電 301 数値解析
第 13 回
微分方程式の数値解法 (3)

今回と次回の参考文献 (1)

- 渋谷, 内田, 偏微分方程式, 第 7 版, 裳華房, 2009.
- 熊ノ郷, 偏微分方程式, 共立出版, 1978.
- 河村, 応用偏微分方程式, 共立出版, 1998.
- 田端, 偏微分方程式の数値解法, 岩波書店, 2010.
- 神谷, 北, 偏微分方程式の数値解法, 共立出版, 1998.
- 山本, 数値解析入門, 増補版, サイエンス社, 2003.
- 藤原, 天才の栄光と挫折, 新潮社, 2002.
- L. C. Evans, Partial Differential Equations, 2/e, American Mathematical Society, 2010. 3/e, Dover, 1999.

今回と次回の参考文献 (2)

- K. E. Gustafson, Introduction to Partial Differential Equations and Hilbert Space Methods,
- D. Bleecker and G. Csordas, Basic Partial Differential Equations, International Press, 1996.
- M. Renardy and R. C. Rogers, An Introduction to Partial Differential Equations, Springer, 1992.
- J. Li and Y. -T. Chen, Computational Partial Differential Equations Using MATLAB, CRC Press, 2009.
- J. A. Trangenstein, Numerical Solution of Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations, Cambridge University Press, 2013.

今回と次回の参考文献 (3)

- C. Grossmann, H. -G. Roos and M. Stynes, Numerical Treatment of Partial Differential Equations, Springer, 2007.
- A. Quarteroni, Numerical Models for Differential Problems, Springer, 2014.
- M. Kashiwara, Algebraic Study of Systems of Partial Differential Equations, Société Mathématique de France, 1995 (柏原の修士論文 (1970) の英訳)
- K. K. Gupta and J. L. Meek, A brief history of the beginning of the finite element method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 39, pp. 3761–3774, 1996.

第13回, 第14回の内容について(1)

- 今回と次回の講義では, 偏微分方程式の数値解法について解説する
- まず偏微分方程式とは何かについて述べたあと, 代表的な偏微分方程式を紹介し, それに続いて数値解法について議論する.

第 13 回, 第 14 回の内容について (2)

- 偏微分方程式は広く深い分野であり, 今日でも数多くの問題が研究されているが, この講義では数学的な議論には立ち入らない.
- 一方, 独立変数が少なく低次の偏微分方程式の数値解法は比較的単純であり, もっとも単純な場合は線形代数の問題に帰着できる. この講義では簡単な場合を中心に議論を進める.

偏微分方程式とは (1)

- 複数個の独立変数とその導関数のあいだに与えられた関係式を偏微分方程式という (岩波数学入門辞典).
- 偏微分方程式の分類について述べる前に, 独立変数が 2 個 ((x, y) あるいは (x, t) とする) の場合について, 代表的な偏微分方程式をいくつか紹介する (未知関数を u とする).

偏微分方程式とは (2)

- **Laplace 方程式**: $\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}$
  物理では, 静電場のポテンシャル, 重力ポテンシャルの満たす方程式, 複素関数論では, 調和関数が満たすべき方程式 (岩波数学入門辞典).

偏微分方程式とは (3)

- **Poisson 方程式**: $\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)}$

  Laplace 方程式の右辺の零を関数 $f(x, y)$ で置き換えたもの. 電荷の存在する静電場のポテンシャル, 質量密度が存在する重力ポテンシャルの満たす方程式 (岩波数学入門辞典).

偏微分方程式とは (4)

- 上記は以下の方程式の特別な場合:
$$\left(\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u=f(x,y)\ (a,b\,\text{は定数}).$$
- 楕円の方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=c$ との対比から (上の式で関数 u を除いて見比べる), このような偏微分方程式を楕円型という.

偏微分方程式とは (5)

- 熱伝導方程式: $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial t} = \kappa \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x}}$
  上記は空間 (x に対応) が 1 次元の場合. t は時間. 熱伝導や, 物質の拡散を記述する方程式.
- 放物線の方程式 $t = \kappa x^2$ との対比から, このような偏微分方程式を放物型という.

偏微分方程式とは (6)

- 波動方程式: $\boxed{\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x}}$
  膜や弦の振動, 音波や真空中の電磁波が満たす方程式 (岩波数学入門辞典).
- 双曲線の方程式 $\frac{t^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ との対比から, このような偏微分方程式を双曲型という.

