電気 303/電情 303 数値解析 (14)

微分方程式の数値解法 (4)
差分法や有限要素法による
偏微分方程式の求解

はじめに

- 偏微分方程式の数値解法には差分法, 有限要素法, 境界要素法, 有限体積法, メッシュレス法など, 様々なものがある ([Li and Chen]). これらには得手不得手もあるのであるが, どちらかと言うと, 分野によって使われる手法が異なるという側面もある (習慣的なもの).

- この講義では, 差分法と有限要素法について述べる.

- 差分法は, 偏微分を差分で近似することで得られる方程式を数値的に解く解法であり, 流体力学の分野で広く用いられている([河村]). 差分法のメリットは, 考え方が単純で, 相対的にプログラムが組みやすいことである. デメリットは, 境界の形状が複雑は問題には適用し難いことである.

- 有限要素法は, 汎用性が高く, 偏微分方程式の数値解法の代表格である ([Li and Chen]). この方法は, 偏微分方程式そのものを離散化するわけではなく, 前回の講義で導入した弱形式に基づいて離散化された方程式を立てて解く. 汎用性が高く, 複雑な形状の境界に対応できることがメリットであるが, プログラムを組むのに高いスキルを要するというデメリットがある.

- 偏微分方程式の数値解法は, 常微分方程式の数値解法と比較して, その使用に注意を要する点が多い. 不用意に数値解法のパラメータを設定すると, 数値解を得るための離散化された方程式それ自体が安定にならない, 数値解がもとの方程式の解の近似にならない, などといった問題が発生し得る.

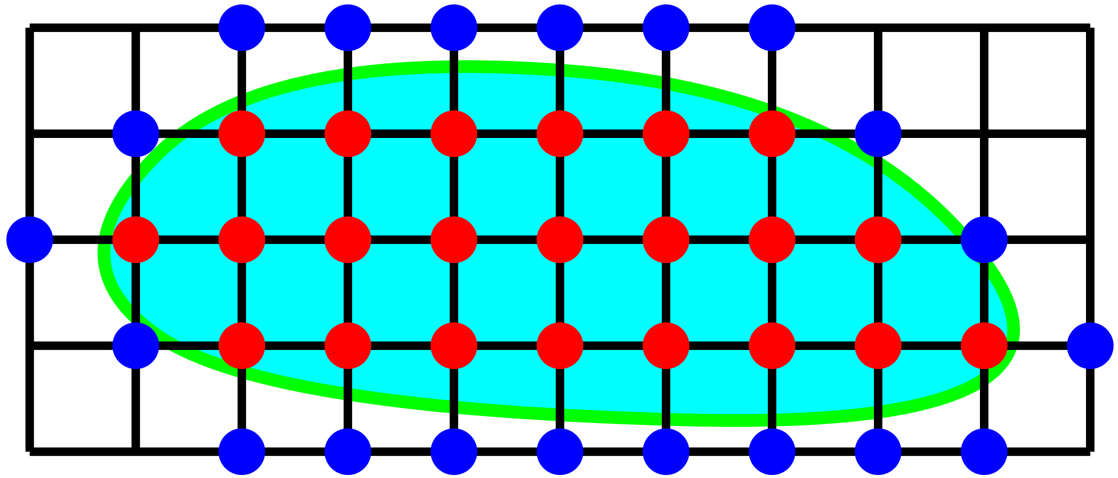
- 数値解法の使用例は次回の講義で述べるが, 上述の理由から, 学習上の理由で敢えてそうする場合を除き, 偏微分方程式を数値的に解く場合は, 零からプログラムを組むことは避けた方がよい.

差分法

- 偏微分方程式の素直な離散化である差分法について述べる.
- 議論の簡単のため, 独立変数が 2 個の場合に限定して講義を進める.

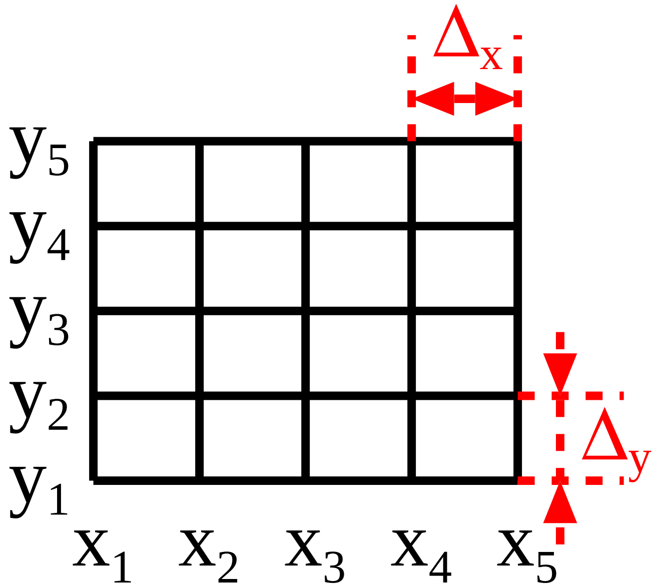
差分近似と差分方程式

- 差分法は, 解を求めたい領域に格子を定め, 偏微分を格子点のあいだの差分で近似することにより, 偏微分方程式を (偏) 差分方程式に帰着させて解く方法である.



- 図からわかるように, 差分法は, 解を求めたい領域が複雑な形状の問題には適さない.
- 以下では, 議論の簡単のために, 解を求めたい領域が矩形の場合のみを考える.
- 独立変数を (x, y) とする.

- 一般的には, 必ず格子を等間隔に取らなければならないというわけではないが, この講義では, 議論の簡単のために, x 軸と y 軸に N_x, N_y 個の格子点 $x_1, \ldots, x_N$, $y_1, \ldots, y_N$ がそれぞれ等間隔 (Δ_x, Δ_y) で取られている場合のみを考える (図は $N_x = N_y = 5$ の場合).


Δ_x
y_5
y_4
y_3
y_2
y_1
Δ_y
x_1 x_2 x_3 x_4 x_5

- 差分法による $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j)$ の近似には，以下の 3 種類がある．

$$\text{前進差分} \quad \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_i, y_j)}{\Delta_x}$$

$$\text{後退差分} \quad \frac{u(x_i, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{\Delta_x}$$

$$\text{中心差分} \quad \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{2\Delta_x}$$

- 同じく差分法による $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j)$ の近似にも，以下の 3 種類がある．

$$\text{前進差分} \quad \frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_j)}{\Delta_y}$$

$$\text{後退差分} \quad \frac{u(x_i, y_j) - u(x_i, y_{j-1})}{\Delta_y}$$

$$\text{中心差分} \quad \frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_{j-1})}{2\Delta_y}$$

- 二階偏導関数は，典型的には，前進差分と後退差分を組み合わせて，たとえば以下のように計算する．

$$\frac{1}{\Delta_x}\left(\overbrace{\frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+1}, y_j)}^{\text{後退差分で近似}} - \overbrace{\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j)}^{\text{後退差分で近似}}\right) \quad (\text{前進差分})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+1}, y_j) \simeq \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_i, y_j)}{\Delta_x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) \simeq \frac{u(x_i, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{\Delta_x}$$

と近似する.

これを前ページの式に代入すると次式が得られる.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \simeq \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{\Delta_x^2}$$

- 同様に,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \\ \simeq \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{\Delta_y^2}$$

- 以下では，式を短く書くために，$u(x_i, y_j)$ を u_{ij} と略記する．この記法もとで，以下が成り立つ．

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta_x^2},
$$

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta_y^2}
$$

- 偏微分方程式の各項をこのように差分近似することで, (偏) 差分方程式が得られる. 偏微分方程式を直接解くかわりに, 偏差分方程式の数値解を求めるのが, 差分法の基本的な考え方である.

差分法で楕円型偏微分方程式を解く

- 続いて, 独立変数が 2 個の 2 階線形楕円型偏微分方程式の数値解法について述べる ([山本]).

- $(x, y) \in U$ とし, 2 階線形楕円型偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

を, 境界条件

$$u(x, y) = g(x, y),\ (x, y) \in \partial U$$

のもとでを解きたい.

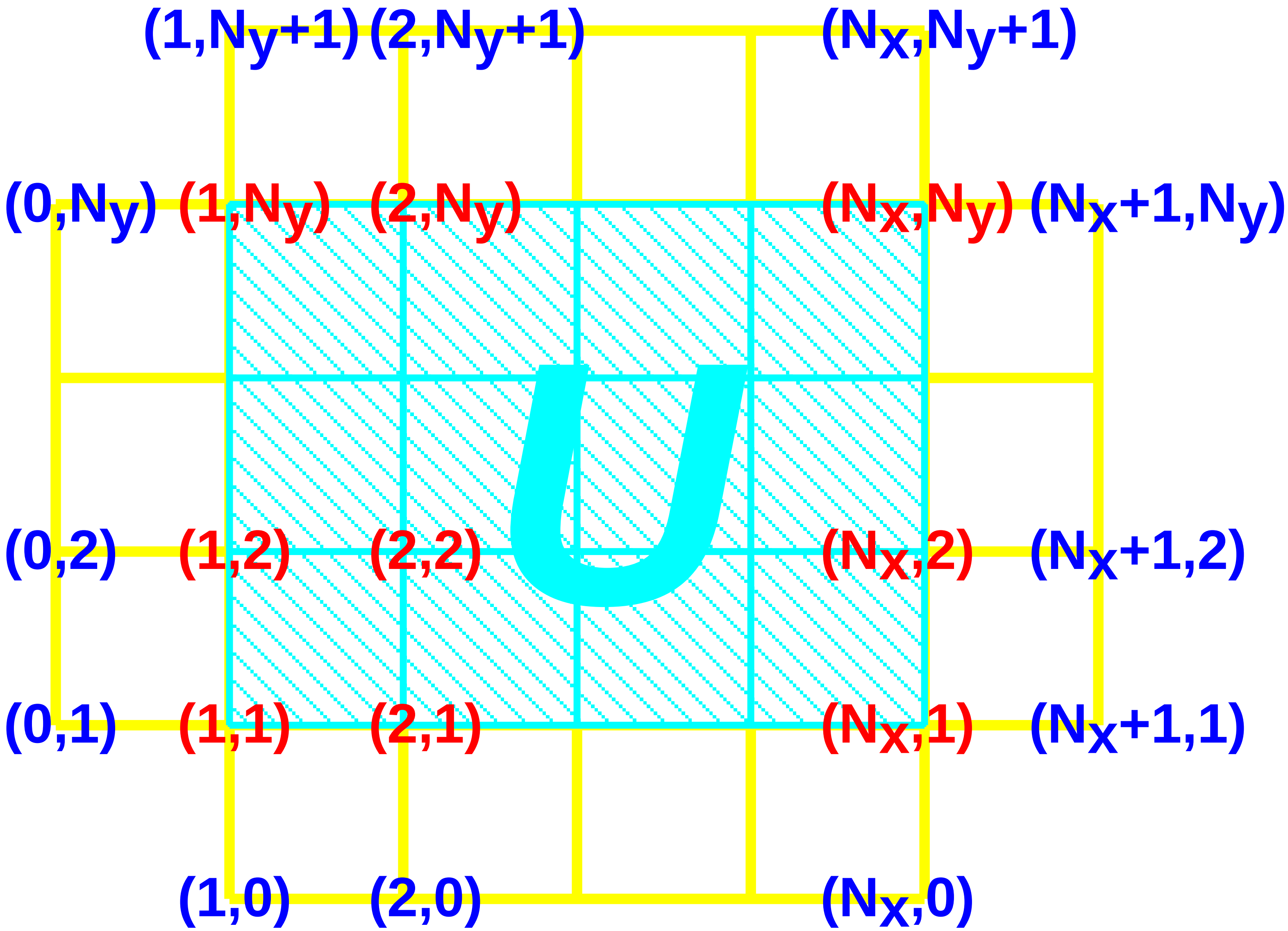
- f が C^1 級, ∂U が C^1 級の関数 $\eta(x,y)$ を用いて

