 線形微分作用素で, 初期値はこの偏微分方程式が一意解を持ち, その解がパラメータに対して連続となるように取られているものとする．

Lax の同等定理 (3)

- 格子点における $u(x_j, t_n)$ の近似解 $v(x_j, t_n)$ を求める問題を考える ($t_{n+1} - t_n = \Delta_t$, $x_{j+1} - x_j = \Delta_x$).
  Δ_x と Δ_t は独立ではなく, ある関数 h(ただし $\lim_{\theta \to 0} h(\theta) = 0$) が存在し, $\Delta_x = h(\Delta_t)$ となっているものとする.
- $\dfrac{\partial u}{\partial t} = Lu$ を次のように差分近似する.
  $$v(x_j, t_{n+1}) = S(\Delta_x, \Delta_t) v(x_j, t_{n+1})$$

Lax の同等定理 (4)

- $u(x, t+\Delta_t) - S(h(\Delta_t), \Delta_t)u(x,t) = o(\Delta_t)$ となるとき, この公式はもとの偏微分方程式に適合するという.
  $S(\Delta_x, \Delta_t)$ は L に対応する差分演算子である.
  $f(\theta) = o(\theta)$ という記法は, $\lim_{\theta\to 0, \theta\neq 0} f(\theta)/\theta = 0$ を意味する.
- $\exists T > 0$, $\exists T > 0$, $\forall n$, $\forall \Delta_t$, $0 < n\Delta_t < T \Rightarrow \|S\| < C$ となるとき, S は安定であるという. ただし $\|S\|$ は作用素ノルム.

Lax の同等定理 (5)

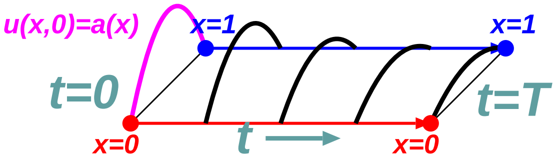
- Lax の同等定理が保証するのは次の事実である: $v(x_j, t_{n+1}) = S(\Delta_x, \Delta_t) v(x_j, t_{n+1})$ が $\dfrac{\partial u}{\partial t} = Lu$ に適合し, 安定であれば, $\Delta_t \to 0$ とすると $v(x_j, t_n$ はもとの偏微分方程式の解に収束する ([河村]).

放物型偏微分方程式の数値解法 (1)

- 議論の簡単のため, 空間を 1 次元に限り, 独立変数を (x, t) とし ($x \in [0, 1]$, $t \in [0, T]$), 定係数の 2 階線形放物型偏微分方程式の差分法による解法を述べる. 時刻 $t = 0$ における初期条件 $u(x, 0) = a(x)$ と, 境界条件 $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$ が与えられているものとする.
- 以下の議論の典拠はおもに [田端][河村]

放物型偏微分方程式の数値解法 (2)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + f, u(x,0) = a(x), u(0,t) = u(1,t) = 1.$$



- 2 変数の定係数 2 階線形放物型偏微分方程式は $\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + f$ であるが, $\tau = at$ とすると, $\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial \tau}$ であるから, $a\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + f$ となり, この両辺を a で割って $\bar{f} = f/a$ とすれば, $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \bar{f}$ という形になる. この講義ではこの形への変形はすでに済んでいることを前提としている.
- 熱伝導方程式の場合は, $f(x,t)$ は外部熱源に相当する.
- 境界条件が $u(0,t) = g_0(t), u(1,t) = g_1(t)$ となっている場合には, $\bar{a}(x) = a(x) - (1-x)g_0(0) - xg_1(0)$, $\bar{f} = (1-x)g_0'(t) - xg_1'(t)$ として, $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} + \bar{f}, w(x,0) = \bar{a}(x), w(0,t) = u(1,t) = 1$ を解き, $u(x,t) = w(x,t) + (1-x)g_0(t) + xg_1(t)$ とすれば, もとの問題の解が得られる. よって, $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + f, u(x,0) = a(x), u(0,t) = u(1,t) = 1$. という単純化した問題を考えても一般性は失われない.