偏微分方程式の分類 (1)

- 独立変数を $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ とする (「時間」を特別扱いする場合については後述).
- $\boldsymbol{\alpha}$ を n 個の非負の整数の組, $|\boldsymbol{\alpha}| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ とし, これを多重指標と呼ぶ.
- 多重指標 $\boldsymbol{\alpha}$ に対応する微分演算子 $D^{\boldsymbol{\alpha}}$ を, $D^{\boldsymbol{\alpha}} = \dfrac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$ のように定義する.

偏微分方程式の分類 (2)

- $D^{\boldsymbol{\alpha}}$ を u に作用させると, $D^{\boldsymbol{\alpha}}u = \dfrac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}u}{\partial x_1^{\alpha 1}\partial x_2^{\alpha 2}\cdots\partial x_n^{\alpha n}}$.
- $k \geq 0$ と u に対し, 次のように定義する:
  $D^k u = \{D^{\boldsymbol{\alpha}}u : \boldsymbol{\alpha}$ は多重指標で $|\boldsymbol{\alpha}| = k\}$
- 次のページでは, F は実数値関数, $\boldsymbol{F}$ は $\mathbb{R}^m$ に値を取るベクトル値関数とする (m の値は指定しない).

偏微分方程式の分類 (3)

- k 階 の偏微分方程式とは, 以下の関係式:

$$\boxed{F(D^k u(\boldsymbol{x}), D^{k-1}u(\boldsymbol{x}), \ldots, u(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) = 0}$$

- k 階の偏微分方程式系とは, 以下の関係式:

$$\boxed{\boldsymbol{F}(D^k u(\boldsymbol{x}), D^{k-1}u(\boldsymbol{x}), \ldots, u(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}}$$

偏微分方程式の分類 (4)

- k 階の偏微分方程式が線形であるとは, 偏微分方程式が u に依存しない関数 $\{a_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x}) : |\boldsymbol{\alpha}| \leq k\}$ を使って次のように書き表せることをいう.

$$\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leq k} a_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x}) D^{\boldsymbol{\alpha}} u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$$

$f = 0$ のときには上記を斉次方程式という.

偏微分方程式の分類 (5)

- 以下しばしば関数 f の引数 $\boldsymbol{x}$ を略すので注意.
- k 階の偏微分方程式が**半線形 (semilinear)** であるとは, 偏微分方程式が
$$\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=k} a_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x}) D^{\boldsymbol{\alpha}} u(\boldsymbol{x}) + a_0(D^{k-1}u(\boldsymbol{x}), \ldots, \boldsymbol{u}(x), \boldsymbol{x}) = 0$$
のように書き表せることをいう.

偏微分方程式の分類 (6)

- k 階の偏微分方程式が準線形 (quasilinear) であるとは, 偏微分方程式が
  $$\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=k} a_{\boldsymbol{\alpha}}(D^{k-1}u(\boldsymbol{x}), \ldots, u(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x})D^{\boldsymbol{\alpha}}u(\boldsymbol{x}) \\ +a_0(D^{k-1}u(\boldsymbol{x}), \ldots, \boldsymbol{u}(x), \boldsymbol{x}) = 0$$
  のように書き表せることをいう.
- 上記以外を非線形偏微分方程式という.

偏微分方程式の分類 (7)

- 偏微分方程式を**解く**とは, (何らかの形で) 偏微分方程式を満たす関数を求めることを言い, その関数を**解**と呼ぶ.
- k 階偏微分方程式を (直接的に) 満たす k 階連続微分可能な解を**古典解**という (これ以外に**弱解**と呼ばれる解を考えなければならないことがある (後述)).

偏微分方程式の分類 (8)

- この講義では, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ とし, $\mathbb{R}^n$ の部分集合 U で偏微分方程式の解を求める問題を考える ($U = \mathbb{R}^n$ である可能性は排除しない).
- U を仮に領域と呼ぶが, 複素関数論と異なり, この言葉に厳密な意味を持たせるわけではない.
- U の境界とは, U の閉包と U の補集合の閉包の共通部分のことである. これを ∂U と書く. 曖昧な言い方になるが, U および ∂U は, 数値計算で困ることがないような「素直な形状」になっていると仮定する.