$$\partial U = \{(x,y) : \eta(x,y) = 0\}$$

という形で表現され, g が連続であるときには, この偏微分方程式の境界値問題は解を持つことが示される ([熊ノ郷]).

- U を矩形領域とし, 近似解を v_{ij} とする.
- 領域 U の x 軸に N_x 個の格子点 $x_1,\ldots, x_{Nx}$, y 軸に N_y 個の格子点 $y_1,\ldots,y_{N_y}$ が取られているものとする.

- 境界の x 座標を x_0 および x_{N_x+1}, y 座標を y_0 および y_{N_x+1} とする. (次ページ図, ただし文字 x と y を略した). U 内の点が赤字, 境界が青字.


(1,Ny+1)
(2,Ny+1)
(Nx,Ny+1)
(0,Ny)
(1,Ny)
(2,Ny)
(Nx,Ny)
(Nx+1,Ny)
U
(0,2)
(1,2)
(2,2)
(Nx,2)
(Nx+1,2)
(0,1)
(1,1)
(2,1)
(Nx,1)
(Nx+1,1)
(1,0)
(2,0)
(Nx,0)

- この境界値問題に対応する差分方程式は以下の通りである.

$$\frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{\Delta_x^2} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{\Delta_y^2}$$

$$= f_{i,j}, \qquad (x_i, y_j) \in U,$$

$$v_{i,j} = g_{i,j}, \qquad (x_i, y_j) \in \partial U$$

- 事実 1.　連立差分方程式

$$\frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{\Delta_x^2} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{\Delta_y^2}$$

$$= f_{i,j}, \qquad (x_i, y_j) \in U,$$

$$v_{i,j} = g_{i,j}, \qquad (x_i, y_j) \in \partial U$$

は一意解を持つ ([山本]).

- **事実 2.** u_{ij} をもとの境界値問題の解の格子点における値, v_{ij} を近似解の格子点における値とすると, $u(x, y)$ が (x, y) に関して C^4 級なら,

$$u_{ij} - v_{ij} = O(\Delta_x^2) + O(\Delta_y^2)$$

となる ([山本]).

- 上記の事実 1 と事実 2 を組み合わせると, この連立差分方程式は解 $\{v_{ij}\}$ を持ち, Δ_x と Δ_y を零に近付けると近似解 $\{v_{ij}\}$ は, 各格子点における真の解の値 $\{u_{ij}\}$ に近付くという結論が導かれる.

- すなわち, Δ_x と Δ_y を十分小さく取った上で上述の連立差分方程式を解くことで, 楕円型偏微分方程式の近似解を構成することができる

- 上述の差分方程式は, $\Delta_x = \Delta_y = h$ と取ると,

$$v_{i+1,j} + v_{i-1,j} + v_{i,j+1} + v_{i,j-1} - 4v_{i,j} = h^2 f_{i,j}$$

のように簡単になる. これを 5 点差分公式という ([山本]).

- 続いて, 5 点差分公式を行列を使って表現することを考える.

- 議論の簡単のために, 格子点が

$$v_{11}, v_{21}, v_{12}, v_{22}$$

の 4 個だけで, これが正方形に配置されており, これらの周囲に g_1 から g_8 までの境界条件が与えられているという状況を考える.

- 格子点および境界条件は, 以下のように配置されているものとする.

$$\begin{array}{cccc} & g_7 & g_8 & \\ g_5 & \boxed{v_{12}} & \boxed{v_{22}} & g_6 \\ g_3 & \boxed{v_{11}} & \boxed{v_{21}} & g_4 \\ & g_1 & g_2 & \end{array}$$

- このとき, 4 個の 5 点差分公式は, 以下のようになる.

$$g_1 + v_{12} + v_{21} + g_3 - 4v_{11} = h^2 f_{11}$$
$$g_2 + g_4 + v_{22} + v_{11} - 4v_{21} = h^2 f_{21}$$
$$v_{11} + v_{22} + g_5 + g_7 - 4v_{21} = h^2 f_{12}$$
$$v_{12} + g_6 + g_8 + v_{21} - 4v_{22} = h^2 f_{22}$$

- 前ページの第 1 式は v_{11} の周囲, 第 2 式は v_{21} の周囲, 第 3 式は v_{12} の周囲, 第 4 式は v_{22} の周囲を参照することで得られている.

- たとえば, 第 1 式

$$g_1 + v_{12} + v_{21} + g_3 - 4v_{11} = h^2 f_{11}$$

は, v_{11} の周囲の要素を足し合わせてから v_{11} の 4 倍を引いたものが $h^2 f_{11}$ に等しいという式になっている.

$$\begin{array}{ccc} & v_{12} & \\ g_3 & \boxed{v_{11}} & v_{21} \\ & g_1 & \end{array}$$

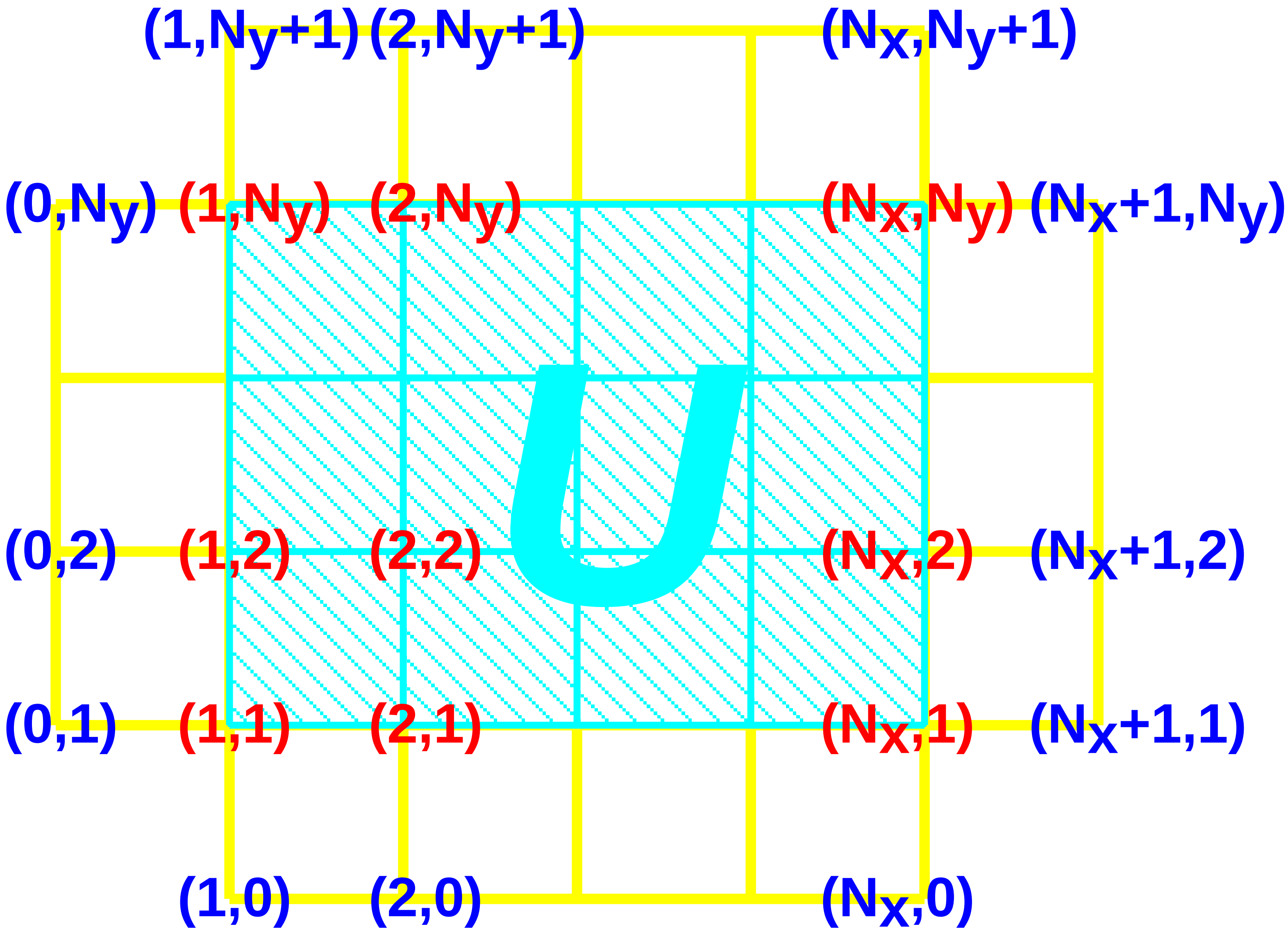
- 先の 5 点差分公式は, 次ページのように行列を使って表現できる.

$$
\left(\begin{array}{rr|rr}
4 & -1 & -1 & 0 \\
-1 & 4 & 0 & -1 \\
\hline
-1 & 0 & 4 & -1 \\
0 & -1 & -1 & 4
\end{array}\right)
\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} g_1 + g_3 \\ g_2 + g_4 \\ g_5 + g_7 \\ g_6 + g_8 \end{pmatrix} - h^2 \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{12} \\ f_{22} \end{pmatrix}
$$

- v_{ij} が v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22} という順で並べられていることが重要.