放物型偏微分方程式の数値解法 (4)

- $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + f, u(x,0) = a(x), u(0,t) = u(1,t) = 1$ を離散近似するもっとも単純な方法は, $\frac{\partial u}{\partial t}$ を前進差分近似し, 楕円型と同様に $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 u}$ を中心差分近似する方法である. これを **Euler の陽解法**という. この方法は, $\Delta_t/(\Delta_x)^2 \leq 1/2$ としなければ安定にならない.

放物型偏微分方程式の数値解法 (4)

- 前進 Euler 法の問題を解決するため，$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} + f$ の右辺の近似を評価する際に，(x_j, t_{n+1}) と (x_j, t_n) における重み付き平均を取る方法が用いられる．これを θ 法という．θ は 0 以上 1 以下のパラメータである．具体的な形は次ページに示す通り．

$$
\frac{v(x_j, t_{n+1}) - v(x_j, t_n)}{\Delta_t}
$$

$$
= \theta \, \frac{v(x_{j+1}, t_{n+1}) - 2v(x_j, t_{n+1}) + v(x_{j-1}, t_{n+1})}{\Delta_x^2}
$$

$$
+ (1-\theta) \, \frac{v(x_{j+1}, t_n) - 2v(x_j, t_n) + v(x_{j-1}, t_n)}{\Delta_x^2}
$$

$$
+ \theta f(x_j, t_{n+1}) + (1-\theta) f(x_j, t_n)
$$

放物型偏微分方程式の数値解法 (6)

- $\theta = 0$ とした場合が**前進 Euler 法**, $\theta = 1$ とした場合が**後退 Euler 法**である. $\theta = 1/2$ とした場合は **Crank-Nikolson 法**である.
- $\theta \geq 1/2$ とすれば, この公式は $\Delta_t/(\Delta_x)^2 \leq 1/2$ によらず安定となる. とくに, $\theta = 1/2$ とした Crank-Nikolson 法は, 安定で時間精度が良いことから, しばしば用いられる ([河村]).

双曲型偏微分方程式の数値解法 (1)

- 2 変数の定係数 2 階線形双曲型偏微分方程式の代表格である波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}$ を解くためには数値解法は必ずしも必要でない. この方程式は $\left(\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$ と書き直されるため, 解は $g_1(x-ct)$ と $g_2(x+ct)$ という形の関数の線形結合で書ける. $g_i(\cdot)$ は任意関数である ($i = 1, 2$).

双曲型偏微分方程式の数値解法 (2)

- 数値的に解くときには, $\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ あるいは $\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ を離散化する. どちらでも同じことなので, 後者を例に取って説明する.
- 時間軸については前進差分, x 軸については後退差分で近似すると,
$\frac{v(x_j,t_{n+1})-v(x_j,t_n)}{\Delta_t} + c\frac{v(x_j,t_n)-v(x_{j-1},t_n)}{\Delta_x} = 0.$

双曲型偏微分方程式の数値解法 (3)

- $\mu = c\Delta_t/\Delta_x$ とおくと, 先の差分方程式は,
  $v(x_j, t_{n+1}) = (1-\mu)v(x_j, t_n) + \mu v(x_{j-1}, t_n)$
  となる. μ を**クーラン数 (Courant Number)** という.
- 上述の公式が安定であるためのの十分条件は $\mu \leq 1$ である (ただし, $\Delta_x > 0$, $\Delta_t > 0$ であることに注意).

双曲型偏微分方程式の数値解法 (4)

- 上述の公式では $\mu > 0$ でなければならないのだが, この条件を無視して $\mu = 0$ とすると, $v(x_j, t_{n+1}) = v(x_j, t_n)$ となり, 数値解の波形は時間によらず一定になってしまう.
- 逆に $\mu = 1$ とすると (これは許容される), 先の公式は $v(x_j, t_{n+1}) = v(x_{j-1}, t_n)$ となる. これは厳密解の挙動 $(g_1(x - ct))$ と一致する.