偏微分方程式の分類 (9)

- 偏微分方程式には様々な階数のものがある.
- 2 変数 2 階線形定係数偏微分方程式は, 楕円型, 放物型, 双曲型の 3 種類に分類される.
- 3 変数以上の場合は上記の分類は網羅的でないが, 上記 3 種は応用上重要である. 多変数の場合の一般形を以下に述べる ([Evans]).

偏微分方程式の分類 (10)

2 階線形楕円型偏微分方程式の一般形:

$$\boxed{Lu = f} \qquad (+\text{境界条件})$$

- L は次ページのいずれかの式で定義される. ただし, 次ページにおいて, $a_{ij}(\boldsymbol{x})$ は, $a_{ij}(\boldsymbol{x}) = a_{ji}(\boldsymbol{x})$ と $\exists c > 0,\ \forall \boldsymbol{x},\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x})\xi_i\xi_j \geq c\|\boldsymbol{\xi}\|^2$ という条件を満たす関数とする.

偏微分方程式の分類 (11)

nondivergent form :

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\boldsymbol{x})u$$

divergent form :

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\boldsymbol{x})u$$

境界条件とは, ∂U において未知関数に課せられた条件.

偏微分方程式の分類 (12)

2 階線形放物型偏微分方程式の一般形：

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f} \qquad (+\text{初期条件, 境界条件})$$

- L は次ページのいずれかの式で定義される．ただし，次ページにおいて，$a_{ij}(\boldsymbol{x}, t)$ は，$a_{ij}(\boldsymbol{x}, t) = a_{ji}(\boldsymbol{x}, t)$ と $\exists c > 0, \forall \boldsymbol{x}, \forall t, \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}, t)\xi_i\xi_j \geq c\|\boldsymbol{\xi}\|^2$ という条件を満たす関数とする．

偏微分方程式の分類 (13)

nondivergent form :

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(\boldsymbol{x}, t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x}, t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\boldsymbol{x}, t)u$$

divergent form :

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x}, t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\boldsymbol{x}, t)u$$

初期条件とは, 初期時刻で未知関数に課せられた条件.

偏微分方程式の分類 (14)

2 階線形双曲型偏微分方程式の一般形:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Lu = f} \qquad (+\text{初期条件, 境界条件})$$

- L の定義と $a_{ij}(\boldsymbol{x}, t)$ の条件は双曲型と同じ.

放物型と双曲型では独立変数に時間 t が追加されていることに注意.

偏微分方程式の分類 (15)

- 独立変数の中に時間が含まれるか否かで偏微分方程式を分類することもある.
- 独立変数の中に時間が含まれる偏微分方程式を**発展方程式**という. 発展方程式では, 初期時刻において与えられた関数に対して偏微分方程式を解くという定式化 (**初期値問題**あるいは **Cauchy 問題**という) が意味を持つ.

偏微分方程式の分類 (14)

- 一方, 独立変数が動く範囲を有限の領域に限って偏微分方程式を解くことも多いが, その場合には, 領域の境界で一定の条件を満たす解が必要になることがある. そのような解を求める問題を境界値問題という.
- 初期値問題と境界値問題が組み合わされた問題を混合問題という.

解の存在性と数値解法 (1)

- 常微分方程式と同様に, 偏微分方程式でも, 解が存在するか (存在性), 解が一意的に定まるか (一意性), 解がパラメータに対して連続に変化するか (安定性) が問題となる.
- 偏微分方程式の解の存在性に関し, Cauchy-Kowalevskaya の定理と呼ばれる定理を結果のみ紹介する ([熊ノ郷]).

解の存在性と数値解法 (2)

- 次の 1 階連立偏微分方程式の初期値問題を考える.

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \sum_{k=1}^{l} \left(\sum_{p=1}^{n} a_{jkp}(\boldsymbol{x}, t) \frac{\partial u_j}{\partial x_p} + b_{jk}(\boldsymbol{x}, t) u_k \right) + c_j(\boldsymbol{x}, t),$$

$$u_j(\boldsymbol{x}, t_0) = \psi_j(\boldsymbol{x}), \qquad j = 1, \ldots, l.$$

解の存在性と数値解法 (3)

- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ で, 上式の $a_{jkp}(\boldsymbol{x}, t)$ などは, その変数の実解析関数であるものとする.
- 以上の条件のもとで, 先に挙げた偏微分方程式系は局所的に実解析的な一意解を持つことが示される (**Cauchy-Kowalevskaya の定理**; なお, 「実解析的」という条件を外すと解の存在性は保証されない).