- 上記を一般化して, 一般の場合の 5 点差分公式の行列表現を求める ([山本]).

- 領域 U が矩形で, x 軸, y 軸にそれぞれ N_x 個, N_y 個の格子点が取られているものとする.
- 格子点および境界の添字の並びは, 次ページの図のようになっているものとする.



(1,Ny+1)
(2,Ny+1)
(Nx,Ny+1)
(0,Ny)
(1,Ny)
(2,Ny)
(Nx,Ny)
(Nx+1,Ny)
U
(0,2)
(1,2)
(2,2)
(Nx,2)
(Nx+1,2)
(0,1)
(1,1)
(2,1)
(Nx,1)
(Nx+1,1)
(1,0)
(2,0)
(Nx,0)

- $1 \leq i \leq N_y$ に対し, N_x 次のベクトル $\boldsymbol{v}_i$ を,

$$\boldsymbol{v}_i = \begin{pmatrix} v_{1,i} \\ v_{2,i} \\ \vdots \\ v_{N_x,i} \end{pmatrix}$$

によって定義する. これは, 格子点の下から第 i 行目の要素を集めた列ベクトルである.

- $\{\boldsymbol{v}_i : 1 \leq i \leq N_y\}$ を集めた列ベクトル $\boldsymbol{v}$ を,

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_{N_y} \end{pmatrix}$$

によって定義する. $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{N_x \times N_y}$ である.

- $\{\boldsymbol{v}_i : 1 \leq i \leq N_y\}$ と同じ要領で, $1 \leq i \leq N_y$ に対し, N_x 次のベクトル $\boldsymbol{f}_i$ を,

$$\boldsymbol{f}_i = \begin{pmatrix} f_{1,i} \\ f_{2,i} \\ \vdots \\ f_{N_x,i} \end{pmatrix}$$

によって定義する.

- $\boldsymbol{v}$ と同じ要領で, $\{\boldsymbol{f}_i : 1 \leq i \leq N_y\}$ を集めた列ベクトル $\boldsymbol{f}$ を,

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_1 \\ \boldsymbol{f}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_{N_y} \end{pmatrix}$$

によって定義する. $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^{N_x \times N_y}$ である.

- $1 \leq i \leq N_y$ なる i に対し, ベクトル $\boldsymbol{g}_i \in \mathbb{R}^{N_x}$ を, 次のように定義する.

$$\boldsymbol{g}_1 = \begin{pmatrix} g_{0,1} + g_{1,0} \\ g_{2,0} \\ \vdots \\ g_{N_x-1,0} \\ g_{N_x,0} + g_{N_x+1,1} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{g}_i = \begin{pmatrix} g_{0,i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_{N_x+1,i} \end{pmatrix}, \; 1 < i < N_y$$

$$
\boldsymbol{g}_{N_y} = \begin{pmatrix} g_{0,N_y} + g_{1,N_y+1} \\ g_{2,N_y+1} \\ \vdots \\ g_{N_x-1,N_y+1} \\ g_{N_x,N_y+1} + g_{N_x+1,N_y} \end{pmatrix}
$$

- ベクトル $(\boldsymbol{g}_i)_{1\leq i\leq N_y}$ を集めたベクトル $\boldsymbol{g}$ を,

$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{g}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{g}_{N_y} \end{pmatrix}$$

によって定義する. $\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^{N_x \times N_y}$ である.

- N_x 次の正方行列 $\boldsymbol{H}$ を以下のように定義する.

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

- $\boldsymbol{I}$ を, N_x 次の単位行列とする.

- これらを使って, $N_x \times N_y$ 次の正方行列 $\boldsymbol{A}$ を, 以下のように定義する.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{H} & -\boldsymbol{I} & & & & \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{H} & -\boldsymbol{I} & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & -\boldsymbol{I} \\ & & & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{H} \end{pmatrix}$$

- 行列 $\boldsymbol{A}$ の対角線上には, 行列 $\boldsymbol{H}$ が N_y 個並んでいる.

- **事実 3.** 上記のように定義された $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{f}$ および $\boldsymbol{g}$ を用いると, 5 点差分公式は,

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g} - h^2 \boldsymbol{f}$$

のように表現される.

- 証明.

  ▷ $N_x \times N_y$ 次の連立一次方程式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g} - h^2\boldsymbol{f}$$

を, N_x 個の連立1次方程式が上から下に N_y 個並んでいると解釈し, 個別の「ブロック」について, これが5点差分公式に対応することを確認すればよい.

▷ まず最上段のブロックを考える．この部分は,

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{g}_1 - h^2\boldsymbol{f}_1$$

となっている．

$\boldsymbol{H}$ の構造から次式が得られる.

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{v}_1 = 4\begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \\ \vdots \\ v_{N_x-1,1} \\ v_{N_x,1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ v_{1,1} \\ \vdots \\ v_{N_x-2,1} \\ v_{N_x-1,1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{3,1} \\ \vdots \\ v_{N_x,1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$
-\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -v_{1,2} \\ -v_{2,2} \\ \vdots \\ -v_{N_x-1,2} \\ -v_{N_x,2} \end{pmatrix}
$$

であった.

$$
\boldsymbol{g}_1 = \begin{pmatrix} g_{0,1} + g_{1,0} \\ g_{2,0} \\ \vdots \\ g_{N_x-1,0} \\ g_{N_x,0} + g_{N_x+1,1} \end{pmatrix}
$$

であった.

$$\boldsymbol{f}_i = \begin{pmatrix} f_{1,i} \\ f_{2,i} \\ \vdots \\ f_{N_x,i} \end{pmatrix}$$

であった.

これらを見比べると, 領域の一番下の行の格子点に関する 5 点差分公式が並んでいることがわかる. (第 2 行目から第 $N_x - 1$ 行目までの式の形はすべて同じなので, 第 1 行, 第 2 行, 第 N_x 行について 5 点差分公式と比較すればよい).

- ▷ 次に, 第 i 段 $(2 \leq i \leq N_y - 1)$ のブロックを考える. このブロックの方程式は,

$$-\boldsymbol{v}_{i-1} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_{i+1} = \boldsymbol{g}_i - h^2 \boldsymbol{f}_i$$

となっている.

$\boldsymbol{H}$ の構造から次式が得られる.

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{v}_i = 4\begin{pmatrix} v_{1,i} \\ v_{2,i} \\ \vdots \\ v_{N_x-1,i} \\ v_{N_x,i} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ v_{1,i} \\ \vdots \\ v_{N_x-2,i} \\ v_{N_x-1,i} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_{2,i} \\ v_{3,i} \\ \vdots \\ v_{N_x,i} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$
-\boldsymbol{v}_{i-1} = \begin{pmatrix} -v_{1,i-1} \\ -v_{2,i-1} \\ \vdots \\ -v_{N_x-1,i-1} \\ -v_{N_x,i-1} \end{pmatrix}
$$

であった.

$$
-\boldsymbol{v}_{i+1} = \begin{pmatrix} -v_{1,i+1} \\ -v_{2,i+1} \\ \vdots \\ -v_{N_x-1,i+1} \\ -v_{N_x,i+1} \end{pmatrix}
$$

であった.

$$
\boldsymbol{g}_i = \begin{pmatrix} g_{0,i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_{N_x+1,i} \end{pmatrix}
$$

であった.

$$\boldsymbol{f}_i = \begin{pmatrix} f_{1,i} \\ f_{2,i} \\ \vdots \\ f_{N_x,i} \end{pmatrix}$$

であった.

これらを見比べると, 領域の下から i 版目の行の格子点に関する 5 点差分公式が並んでいることがわかる. (第 2 行目から第 $N_x - 1$ 行目までの式の形はすべて同じなので, 第 1 行, 第 2 行, 第 N_x 行について 5 点差分公式と比較すればよい).

▷ 最後に, 第 N_y 段のブロックを考える. このブロックの方程式は,

$$-\boldsymbol{v}_{N_y-1} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{v}_{N_y} = \boldsymbol{g}_{N_y} - h^2 \boldsymbol{f}_{N_y}$$

となっている.

$\boldsymbol{H}$ の構造から次式が得られる.

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{v}_{N_y} = 4\begin{pmatrix} v_{1,N_y} \\ v_{2,N_y} \\ \vdots \\ v_{N_x-1,N_y} \\ v_{N_x,N_y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ v_{1,N_y} \\ \vdots \\ v_{N_x-2,N_y} \\ v_{N_x-1,N_y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_{2,N_y} \\ v_{3,N_y} \\ \vdots \\ v_{N_x,N_y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-\boldsymbol{v}_{N_y-1} = \begin{pmatrix} -v_{1,N_y-1} \\ -v_{2,N_y-1} \\ \vdots \\ -v_{N_x-1,N_y-1} \\ -v_{N_x,N_y-1} \end{pmatrix}$$

であった.

$$
\boldsymbol{g}_{N_y} = \begin{pmatrix} g_{0,N_y} + g_{1,N_y+1} \\ g_{2,N_y+1} \\ \vdots \\ g_{N_x-1,N_y+1} \\ g_{N_x,N_y+1} + g_{N_x+1,N_y} \end{pmatrix}
$$

であった.

$$
\boldsymbol{f}_{N_y} = \begin{pmatrix} f_{1,N_y} \\ f_{2,N_y} \\ \vdots \\ f_{N_x,N_y} \end{pmatrix}
$$

であった.

これらを見比べると, 領域の下から i 版目の行の格子点に関する 5 点差分公式が並んでいることがわかる. (第 2 行目から第 $N_x - 1$ 行目までの式の形はすべて同じなので, 第 1 行, 第 2 行, 第 N_x 行について 5 点差分公式と比較すればよい).

■

差分法で放物型偏微分方程式を解く

- 独立変数が 2 個の放物型偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + f(x, t) \qquad (\heartsuit)$$

を解く問題を考える.

- この形から出発しても一般性を失わないのであるが, その理由については, 後で述べる.

- 独立変数の片方は時間であるものとし, 独立変数を

$$(x, t)$$

とする. x が空間, t が時間に関する独立変数である.