差分法に関する補足 (1)

- 放物型および双曲型の方程式の数値解法の公式を行列の形に書き直す手順は楕円型と同様なので, 繰り返し述べることはしない.
- 熱伝導方程式を不適切なパラメータを持つ陽的 Euler 法で解くと, 数値解が発散することがあることが知られている ([河村]).

差分法に関する補足 (2)

- 線形/非線形にかかわらず, あるいは連立偏微分方程式であっても, 差分法によって対応する離散型公式を作ることはできるし, 高次の差分を使うことも可能であるが, 数値解が厳密解を近似しているか否かは別問題である.

差分法に関する補足 (3)

- 差分法の弱点は複雑な形状の領域における数値解を求めにくいことであるが, 非線形座標変換によって矩形領域を曲面に投影することで, ある程度複雑な領域における求解に用いることもできる ([河村]) が, 有限要素法の方がより柔軟である.

有限要素法 (1)

- 有限要素法は工学の分野で偏微分方程式の近似解を求める実用解法として発展した手法.
- [Gupta and Meek] によると, 有限要素法の嚆矢は Courant(1942) だが, その発展は Argyris (1954), Turner (1956), Clough (1960), Zienkiewicz and Cheung (1965) などによる. 上記で Courant 以外は工学系.

有限要素法 (2)

- 有限要素法は, 前回の講義で述べた弱形式の近似解を求める手法のひとつ.
- 議論の簡単のため, 2 変数の楕円型偏微分方程式を例に取って, 弱形式の近似解を求める問題を考える. $\boldsymbol{x} = (x, y)$ とし, 以下しばしば引数 $\boldsymbol{x} = (x, y)$ を省略する.

有限要素法 (3)

- 以下, $\int_D uv\,d\boldsymbol{x}$ を (u,v) と書く. また, ベクトル値関数 $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ に対し, $\int_D \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}$ を $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ と書く. 以下では, ベクトルはすべて列ベクトルであるものとする.
- u の勾配ベクトルを ∇u と書く. 勾配ベクトルは列ベクトルであるものとする.

有限要素法 (4)

- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y) \ ((x,y) \in U),\ u = 0 \ ((x,y) \in \partial U)$ を解くことを考える. 前回の一般論において, $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = a_{21} = 0$, $b_1, b_2 = 0$, $c = 0$ とした場合である.
- 対応する弱形式は, $(\nabla u, \nabla v) = (f, v)$ である.

有限要素法 (5)

- 弱形式に基づく求解では, 境界条件を満たすという条件の下で解を構成する必要がある.
- 境界条件として ∂U の外向き単位法線ベクトルに関する方向微分の値を考えることもあり, その場合には弱形式の右辺の形が変わるが, この講義では立ち入らない.

有限要素法 (6)

- 弱形式による求解は, $\forall v, (\nabla u, \nabla v) = (f, v)$ となる u を求める問題に帰着されるのだが, この近似解法として, u, v がともに既知の関数系 $\{\phi_i : 1 \le i \le N\}$ の線形結合で表現できると仮定し ($u = \sum_i p_i\phi_i$, $v = \sum_i q_i\phi_i$ とする), 係数 $\{c_i : 1 \le i \le N\}$ を求めるという方法がある. この手法を **Galerkin 法**という.

有限要素法 (7)

- Galerkin 法について説明する．弱形式に u, v の近似式を代入すると, $\sum_{i,j=1}^{N} p_i q_j (\nabla\phi_i, \nabla\phi_j) = \sum_{j=1}^{N} q_j (f, \phi_j)$ となる． $a_{ij} = (\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)$, $b_j = (f, \phi_j)$ とし, $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{1 \le i,j \le N}$ を a_{ij} を集めた行列, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ を対応する成分を集めたベクトルとすると, $\boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{q} = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{q}$ となる．この問題では $\boldsymbol{A}$ は対称行列である．

有限要素法 (8)

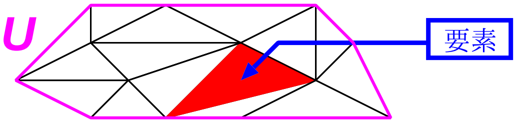
- v(の展開係数) は任意だから, 解くべき問題は, $\forall \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{q}$ となるベクトル $\boldsymbol{p}$ を求める問題に帰着される. このためには, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ となればよい. 換言すると, 偏微分方程式の数値解を求める問題が連立一次方程式を解く問題に変換されたことになる. ただし, 別途境界条件をチェックしなければならない.