解の存在性と数値解法 (4)

Cauchy-Kowalevskaya の定理は Sonya W. Kowalevskaya (1850–1891) によって発見された定理で, 偏微分方程式論の基本定理である. 父親は貴族で, 偽装結婚により帝政末期のロシアを脱出し, Weierstrass に師事した. Cauchy-Kowalevskaya の定理は 24 歳のときの成果である. 社交界で華々しい活動をし, 波瀾万丈の生涯を送ったことでも知られている ([藤原]). Cauchy-Kowalevskaya の定理は柏原正樹によって 1970 年に一般化されているが, これは柏原の修士論文である (Kashiwara).

解の存在性と数値解法 (5)

- たとえ線形であっても, 偏微分方程式はふつうは解析的には解けない. よって, 数値解法への依存性が高くなる.
- 偏微分方程式の数値解法は, 常微分方程式と比べて極端に難しいということはないし, ある程度汎用的に使える. ただし数値解が真の解に収束するか否かについては注意が必要.

弱解 (1)

- 偏微分方程式の微分可能とは限らない「拡張された解」を取り扱うために導入されたのが弱解である.
- 弱解は, 積分を用いて定義され, 応用上は有限要素法 (次回) とも関係がある. この講義では, 2 階線形楕円型, 放物型, 双曲型偏微分方程式に限り, 弱解の定義を述べる.

弱解 (2)

- まず, 2 階線形楕円型偏微分方程式の弱解について考える.
- 有界な領域 U(境界を ∂U とする) における 2 階線形楕円型偏微分方程式 $Lu = f$ が与えられ, 「∂U において $u = 0$」という境界条件のもとでこれを解きたいものとする.

弱解 (3)

- L は nondivergent form で与えられているものとする: $Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\boldsymbol{x})u.$
- ∂U の外向き法線ベクトルを $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ とすると, Gauss-Green の公式によれば, $\int_U \frac{\partial u}{\partial x_i} d\boldsymbol{x} = \int_{\partial U} u\nu_i dS$ である ([Evans]).

弱解 (4)

- $Lu = f$ の両辺に関数 v を掛けて積分することにより, Gauss-Green の公式を適用することで, 微分の階数を 1 だけ減らすことを考える. 関数 v は **Sobolev 空間**と呼ばれる関数空間の要素なのであるが, この講義では深入りしない.

弱解 (5)

- Gauss-Green の公式と, ∂U において v が零という性質から, 次式が得られる.

$$\int_U \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) v + a_{ij}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) d\boldsymbol{x} = 0.$$

- $Lu = f$ の両辺に v を掛けてから積分すると $\int_U (Lu) v d\boldsymbol{x} = \int_U f v d\boldsymbol{x}$ となる.
- これに上式を代入すると ⋯

弱解 (6)

$$\int_U \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} v + c(\boldsymbol{x}) uv d\boldsymbol{x} = \int_U f v \, d\boldsymbol{x}$$

- v をどのように取っても v がこの方程式を満たすとき, u をこの問題の弱解という.

弱解 (7)

- 以下, $\int_D uv d\boldsymbol{x}$ を (u,v) と書く.
- $B[u,v]$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} B[u,v] &= \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} v + c(\boldsymbol{x}) uv d\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

弱解 (7)

- 上記を使うと, 弱解の満たすべき方程式は

$$B[u, v] = (f, v)$$

と書ける. このような形式を弱形式という.

- ∂U で u が零でない場合には, 弱形式の右辺にそれに対応する項が追加される.

弱解 (8)

- 次に, 2 階線形放物型偏微分方程式の弱解について考える.
- $\partial U \times [0,T]$ において $u(\boldsymbol{x},t)=0$, $t=0$ のとき $u(\boldsymbol{x},0)=g(\boldsymbol{x})$ という境界条件および初期値のもとで 2 階線形放物型偏微分方程式を解きたいという状況を考える.