- 議論の簡単のために,

$$x \in [0,1]$$
$$t \in [0,T]$$

とする. ただし, $T > 0$ である.

- 初期条件として, 時刻 0 における $u(x, 0)$ の形状が与えられているものとする.

$$u(0, x) = a(x) \tag{$\spadesuit$}$$

ただし, $a(x)$ は既知の関数である.

- 境界条件として,

$$
\begin{aligned}
u(0,t) &= 0 \\
u(1,t) &= 0
\end{aligned}
\qquad (\lozenge)
$$

  が与えられているものとする.

- このように境界条件を設定しても一般性を失わないのであるが, その理由については, 後で述べる.

- 先に述べた特別な形の偏微分方程式および特別な境界条件から出発してよい理由は, 一般的な 2 変数定係数 2 階線形放物型偏微分方程式と, 一般的な境界条件が, 先に述べたような特別な形に変換できるからである.
- この変換法について順に述べる.

- 偏微分方程式の形を (♡) にしてよい理由： 2 変数の定係数 2 階線形放物型偏微分方程式の一般形は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + f(x,t)$$

である． この偏微分方程式を, 変数変換により, 先に述べた特別な形 (♡) に変形する．

初期条件は (♠) と同一である:

$$u(0, x) = a(x).$$

境界条件は, 次のように与えられているものとする.

$$
\begin{aligned}
u(0,t) &= \gamma_0(t) \\
u(1,t) &= \gamma_1(t)
\end{aligned}
\qquad (\blacklozenge)
$$

$\tau = at$ のように, 時間に関する変数変換をすると,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial \tau}$$

となるので,

$$a\frac{\partial u}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + f\left(x, \frac{\tau}{a}\right)$$

となる ($t = \tau/a$ に注意).

この両辺を a で割って

$$\bar{f}(x,\tau) = \frac{f}{a}\left(x, \frac{\tau}{a}\right)$$

とすれば,

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \bar{f}(x,\tau)$$

という形になる.

初期条件は時刻零で与えられているので,

$$\tau = at$$

のように時間に関する変数変換をしても, 影響を受けない.

境界条件 ($\blacklozenge$) は次のように変わる.

$$\begin{aligned} u(0,\tau) &= u(0,at) = \gamma_0(at) =: g_0(\tau) \\ u(1,\tau) &= u(1,at) = \gamma_1(at) =: g_1(\tau) \end{aligned} \tag{$\natural$}$$

まとめると,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \bar{f}(x,\tau), \\
u(0,x) &= a(x), \\
u(0,\tau) &= g_0(\tau) \\
u(1,\tau) &= g_1(\tau)
\end{aligned}
$$

となるが, 独立変数の文字は任意なので, τ を t に変更すると, 次ページのようになる.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + f(x,t),\\
&u(0,x) = a(x),\\
&u(0,t) = g_0(t)\\
&u(1,t) = g_1(t)
\end{aligned}
$$

以上によって, この形から出発しても一般性を失わないことがわかった. ■

- **境界条件を $(\diamondsuit)$ にしてよい理由:** 一般には，境界条件は，

$$\begin{aligned} u(0,t) &= g_0(t) \\ u(1,t) &= g_1(t) \end{aligned} \qquad (\bigstar)$$

となっている． $g_0(t)$ および $g_1(t)$ は既知の関数である．

$$\bar{a}(x) = a(x) - (1-x)g_0(0) - xg_1(0)$$
$$\bar{f}(x,t) = f(x,t) - (1-x)g_0'(t) - xg_1'(t)$$

と定義する．一見人工的な式であるが，このようにすることで，一般的な境界条件 (★) と特別な境界条件 (♢) との対応が取れる．

偏微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} + \bar{f}(x,t), \\ w(x,0) &= \bar{a}(x), \\ w(0,t) &= 0, \\ w(1,t) &= 0 \end{aligned} \qquad (\clubsuit)$$

が解けたものとし, その解を $w(x,t)$ とする.

$w(x,t)$ から $u(x,t)$ を

$$u(x,t) = w(x,t) + (1-x)g_0(t) + xg_1(t)$$

のように定める.

$x = 0$ とすると,

$$u(0, t) = w(0, t) + g_0(t) = g_0(t)$$

である.

$x = 1$ とすると,

$$u(1,t) = w(1,t) + g_1(t) = g_1(t)$$

である.

$t = 0$ とすると,

$$u(x, 0) = w(x, 0) + (1 - x)g_1(t) + g_1(t)$$

であるが,

$$w(x, 0) = \bar{a}(x) = a(x) - (1 - x)g_0(0) - xg_1(0)$$

であったから, $u(x, 0) = a(x)$ である.

$u(x,t)$ を t で 1 回偏微分したものと x で 2 回偏微分したものを比較すると,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} + (1-x)g_0'(t) + xg_1'(t)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

となる.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} + \bar{f}(x,t) \\
&= \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} + f(x,t) - (1-x)g_0'(t) - xg_1'(t)
\end{aligned}
$$

であった.

よって,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} + f(x,t)& \\
&- (1-x)g_0'(t) - xg_1'(t) \\
&+ (1-x)g_0'(t) + xg_1'(t) \\
= \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + f(x,t)&
\end{aligned}
$$

となる.

したがって, ($\clubsuit$) の解がわかれば, それを用いて, もとの偏微分方程式の解を構成することができる. $\blacksquare$

- 次に,
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + f(x,t)$$
を差分によって近似する方法を考える.

- 最も単純なものとして, 以下のようなものがある.

▷ 時間 t に関する偏微分を前進差分近似する:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) \simeq \frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\Delta_t}$$

- ▷ 空間 x に関する 2 階偏微分の近似には, すでに述べた

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) \simeq \frac{u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n)}{\Delta_x^2}$$

を用いる.

▷ $u(x_j, t_n)$ を $u_{j,n}$ のように書き直すと, 先の式は,

$$\frac{u_{j,n+1} - u_{j,n}}{\Delta_t} \simeq \frac{u_{j+1,n} - 2u_{j,n} + u_{j-1,n}}{\Delta_x^2} + f_{j,n}$$

となる.

▷ 前ページの近似式を使って, 以下のような, 偏微分方程式の近似解を得るための公式を作る.

$$\frac{v_{j,n+1} - v_{j,n}}{\Delta_t} = \frac{v_{j+1,n} - 2v_{j,n} + v_{j-1,n}}{\Delta_x^2} + f_{j,n}$$

- ▷ 前ページの式は公式 (すなわち数値解を計算する手順) なので,
  - ◇ 近似の記号 $\simeq$ が 等号 $=$ に変わっている;
  - ◇ $u_{j,n}$ が $v_{j,n}$ に変わっている.

- ▷ $r = \dfrac{\Delta t}{\Delta_x^2}$ とすると, 先の公式は,

$$v_{j,n+1} = rv_{j+1,n} + (1-2r)v_{j,n} + rv_{j-1,n} + \Delta t f_{j,n} \quad (\bigstar)$$

  のように書き直せる.
- ▷ これを **Euler の陽解法**と呼ぶ.

- 偏微分方程式の解を構成するための差分方程式を，**差分スキーム**と呼ぶ．Euler の陽解法は, 差分スキームの 1 種である.

- 差分スキームによってもとの偏微分方程式の解が得られるためには, 以下の 2 条件が必要である.
  - 刻み幅 $\Delta_x \to 0$, $\Delta_t \to 0$ としたとき, 差分スキームの解がもとの偏微分方程式の解に収束する (これを適合条件と呼ぶ).
  - 差分スキームが差分方程式として安定である (解が発散しない)

- 事実.　Euler の陽解法の安定条件は

$$r \leq \frac{1}{2}$$

である ([河村]).

- 証明.　略. ■

- **事実.** Euler の陽解法の解は, 刻み幅 Δ_x および Δ_t をともに零に近付けると, もとの偏微分方程式の解の収束する.
- **証明.** 略. ■

- **注意.**　安定で適合条件を満たす差分スキームの解が所与の (Δ_x, Δ_t) に対してもとの偏微分方程式の良い精度の近似解になっていることは必ずしも保証されないので, これらの値の選択には注意が必要である. 誤差を評価する方法もあるが, 技術的すぎるので, この講義では省略する.

- Euler の陽解法の拡張として,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + f(x,t)$$

の右辺の近似を評価する際に, (x_j, t_{n+1}) と (x_j, t_n) における重み付き平均を取る方法が知られている．これを θ 法という．θ は 0 以上 1 以下のパラメータである．θ 法の差分スキームを次式に示す.

$$
\begin{aligned}
&\frac{v_{j,n+1} - v_{j,n}}{\Delta_t} \\
&= \theta \, \frac{v_{j+1,n+1} - 2v_{j,n+1} + v_{j-1,n+1}}{\Delta_x^2} \\
&+ (1 - \theta) \, \frac{v_{j+1,n} - 2v_{j,n} + v_{j-1,n}}{\Delta_x^2} \\
&+ \theta f_{j,n+1} + (1 - \theta) f_{j,n}
\end{aligned}
$$

- θ 法の特別な場合に, 以下のものがある.
    - $\theta = 0$ とした場合: **Euler の陽解法**あるいは**前進 Euler 法**
    - $\theta = 1$ とした場合: **Euler の陰解法**あるいは**後退 Euler 法**
    - $\theta = 1/2$ とした場合: **Crank-Nikolson 法**

- $\theta \geq 1/2$ とすれば, θ 法は,

$$r = \frac{\Delta_t}{\Delta_x^2}$$

の値によらず安定となる. とくに, $\theta = 1/2$ としたCrank-Nikolson 法は, 安定で時間精度が良いことから, しばしば用いられる ([河村]).

- 楕円型方程式と同様に, 差分スキームを行列を使って書き直すことができるが, この講義ではこれ以上述べない.

- **線の方法.**　差分法による放物型偏微分方程式の解法のバリエーションに, 時間に関してのみ差分近似をやめて, 連立常微分方程式

$$\frac{d}{dt}u_j(t) = \frac{u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)}{\Delta_x^2} + f_j(t)$$

を解くという方法がある. ただし, (j は, x 軸に関する格子点を数え上げたものである. この方法を, 線の方法と呼ぶ ([河村]).

線の方法は, 常微分方程式が解ける処理系であれば, 実行可能である.

差分法で双曲型偏微分方程式を解く

- 独立変数が 2 個の双曲型偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \qquad (\sharp)$$

を解く問題を考える.