有限要素法 (9)

- 有限要素法は, Galerkin 法の特別な場合で, 関数系 ϕ_i の取り方が名前の由来になっている.
- 有限要素法では, まず, 領域 U を有限個の要素と呼ばれる集合に分割する.
- $\mathbb{R}^2$ で要素を定義するには単体という概念が必要だが, 繁雑なので, 議論を $\mathbb{R}^2$ に限定する.

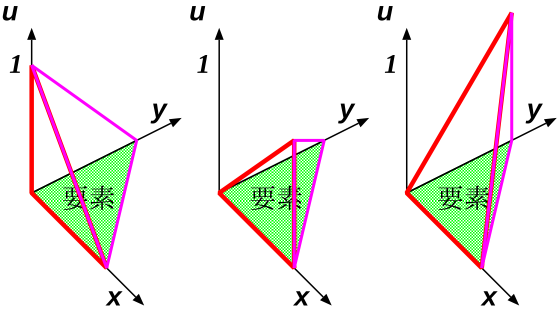
有限要素法 (10)

$\mathbb{R}^2$ における要素は典型的には多角形 (とくに三角形) である．ただし，隣接する要素は，内点を共有せず，辺および頂点を共有し，U 全体を覆わなければならない．

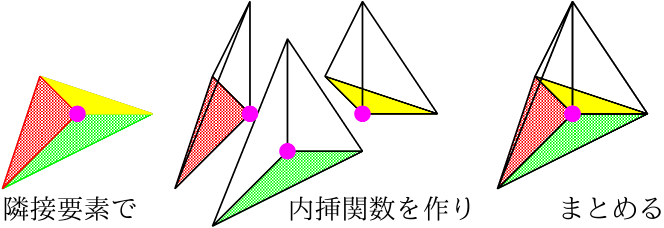


有限要素法 (11)

- 続いて, 関数 ϕ_i の構成法を説明する (要素が三角形の場合に限る).
- 要素をひとつ選び, この 3 個の頂点を節点とする. 3 個の節点のうちどれか 1 個で 1 となり, 残りの 2 点で零となる線形関数を 3 個取る. これを内挿関数と呼ぶ. 1 要素あたり 3 個の内挿関数ができる.


u
1
y
要素
x
u
1
y
要素
x
u
1
y
要素
x

このようにすると，隣接する要素は節点を共有し，節点で 1 となる内挿関数どうしは連続に結合できる．このようになることを適合という．



有限要素法 (14)

- U が有限個の三角形に分割されているものとし, それらの頂点を集めてから ∂U 上にあるものを除き, 通し番号を付ける.
- ∂U 上の頂点を除くのは, このようにすると, 今考えている境界条件 (∂U 上で $u = 0$) を自動的に満たすことができるからである.

有限要素法 (15)

- 頂点が N 個あるものとする. $1 \leq i \leq N$ に対し, 第 i 番目の頂点を考える.
- 頂点 i を含む要素が K 個あるものとし, これを $\Gamma_{i1}, \ldots, \Gamma_{iK}$ とする.