弱解 (9)

- $B[u,v;t]$ を次のように定義する．
  $$B[u,v;t] = \int_U \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n b_i(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial u}{\partial x_i}v + c(\boldsymbol{x},t)uv d\boldsymbol{x}$$
- $\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f$ の両辺に v を掛けてから積分し，2 階線形放物型偏微分方程式の場合と同様の計算をおこなうと …

弱解 (10)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + B[u, v; t] = (f, v)$$

- u が任意の v に対して先の方程式を満たし, かつ $u(\boldsymbol{x}, 0) = g(\boldsymbol{x})$ となるとき, これを, 放物型の初期値/境界値問題に対する弱解という.

弱解 (11)

- 続いて, 2 階線形双曲型偏微分方程式の弱解について考える.
- $\partial U \times [0,T]$ において $u(\boldsymbol{x},t) = 0,\ u(\boldsymbol{x},0) = g(\boldsymbol{x})\ \frac{\partial u}{\partial t}(\boldsymbol{x},0) = h(\boldsymbol{x})$ という境界条件および初期値のもとで 2 階線形双曲型偏微分方程式を解きたいという状況を考える.

弱解 (12)

- 放物型と同様の手順で, 以下の方程式が導かれる. $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v\right) + B[u, v; t] = (f, v)$
- u が任意の v に対して先の方程式を満たし, かつ $u(\boldsymbol{x}, 0) = g(\boldsymbol{x})$, $\frac{\partial u}{\partial t}(\boldsymbol{x}, 0) = h(\boldsymbol{x})$ となるとき, これを, 双曲型の初期値/境界値問題に対する弱解という.

弱解 (13)

- この講義では u や v が含まれる関数空間を明示していないので注意.
- 楕円型偏微分方程式は一定の条件のもとで弱解を持つ. 放物型, 双曲型偏微分方程式はつねに弱解を持ち, それは一意的である ([Evans]).

色々な偏微分方程式の数値解法 (1)

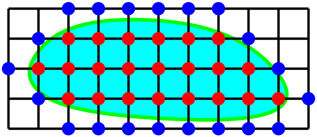
- 偏微分方程式の数値解法には差分法, 有限要素法, 境界要素法, 有限体積法, メッシュレス法など, 様々なものがある ([Li and Chen]).
- これらのうち, 差分法は, 偏微分方程式の素直な離散化であり, 流体力学の分野で広く用いられている ([河村]).

色々な偏微分方程式の数値解法 (2)

- 有限要素法は, 汎用性が高く, 偏微分方程式の数値解法の代表格である ([Li and Chen]).
- この講義では, 差分法と有限要素法に絞って数値解法を紹介する.
- 以下では, 独立変数が 2 個の場合のみを取り扱う.

差分法 (1)

- 差分法は, 解を求めたい領域に格子を定め, 偏微分を格子点のあいだの差分で近似することにより, 偏微分方程式を差分方程式に帰着させて解く方法.

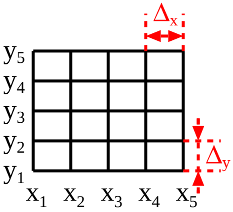


差分法 (2)

- 図からわかるように, 差分法は, 解を求めたい領域が複雑な形状の問題には適さない.
- 以下では, 議論の簡単のために, 解を求めたい領域が矩形の場合のみを考える.
- 独立変数を (x, y) とする.

差分法 (3)

- さらに単純化して，x 軸と y 軸に N_x，N_y 個の格子点 x_1，$\ldots$，x_N，$y_1, \ldots$，y_N がそれぞれ等間隔 (Δ_x, Δ_y) で取られている場合を考える (図は $N_x = N_y = 5$ の場合).



差分法 (4)

- 差分法による $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j)$ の近似は $\cdots$

$$\text{前進差分} \quad \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_i, y_j)}{\Delta_x}$$

$$\text{後退差分} \quad \frac{u(x_i, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{\Delta_x}$$

$$\text{中心差分} \quad \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{2\Delta_x}$$

差分法 (5)

- 差分法による $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j)$ の近似は $\cdots$

$$\text{前進差分} \quad \frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_j)}{\Delta_y}$$

$$\text{後退差分} \quad \frac{u(x_i, y_j) - u(x_i, y_{j-1})}{\Delta_y}$$

$$\text{中心差分} \quad \frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_{j-1})}{2\Delta_y}$$

差分法 (6)

- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j)$ は, 典型的には, 前進差分と後退差分を組み合わせて, 以下のように計算する.

$$\frac{1}{\Delta_x}\left(\overbrace{\frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+1}, y_j)}^{\text{後退差分で近似}} - \overbrace{\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j)}^{\text{後退差分で近似}}\right) \quad \text{(前進差分)}$$

差分法 (7)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+1}, y_j) \simeq \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_i, y_j)}{\Delta_x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) \simeq \frac{u(x_i, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{\Delta_x}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \simeq \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{\Delta_x^2}$$

差分法 (8)

同様に,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \simeq \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{\Delta_y^2}$$

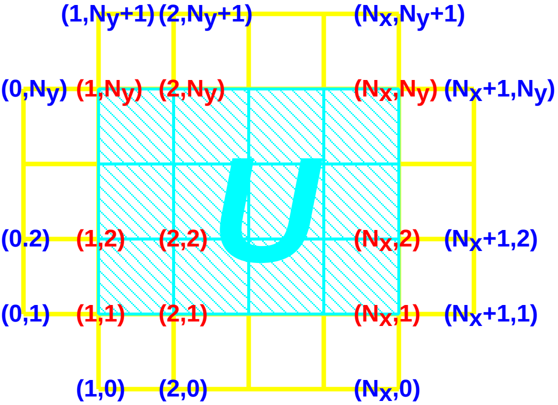
以下では, 式を短く書くために, $u(x_i, y_j)$ を u_{ij} と略記する. すると, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta_x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta_y^2}$ となる.

差分法 (9)

- 続いて, 独立変数が 2 個の 2 階線形楕円型偏微分方程式の数値解法について述べる ([山本]).
- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), (x, y) \in U,$
  $u(x, y) = g(x, y), (x, y) \in \partial U$ を解きたい. f が C^1 級なら解は存在する ([山本]).
- U を矩形領域とし, 近似解を v_{ij} とする.

差分法 (10)

- 領域 U の x 軸に N_x 個の格子点 $x_1, \ldots, x_{Nx}$, y 軸に N_y 個の格子点 $y_1, \ldots, y_{N_y}$ が取られているものとする.
- 境界の x 座標を x_0 および x_{N_x+1}, y 座標を y_0 および y_{N_x+1} とする. (次ページ図, ただし文字 x と y を略した). U 内の点が赤字, 境界が青字.


(1,Ny+1)
(2,Ny+1)
(Nx,Ny+1)
(0,Ny)
(1,Ny)
(2,Ny)
(Nx,Ny)
(Nx+1,Ny)
U
(0.2)
(1,2)
(2,2)
(Nx,2)
(Nx+1,2)
(0,1)
(1,1)
(2,1)
(Nx,1)
(Nx+1,1)
(1,0)
(2,0)
(Nx,0)

差分法 (12)

対応する差分方程式は以下の通り.

$$
\begin{aligned}
&\frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{\Delta_x^2} \\
&\quad + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{\Delta_y^2} = f_{i,j}, \quad (x_i, y_j) \in U, \\
&v_{i,j} = g_{i,j}, \quad (x_i, y_j) \in \partial U
\end{aligned}
$$

差分法 (13)

- 上述の差分方程式は一意解を持つことが示される ([山本]).
- $u(x,y)$ が (x,y) に関して C^4 級なら, $u_{ij}-v_{ij} = O(\Delta_x^2) + O(\Delta_y^2)$ ([山本]). すなわち, 上述の差分方程式は解 v_{ij} を持ち, Δ_x と Δ_y を零に近付けると v_{ij} は u_{ij} に近付く.

差分法 (14)

- 上述の差分方程式は, $\Delta_x = \Delta_y = h$ と取ると,

  $$v_{i+1,j} + v_{i-1,j} + v_{i,j+1} + v_{i,j-1} - 4v_{i,j} = h^2 f_{i,j}$$

  のように簡単になる. これを 5 点差分公式という ([山本]).

- 上述の差分方程式を行列の形で書くためには, v_{ij} を適当にならべかえる必要がある.

差分法 (15)

- 5 点差分公式に対応する差分方程式の行列表現については, 時間の都合で次回に回す.
- 差分法についてはまだ述べるべきことがあるが, 時間の都合で次回に回す.
- 次回の講義の内容は, 差分法 (続き) と有限要素法である.