- 初期条件として

$$u(x,0) = f(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$$

が与えられているものとする.

- $f(x)$ は 2 階微分可能, $g(x)$ は 1 階微分可能で, $f(x)$ および $g(x)$ はともに微分可能性を保ったまま周期関数に拡張可能であると仮定する.

- 前回の講義で見たように, この微分方程式の解を構成するためには, 数値解法は必ずしも必要でなく, 解を

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(f(x-t) + f(x+t)\Big) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(\theta)d\theta$$

という形で書き下すことができる.

- この解のことを, D'Alembert の解と呼ぶのであった. $f(x)$ と $g(x)$ は任意である.

- 解が書き下せる以上, $(\sharp)$ が単独で与えられたとき, その数値解法について議論する必要はあまりない.
- 一方で, $(\sharp)$ が連立偏微分方程式の一部として現れる場合には, $(\sharp)$ だけを解析的に解くというわけにはいかない.
- このような理由から, 数値解法が必要な状況もある.

- 偏微分方程式 $(\sharp)$ は,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u = 0$$

と書き直せるが, これは更に

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$$

と書き直せる.

- したがって,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{$\dagger$}$$

あるいは

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{$\ddagger$}$$

を解くことにより, ($\sharp$) の解が得られる.

- (†) と (‡) の数値解を構成する方法は本質的に同一なので, (‡) の数値解の構成法についてのみ説明する.

- (‡) に対応する差分スキームを作成する．時間軸 (t 軸) については前進差分, 空間軸 (x 軸) については後退差分で近似すると,

$$\frac{v_{j,n+1} - v_{j,n}}{\Delta_t} + c\frac{v_{j,n} - v_{j-1,n}}{\Delta_x} = 0$$

となる.

- 先の差分方程式の両辺に Δ_t を掛け,

$$\mu = c\frac{\Delta_t}{\Delta_x}$$

とおくと (μ を**クーラン数 (Courant Number)** という),

$$v_{j,n+1} - v_{j,n} + c\mu(v_{j,n} - v_{j-1,n}) = 0$$

となる.

- 前ページの左辺第 2 項を移項することにより，以下の差分スキームが得られる．

$$v_{j,n+1} = (1 - c\mu)v_{j,n} + c\mu v_{j-1,n}$$

- 上述の公式が安定であるためのの十分条件は

$$\mu \leq 1$$

である ([河村]).

- 上述の公式では $\mu > 0$ でなければならないのだが, この条件を無視して $\mu = 0$ とすると, $v(x_j, t_{n+1}) = v(x_j, t_n)$ となり, 数値解の波形は時間によらず一定になってしまう.

差分法に関する補足

- 放物型および双曲型の方程式の数値解法の公式も行列の形に書き直すことができる．詳細は略す.
- 熱伝導方程式を不適切なパラメータを持つ陽的 Euler 法で解くと, 数値解が発散することがあることが知られている ([河村]).

- 線形/非線形にかかわらず, あるいは連立偏微分方程式であっても, 差分法によって対応する離散型公式を作ることはできるし, 高次の差分を使うことも可能であるが, 数値解が厳密解を近似しているか否かは別問題である.

- 差分法の弱点は複雑な形状の領域における数値解を求めにくいことであるが, 非線形座標変換によって矩形領域を曲面に投影することで, ある程度複雑な領域における求解に用いることもできる ([河村]) が, 有限要素法の方がより柔軟である.

- 偏微分方程式の求解をサポートしていない処理系で差分法を用いる場合には, 偏微分方程式を離散化した連立差分方程式を作り, それを数値的に解くことになる. 線形偏微分方程式の場合には, もっとも単純には, 楕円型偏微分方程式の項で述べたように方程式を行列表現する. このようにすれば, その処理系が線形計算をサポートしていれば, 線形偏微分方程式の求解ができる.

- この意味で，差分法は，プログラミングという観点では相対的に言えば簡単なのであるが，先に述べた通り，不用意に数値解法のパラメータを設定すると，数値解を得るための離散化された方程式それ自体が安定にならない，数値解がもとの方程式の解の近似にならない，などといった問題が発生し得るため，その使用にあたり十分な注意が必要でる．

- 可能であれば, 自分で零からプログラムを作るより, 偏微分方程式の求解をサポートする処理系を用いた方がよい.

有限要素法

- 有限要素法は工学の分野で偏微分方程式の近似解を求める実用解法として発展した手法である.

- 文献 [Gupta and Meek] によると, 有限要素法の嚆矢は Courant(1942) だが, その発展は Argyris (1954), Turner (1956), Clough (1960), Zienkiewicz and Cheung (1965) などによる. 上記で Courant 以外は工学系.

- 有限要素法は, 前回の講義で述べた弱形式の近似解を求める手法のひとつである.
- 議論の簡単のため, 2 変数の楕円型偏微分方程式を例に取って, 弱形式の近似解を求める問題を考える.
- $\boldsymbol{x} = (x, y)$ とし, 以下しばしば引数 $\boldsymbol{x} = (x, y)$ を省略する.

- 以下, $\displaystyle\int_D uv\,d\boldsymbol{x}$ を (u,v) と書く.
- ベクトル値関数 $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ に対し, $\displaystyle\int_D \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}$ を $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ と書く.

- 以下では, ベクトルはすべて列ベクトルであるものとする.
- u の勾配ベクトルを ∇u と書く. 勾配ベクトルは列ベクトルであるものとする.

楕円型偏微分方程式を有限要素法で解く

- 偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in U,$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial U$$

を解くことを考える．前回の一般論において，$a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = a_{21} = 0$, $b_1, b_2 = 0$, $c = 0$ とした場合である．

- 対応する弱形式は,

$$(\nabla u, \nabla v) = (f, v)$$

である.

- 弱形式に基づく求解では, 境界条件を満たすという条件の下で解を構成する必要がある.
- 境界条件として ∂U の外向き単位法線ベクトルに関する方向微分の値を考えることもあり, その場合には弱形式の右辺の形が変わるが, この講義では立ち入らない.

- 弱形式による求解は,

$$\forall v, \quad (\nabla u, \nabla v) = (f, v)$$

となる u を求める問題に帰着される.

- この近似解法として, u, v がともに既知の関数系

$$\{\phi_i : 1 \leq i \leq N\}$$

の線形結合で表現できると仮定し ($u = \sum_i p_i\phi_i$, $v = \sum_i q_i\phi_i$ とする), 係数 $\{c_i : 1 \leq i \leq N\}$ を求めるという方法がある. この手法を **Galerkin 法**という.

- Galerkin 法の手順を見てゆく.

- 弱形式に u, v の近似式を代入すると,

$$\sum_{i,j=1}^{N} p_i q_j (\nabla\phi_i, \nabla\phi_j) = \sum_{j=1}^{N} q_j (f, \phi_j)$$

となる.

- $a_{ij} = (\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)$, $b_j = (f, \phi_j)$ とし，$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{1\le i,j\le N}$ を a_{ij} を集めた行列, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ を対応する成分を集めたベクトルとすると,

$$\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{q}$$

となる. この問題では $\boldsymbol{A}$ は対称行列である.

- v の展開係数は任意だから, 解くべき問題は,

$$\forall \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{q} = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{q}$$

となるベクトル $\boldsymbol{p}$ を求める問題に帰着される.