有限要素法 (16)

- $1 \leq k \leq K$ なる各 k に対し, Γ_{ik} で定義された内挿関数のうち, 頂点 i で 1 となるものを選び, それらをまとめて前々ページのような関数を作る. さらに, この関数の $U \setminus \left(\cup_{i=1}^{K} \Gamma_{ik}\right)$ における値を零としたものが, 有限要素法における関数 ϕ_i である. すなわち, 内挿関数をまとめて関数 ϕ_i を作る

有限要素法 (17)

- 節点として要素の頂点を選択しないこともある．この場合, 隣接する要素 A と要素 B の共有する頂点を c としたとき, 要素 A で定義され頂点 c で零とならない内挿関数 ϕ_A と要素 B で定義され頂点 c で零とならない内挿関数 ϕ_B が連続に結合できないことがあり得る．このような内挿関数の取り方を非適合という．非適合な内挿関数が利用されることもある．

有限要素法 (18)

- 有限要素法は Galerkin 法の一種だったから, $a_{ij} = (\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)$, $b_j = (f, \phi_j)$ を計算して, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ を $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_N)^T$ について解き, $v = \sum_{i=1}^{n} p_i\phi_i$ を近似解とすれば良い.
- 境界条件が上述の問題と異なる場合には, それに応じた工夫が必要 (文献を参照).

有限要素法 (19)

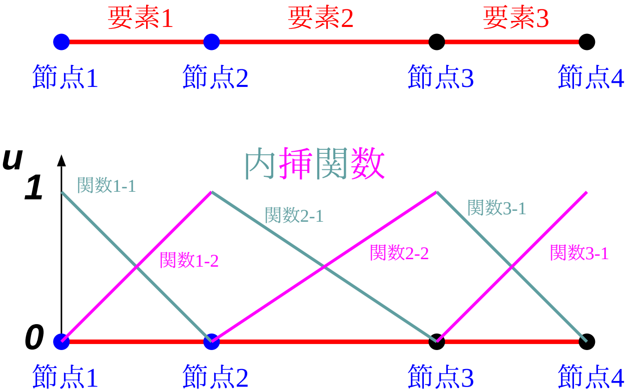
- ϕ_i は $\Gamma_{i1}, \ldots, \Gamma_{iK}$ 以外では零で, $1 \le k \le K$ に対し, Γ_{ik} 上で線形関数だから, Γ_{ik} 上では $\nabla\phi_i$ は定数ベクトルであり, よって, $(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)$ は, 数値積分を用いることなく計算できる.
- (f, ϕ_i) については数値積分が必要となる可能性がある.

有限要素法 (20)

- 後で必要になるので, 1 次元の有限要素法における要素, 節点, 内挿関数, ϕ_i について述べる. ただし, 内挿関数は線形関数とし, 適合の条件を満たす内挿関数に議論を限定する.
- 1 次元の有限要素法では, 領域は $\mathbb{R}^n$ の (有界) 閉区間で, 節点はその区間に取られた有限個の点である. 節点が $x_1, \ldots, x_N$ という順に並んでいるものとすると, 要素は閉区間 $[x_i, x_{i+1}]$ である $(1 \leq i \leq N-1)$.

有限要素法 (21)

- 内挿関数としては, 各要素ごとに, その左端で 1, 右端で 0 となる関数と, その左端で 0, 右端で 1 となる関数を取る.
- 各節点で, その点で 1 となる内挿関数を集めて関数 ϕ_i を作ることは 2 次元の場合と同じ.


要素1
要素2
要素3
節点1
節点2
節点3
節点4
内挿関数
u
1
0
関数1-1
関数1-2
関数2-1
関数2-2
関数3-1
関数3-1
節点1
節点2
節点3
節点4

有限要素法 (23)

- 次に, 2 変数の放物型偏微分方程式を有限要素法で解く方法を述べる [Quarteroni]. 空間は 1 次元であるが, さらに前回の一般論において, $a_{11}=1$, $b_1=0$, $c=0$ とした場合を考えると, 対応する弱形式は次の通りである.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right) = (f, v)$$

有限要素法 (24)

- 楕円型の場合と同様に, 節点を N 個とし, 関数 v を関数 $\{\phi_i(x) : 1 \le i \le N\}$ の線形結合であらわす (x が 1 次元で, $\phi_i(x)$ は上述の関数). $v = \sum_{i=1}^{N} q_i \phi_i(x)$ とする.
- $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} u_i(t)\phi_i(x)$. とする (係数が時変).