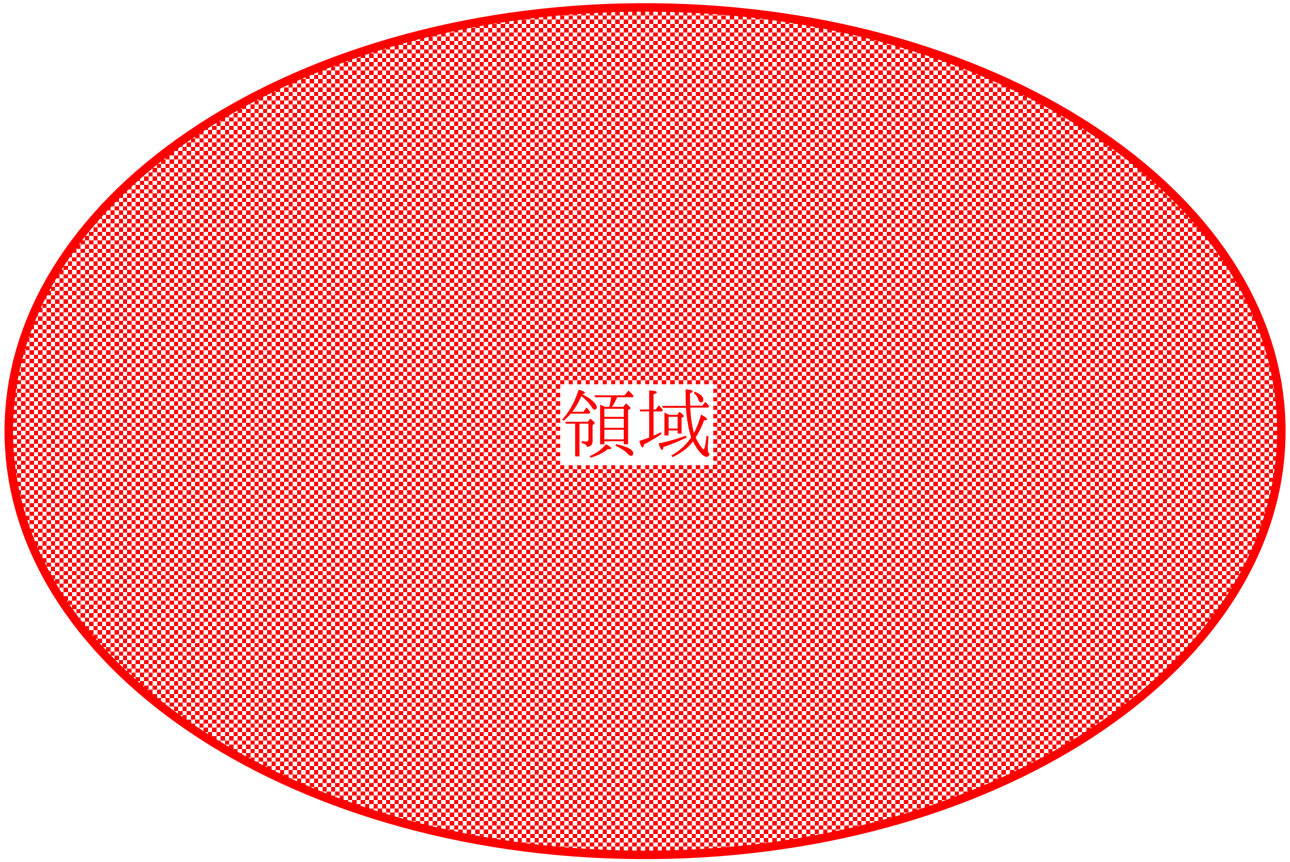
- このためには,

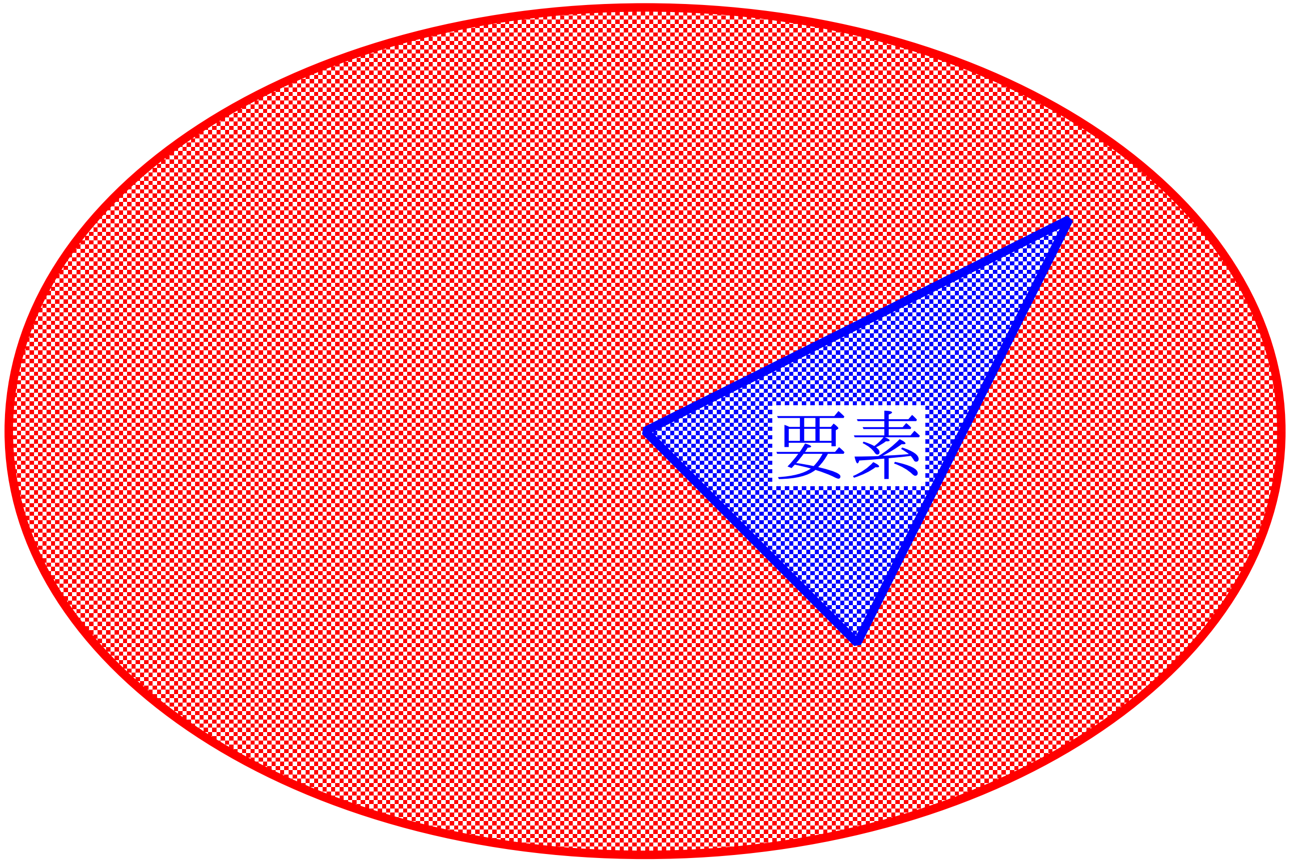
$$\boldsymbol{Ap} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

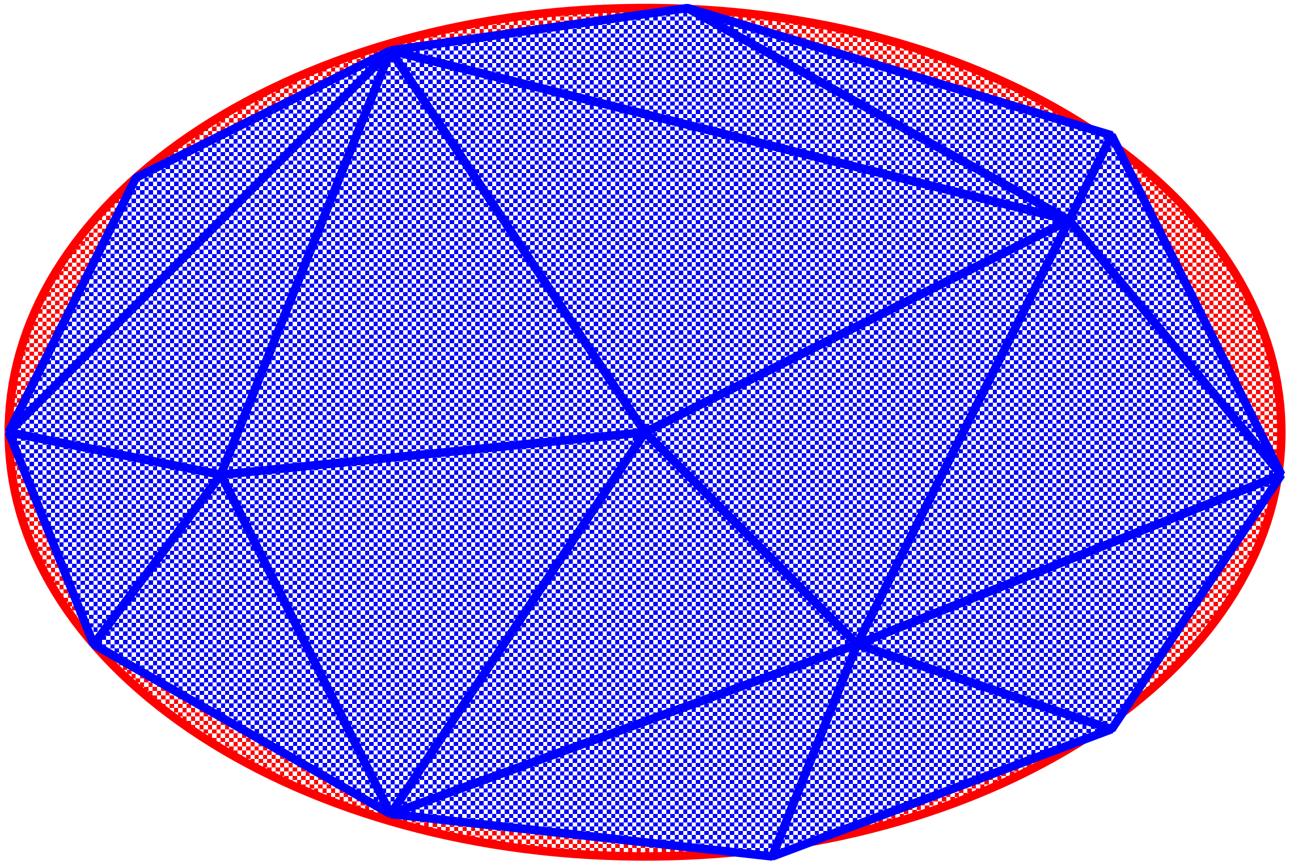
となればよい. 換言すると, 偏微分方程式の数値解を求める問題が連立一次方程式を解く問題に変換されたことになる. ただし, 別途境界条件をチェックしなければならない.

- 有限要素法はは, Galerkin 法の特別な場合で, 関数系 ϕ_i の取り方が名前の由来になっている.
- 有限要素法では, まず, 領域 U を有限個の要素と呼ばれる集合に分割する.
- $\mathbb{R}^n$ で要素を定義するには単体という概念が必要だが, 繁雑なので, 議論を $\mathbb{R}^2$ に限定する.

- $\mathbb{R}^2$ における**要素**は典型的には多角形 (とくに三角形) である. ただし, 隣接する要素は, 内点を共有せず, 辺および頂点を共有し, U 全体を (近似的に) 覆わなければならない.

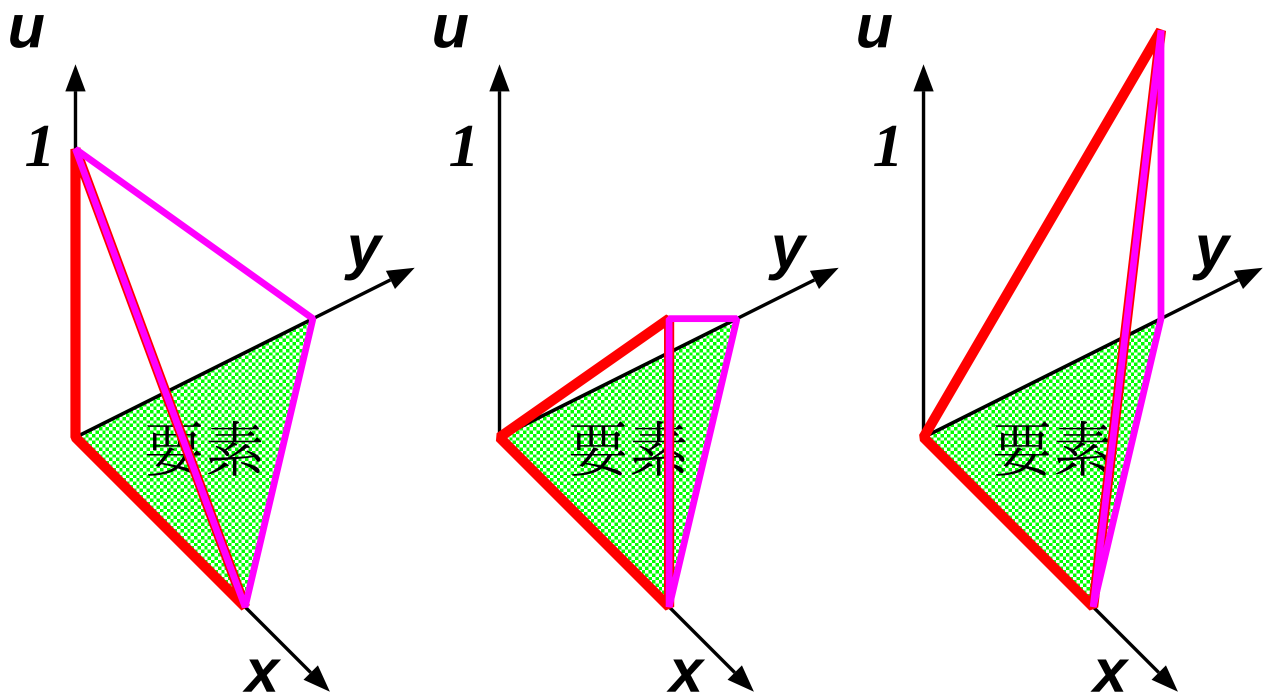

領域


要素

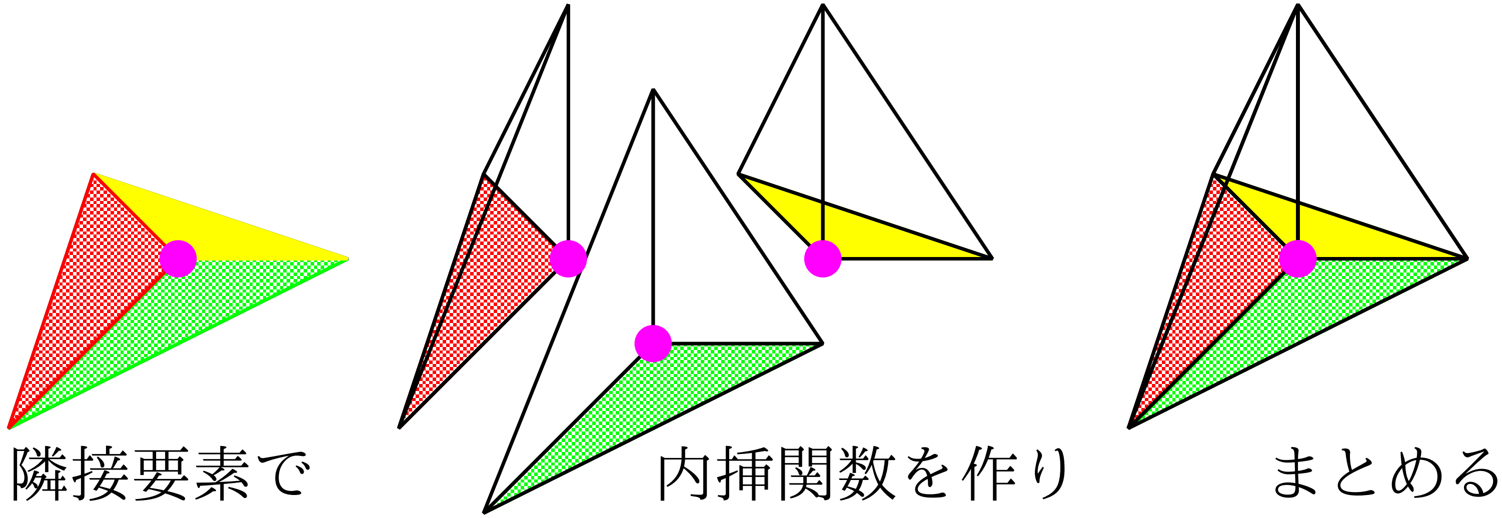


領域を要素に近似的に分割する

- 続いて, 関数 ϕ_i の構成法を説明する (要素が三角形の場合に限る).
- 要素をひとつ選び, この 3 個の頂点を節点とする. 3 個の節点のうちどれか 1 個で 1 となり, 残りの 2 点で零となる線形関数を 3 個取る. これを内挿関数と呼ぶ. 1 要素あたり 3 個の内挿関数ができる.


u
1
y
要素
x
u
1
y
要素
x
u
1
y
要素
x

- このようにすると, 隣接する要素は節点を共有し, 節点で 1 となる内挿関数どうしは連続に結合できる. このようになることを適合という.


隣接要素で
内挿関数を作り
まとめる

- U が有限個の三角形に分割されているものとし, それらの頂点を集めてから ∂U 上にあるものを除き, 通し番号を付ける.
- ∂U 上の頂点を除くのは, このようにすると, 今考えている境界条件 (∂U 上で $u = 0$) を自動的に満たすことができるからである.

- 頂点が N 個あるものとする. $1 \leq i \leq N$ に対し, 第 i 番目の頂点を考える.
- 頂点 i を含む要素が K 個あるものとし, これを $\Gamma_{i1}, \ldots, \Gamma_{iK}$ とする.

- $1 \le k \le K$ なる各 k に対し, Γ_{ik} で定義された内挿関数のうち, 頂点 i で 1 となるものを選び, それらをまとめて前々ページのような関数を作る．さらに, この関数の $U \setminus \left(\cup_{i=1}^{K} \Gamma_{ik}\right)$ における値を零としたものが, 有限要素法における関数 ϕ_i である．すなわち, 内挿関数をまとめて関数 ϕ_i を作る

- 節点として要素の頂点を選択しないこともある． この場合，隣接する要素 A と要素 B の共有する頂点を c としたとき，要素 A で定義され頂点 c で零とならない内挿関数 ϕ_A と要素 B で定義され頂点 c で零とならない内挿関数 ϕ_B が連続に結合できないことがあり得る．このような内挿関数の取り方を非適合という．非適合な内挿関数が利用されることもある．

- 内挿関数として 2 次関数なども用いられることがある.
- 内挿関数は, 「それが定義された要素以外では値が恒等的に零」と解釈される.

- 有限要素法はGalerkin 法の一種だったから，$a_{ij} = (\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)$, $b_j = (f, \phi_j)$ を計算して，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

を $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_N)^T$ について解き，

$$v = \sum_{i=1}^{n} p_i \phi_i$$

を近似解とすれば良い．

- 境界条件が上述の問題と異なる場合には, それに応じた工夫が必要である (文献を参照).

- ϕ_i は $\Gamma_{i1}, \ldots, \Gamma_{iK}$ 以外では零で, $1 \le k \le K$ に対し, Γ_{ik} 上で線形関数だから, Γ_{ik} 上では $\nabla\phi_i$ は定数ベクトルであり, よって, $(\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)$ は, 数値積分を用いることなく計算できる.

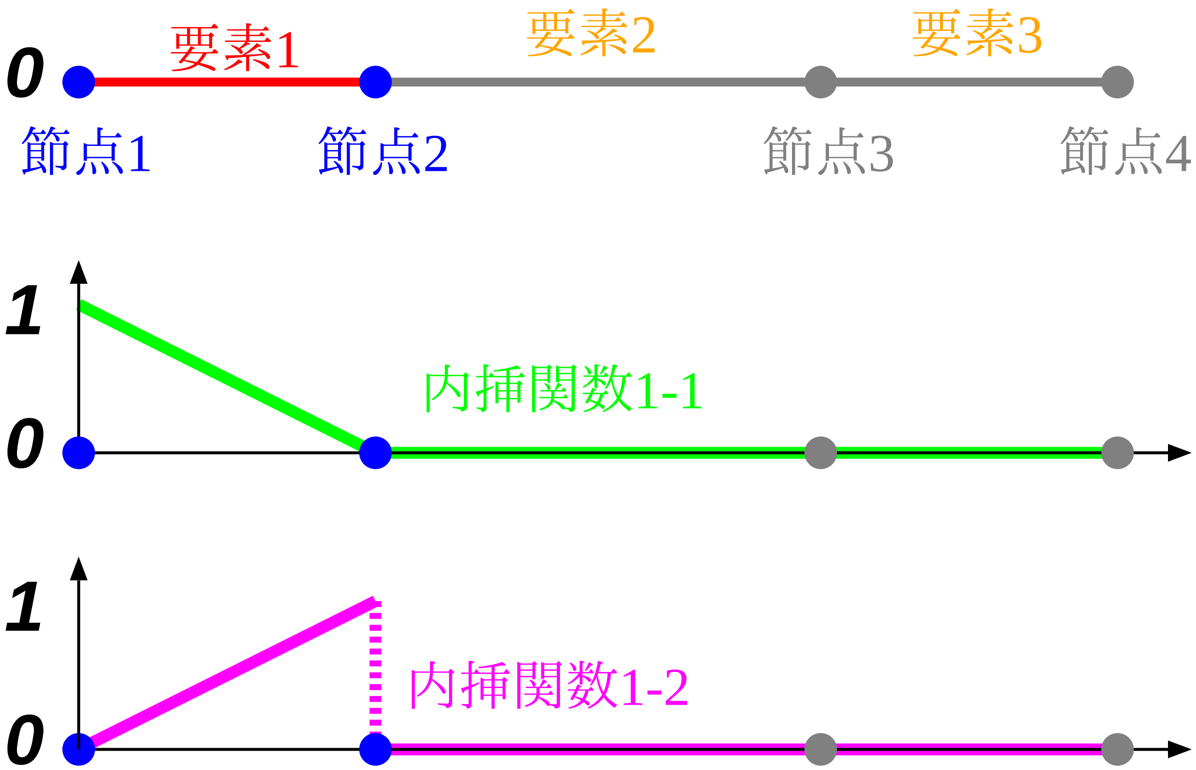
- (f, ϕ_i) については数値積分が必要となる可能性がある.