有限要素法 (25)

- $m_{ij} = (\phi_i, \phi_j)$, $a_{ij} = (\frac{d\phi_i}{dx}, \frac{\phi_j}{dx})$, $b_j = (f, \phi_j)$ とおく．$\boldsymbol{M} = (m_{ij})_{1 \le i,j \le N}$，$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{1 \le i,j \le N}$ を, これらの要素をまとめた行列とする．また, $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_N)^T$ とする．
  $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_N(t))^T$, $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_N)^T$ とする．
- これらを使い, u, v を弱形式に代入すると ⋯

有限要素法 (26)

- $(\frac{d\boldsymbol{u}}{dt})^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{q}$. これが任意の $\boldsymbol{q}$ に対して成り立たなければならないから, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{A}$ が対称行列であることを使うと, 解くべき方程式は, $\boldsymbol{M}\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$ となる. すなわち, 偏微分方程式が常微分方程式に帰着されたことになる.

有限要素法 (27)

上述の常微分方程式の数値解法は何でもよいのであるが，ここでは θ 法について述べる．θ 法は，この問題では次の形を取る．

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{M}\frac{\boldsymbol{u}(t_{n+1})-\boldsymbol{u}(t_n)}{\Delta_t} \\
&\quad+\boldsymbol{A}\left(\theta\boldsymbol{u}(t_{n+1})+(1-\theta))\boldsymbol{u}(t_n)\right) \\
&=(\theta\boldsymbol{b}(t_{n+1})+(1-\theta)\boldsymbol{b}(t_n))
\end{aligned}
$$

有限要素法 (28)

- 差分法における θ 法と違う式に見えるかもしれないが, t_{n+1} と t_n における関数の評価値の重み付き平均を取るという意味で, 同じ方法である.
- θ 法において $\theta = 0$ とすると前進 Euler 法, $\theta = 1$ とすると後退 Euler 法, $\theta = 1/2$ とすると Crank-Nikolson 法である.

有限要素法 (29)

- 差分法と同様に, $\theta \geq 1/2$ では上述の公式は無条件安定であるが, $0 \geq \theta < 1/2$ では条件が必要になる. この条件は, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{w} = \lambda \boldsymbol{M}\boldsymbol{w}$ という一般化固有値問題の解を使って定式化されるが, 詳細は略す ([Quarteroni] 参照).

有限要素法 (30)

- 続いて, 双曲型方程式を有限要素法を用いて解く手法について簡単に触れる [Grossmann et al]. 双曲型と同様に, 単純化のために, $a_{11} = 1, b_1 = 0, c = 0$ とした場合を考える. 弱形式は $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v\right) + \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) = (f, v)$ である.

有限要素法 (31)

- 放物型の場合と同様に, $u = \sum_{i=1}^{N} u_i(t)\phi_i(x)$. とする (係数が時変). 放物型の場合と同じ行列とベクトルを用いることにすると, 解くべき方程式は, $\boldsymbol{M}\dfrac{d^2\boldsymbol{u}}{d^2t} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$ となる. あとは常微分方程式の数値解法を用いればよい.

有限要素法 (32)

- 有限要素法は 1 階の (連立) 偏微分方程式を解くためにも利用可能である.
- $\dfrac{\partial u}{\partial t}+a\dfrac{\partial u}{\partial x}+bu=f$ を解くことを考える. これが成り立つなら, 任意の v に対して $\left(\frac{\partial u}{\partial t},v\right)+a\left(\frac{\partial u}{\partial x},v\right)+b(u,v)=(f,v)$ である (上述の偏微分方程式に対応する弱形式).

有限要素法 (33)

- 上記のように弱形式は簡単に求められるのだが, これに標準的な有限要素法を適用すると, 効率が必ずしも良くないことが知られている ([Quarteroni]). この問題を解決するために, streamline diffusion finite element method, 不連続 Galerkin 法に基づく有限要素法などといった手法が用いられる ([Quarteroni]).

有限要素法 (34)

- 有限要素法は, Maxwell 方程式を解くのにも用いられる. この場合も, 不連続 Galerkin 法が用いられることがある ([Li and Chen]).