1 次元の有限要素法に関する注意

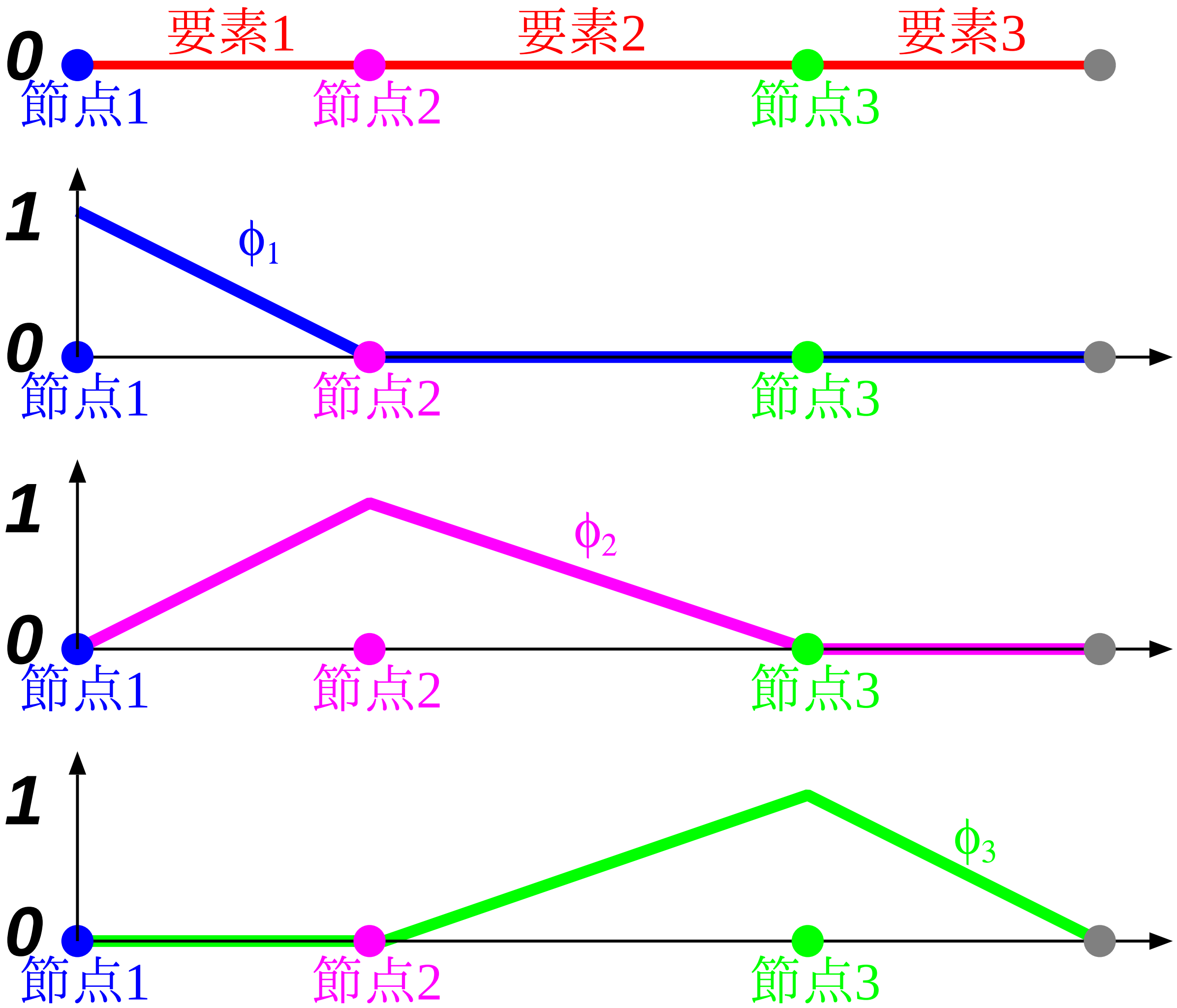
- 後で必要になるので, 1 次元の有限要素法における要素, 節点, 内挿関数, ϕ_i について述べる. ただし, 内挿関数は線形関数とし, 適合の条件を満たす内挿関数に議論を限定する.

- 1 次元の有限要素法では, 領域は $\mathbb{R}^n$ の (有界) 閉区間で, 節点はその区間に取られた有限個の点である. 節点が $x_1, \ldots, x_N$ という順に並んでいるものとすると, 要素は閉区間 $[x_i, x_{i+1}]$ である $(1 \le i \le N-1)$.

- 内挿関数としては, 各要素ごとに, その左端で 1, 右端で 0 となる関数と, その左端で 0, 右端で 1 となる関数を取る.


0
要素1
要素2
要素3
節点1
節点2
節点3
節点4
1
0
内挿関数1-1
1
0
内挿関数1-2

- 各節点で, その点で 1 となる内挿関数を集めて関数 ϕ_i を作ることは 2 次元の場合と同じ.


要素1
要素2
要素3
0
節点1
節点2
節点3
1
0
ϕ_1
節点1
節点2
節点3
1
0
ϕ_2
節点1
節点2
節点3
1
0
ϕ_3
節点1
節点2
節点3

放物型偏微分方程式を有限要素法で解く

- 次に, 2 変数の放物型偏微分方程式を有限要素法で解く方法を述べる [Quarteroni]. 空間は 1 次元であるが, さらに前回の一般論において, $a_{11} = 1$, $b_1 = 0$, $c = 0$ とした場合を考えると, 対応する弱形式は次の通りである.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right) = (f, v)$$

- 楕円型の場合と同様に, 節点を N 個とし, 関数 v を関数 $\{\phi_i(x) : 1 \leq i \leq N\}$ の線形結合であらわす (x が 1 次元で, $\phi_i(x)$ は上述の関数). $v = \sum_{i=1}^{N} q_i\phi_i(x)$ とする.

- $u = \sum_{i=1}^{N} u_i(t)\phi_i(x)$ とする．楕円型との相異点は, 係数が時変となる点である．

- $m_{ij} = (\phi_i, \phi_j)$, $a_{ij} = \left(\dfrac{d\phi_i}{dx}, \dfrac{d\phi_j}{dx}\right)$, $b_j = (f, \phi_j)$ とおく.
- $\boldsymbol{M} = (m_{ij})_{1 \le i,j \le N}$, $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{1 \le i,j \le N}$ を, これらの要素をまとめた行列とする.
- $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_N)^T$ とする.

- $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_N(t))^T$, $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_N)^T$ とする
- これらを使い, u, v を弱形式に代入すると, 次式が得られる.

$$\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\right)^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{q}.$$

- $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{A}$ が対称行列であり,

$$\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\right)^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{q}.$$

  が任意の $\boldsymbol{q}$ に対して成り立たなければならないから, 常微分方程式

$$\boldsymbol{M}\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$$

  が満たされていなければならないことになる.

- 以上によって, 放物型偏微分方程式を解く問題が, 常微分方程式に帰着された.
- したがって, この常微分方程式を数値的に解くことにより, もとの偏微分方程式の解が得られる.

- 常微分方程式

$$M\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$$

の数値解法は何でもよいのであるが，ここでは θ 法について述べる．

- θ 法は, この問題では次の形を取る.

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{M}\frac{\boldsymbol{u}(t_{n+1})-\boldsymbol{u}(t_n)}{\Delta_t} \\
&\quad+\boldsymbol{A}\left(\theta\boldsymbol{u}(t_{n+1})+(1-\theta))\boldsymbol{u}(t_n)\right) \\
&=(\theta\boldsymbol{b}(t_{n+1})+(1-\theta)\boldsymbol{b}(t_n))
\end{aligned}
$$

- 上記は差分法で用いられたθ法と違う式に見えるかもしれないが, t_{n+1}とt_nにおける関数の評価値の重み付き平均を取るという意味で, 同じ方法である.

- θ 法において $\theta = 0$ としたものを前進 Euler 法, $\theta = 1$ としたものを後退 Euler 法, $\theta = 1/2$ としたものを Crank-Nikolson 法と呼ぶ.

- 差分法と同様に, $\theta \geq 1/2$ では上述の公式は無条件安定であるが, $0 \leq \theta < 1/2$ では条件が必要になる．この条件は, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{w} = \lambda \boldsymbol{M}\boldsymbol{w}$ という一般化固有値問題の解を使って定式化されるが, 詳細は略す ([Quarteroni] 参照).

双曲型偏微分方程式を有限要素法で解く

- 双曲型偏微分方程式を有限要素法で解く手法について概要を述べる [Grossmann et al].

- 単純化のために, 双曲型偏微分方程式の一般形で, $a_{11} = 1$, $b_1 = 0$, $c = 0$ とした場合を考える. 解くべき偏微分方程式に対応する弱形式は,

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right) = (f, v)$$

である.

- 放物型の場合と同様に,

$$u = \sum_{i=1}^{N} u_i(t)\phi_i(x).$$

とする. 係数 $u_i(t)$ は時変である.

- 放物型の場合と同じ行列とベクトルを用いることにすると, 解くべき方程式は,

$$\boldsymbol{M}\frac{d^2\boldsymbol{u}}{d^2t} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$$

となる. あとは常微分方程式の数値解法を用いればよい.

有限要素法に関する補足

- 有限要素法のメリットのひとつは複雑な形状の境界に対応しやすいことである．また, 領域を有限個の要素に分割する部分の自由度が高く, 解の精度を高めたい箇所ほど分割を細かくするといった柔軟な対応ができることもメリットである．

- 一方で，領域の要素への分割は，理論的な説明は簡単なのだが，そのプログラミングには高いスキルを要する．

- この講義で, 有限要素法に関する説明が比較的簡単に終わったのは, 数学的な準備自体が前回の講義で弱形式について解説したことで概ね終わっていたことと, 領域の要素への分割の考え方自体には難しい点はないからである.

- 有限要素法を使って偏微分方程式を解くときには, よほどプログラミングスキルに自信がある者を除き, それをサポートしている処理系を使った方がよい.

参考文献

- 渋谷, 内田, 偏微分方程式, 第 7 版, 裳華房, 2009.
- 熊ノ郷, 偏微分方程式, 共立出版, 1978.
- 河村, 応用偏微分方程式, 共立出版, 1998.
- 田端, 偏微分方程式の数値解法, 岩波書店, 2010.
- 神谷, 北, 偏微分方程式の数値解法, 共立出版, 1998.
- 山本, 数値解析入門, 増補版, サイエンス社, 2003.
- 戸川, 有限要素法, 圧力技術, Vol. 11, No. 5, pp. 49–56, 1973.
- L. C. Evans, Partial Differential Equations, 2/e, American Mathematical Society, 2010.
- D. Bleecker and G. Csordas, Basic Partial Differential Equations, International Press, 1996.

- M. Renardy and R. C. Rogers, An Introduction to Partial Differential Equations, Springer, 1992.
- J. Li and Y. -T. Chen, Computational Partial Differential Equations Using MATLAB, CRC Press, 2009.
- J. A. Trangenstein, Numerical Solution of Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations, Cambridge University Press, 2013.
- C. Grossmann, H. -G. Roos and M. Stynes, Numerical Treatment of Partial Differential Equations, Springer, 2007.
- A. Quarteroni, Numerical Models for Differential Problems, Springer, 2014.
- K. K. Gupta and J. L. Meek, A brief history of the beginning of the finite element method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 39, pp. 3761–3774, 1996.