電気303/電情303 数値解析 (13)

微分方程式の数値解法 (3)
偏微分方程式とその解

第 13 回, 第 14 回の内容について

- 教科書では偏微分方程式の数値解法は取り扱われていないが, 偏微分方程式の数値解法は数値解析においてもっとも重要な分野のひとつである.
- そこで, 今回と次回の講義では, 教科書を離れ, 偏微分方程式の数値解法について解説する

- まず偏微分方程式とは何かについて述べたあと，代表的な偏微分方程式を紹介し，それに続いて数値解法について議論する．
- 偏微分方程式は広く深い分野であり，今日でも数多くの問題が研究されているが，この講義では数学的な議論には立ち入らない．

- 一方, 独立変数が少なく低次の偏微分方程式の数値解法は比較的単純であり, もっとも単純な場合は線形代数の問題に帰着できる. この講義では簡単な場合を中心に議論を進める.

今回と次回の参考文献

- 渋谷, 内田, 偏微分方程式, 第 7 版, 裳華房, 2009.
- 熊ノ郷, 偏微分方程式, 共立出版, 1978.
- 河村, 応用偏微分方程式, 共立出版, 1998.
- 田端, 偏微分方程式の数値解法, 岩波書店, 2010.
- 神谷, 北, 偏微分方程式の数値解法, 共立出版, 1998.
- 山本, 数値解析入門, 増補版, サイエンス社, 2003.
- 戸川, 有限要素法, 圧力技術, Vol. 11, No. 5, pp. 49–56, 1973.
- L. C. Evans, Partial Differential Equations, 2/e, American Mathematical Society, 2010.
- D. Bleecker and G. Csordas, Basic Partial Differential Equations, International Press, 1996.

- M. Renardy and R. C. Rogers, An Introduction to Partial Differential Equations, Springer, 1992.
- J. Li and Y. -T. Chen, Computational Partial Differential Equations Using MATLAB, CRC Press, 2009.
- J. A. Trangenstein, Numerical Solution of Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations, Cambridge University Press, 2013.
- C. Grossmann, H. -G. Roos and M. Stynes, Numerical Treatment of Partial Differential Equations, Springer, 2007.
- A. Quarteroni, Numerical Models for Differential Problems, Springer, 2014.
- K. K. Gupta and J. L. Meek, A brief history of the beginning of the finite element method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 39, pp. 3761–3774, 1996.

偏微分方程式とは

- 偏微分方程式とは, 複数個の独立変数を持つ(未知の) 関数とその偏導関数のあいだに与えられた関係式のことをいう.

- たとえば, 2 変数関数 $u(x, y)$ (独立変数は x と y の 2 個) に対し,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

は偏微分方程式である.

- 偏微分方程式の分類について述べる前に, 独立変数が 2 個 (独立変数を (x, y) あるいは (x, t) とする) の場合について, 代表的な偏微分方程式をいくつか紹介する.
- 未知関数を u とする.

- **Laplace 方程式**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

- **Poisson 方程式**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

物理的には, 電荷の存在しない静電場のポテンシャルは Laplace 方程式を満たし, 電荷の存在する静電場のポテンシャルは Poisson 方程式を満たす.

- Laplace 方程式や Poisson 方程式は, 楕円型偏微分方程式と呼ばれるものの例である.

- **楕円型偏微分方程式**とは,

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}u=f(x,y)$$

という形の偏微分方程式のことをいう．ただし, a, b は定数である．

- この形の偏微分方程式は, 楕円の方程式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c$$

との対比から, 楕円型偏微分方程式と呼ばれる.

- 2 変数楕円型偏微分方程式の一般形はもう少し複雑なのであるが, これについては後で述べる.

- 熱伝導方程式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- 上記は空間 (x に対応) が 1 次元の場合で, t は時間である. これは, 熱伝導や, 物質の拡散を記述する方程式である.

- 放物線の方程式

$$t = \kappa x^2$$

との対比から, このような型の偏微分方程式を**放物型偏微分方程式**という

- 2 変数放物型偏微分方程式の一般形ももう少し複雑なのであるが, これについても後で述べる.

- 波動方程式:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- 膜や弦の振動, 音波や真空中の電磁波などは, この形の偏微分方程式を満たす.

- 双曲線の方程式

$$\frac{t^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

との対比から, このような型の偏微分方程式を双曲型偏微分方程式という.

- 2 変数双曲型偏微分方程式の一般形ももう少し複雑なのであるが, これについても後で述べる.

- 楕円型, 放物型, 双曲型という分類では, 未知関数 u に関する最高次の偏微分の項の形のみを問題とする. なお,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

などの項に係数として (x, y) の関数が乗じることも許容される.

偏微分方程式を「解く」とは?

- 偏微分方程式を解くとは, (何らかの形で) 偏微分方程式を満たす関数を求めることを言い, その関数を解と呼ぶ.
- 「何らかの形」という含みがある書き方には理由がある.

- 偏微分方程式を (直接的に) 満たす十分滑らかな解を古典解という.
- 古典解だけで話が済むのであれば, 偏微分方程式の理論は簡単なのであるが, そのようにはならない.

- 偏微分方程式が物理現象を記述している場合，たとえば衝撃波が解として許容されなければならないのであるが，衝撃波は「十分滑らか」という条件を満たさない．

- したがって, 偏微分方程式の解を取り扱う際には, 古典解だけでは不十分であって, 条件を緩めた弱解と呼ばれる解を考えなければならないことがある.
- 弱解については後で述べる.

- 常微分方程式に関する講義で説明した通り, 常微分方程式の解が解析的な手段で構成できるのは, どちらかと言えば例外的な場合であって, 多くの場合には, 数値的な近似を用いなければ解が構成できない.

- とはいうものの, 線形定係数常微分方程式に限定すれば, 行列の指数関数を用いてその解を書き下すことができた.
- また, 線形でない場合にも, 解析的演算で構成できる常微分方程式のタイプが一定数存在し, そのようなものが練習問題や試験問題の材料になっている.

- 偏微分方程式では, 解析的な手段で解を構成できる問題は, 更に稀になる. このため, 偏微分方程式の分野では, 数値的な近似解法が重要になる.

- とはいっても, 解がどのようなものかに関するイメージが何もないままで講義を進めても十分な教育効果は見込めないので, 簡単な偏微分方程式の例について, その解を見てゆく.

- **例: 1 次元熱伝導方程式の解**
  - ▷ 空間の次元が 1 次元の熱伝導方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$$

    を考える.
  - ▷ x は空間に対応する変数で, $x \in [0,1]$ とする.
  - ▷ t は時間に対応する変数で, 非負とする.

- ▷ 熱伝導方程式は一般には熱伝導などに関連したパラメータを持つが, この講義ではパラメータがないもっとも簡単な場合を取り扱う.

▷ この偏微分方程式を解くにあたり, 時刻 0 での温度分布 $u(x,0)$ が次の形で与えられているものとする.

$$u(x,0) = \sin \pi x$$

- ▷ また, 境界条件を, 区間 $[0, 1]$ の両端で温度が零に固定されている, すなわち

$$u(0,t)=0, \quad u(1,t)=0$$

となっていると仮定する.

- ▷ 物理的には, この問題は, 長さ 1 の棒の両端が温度零に固定され, 時刻零における温度分布として $\sin \pi x$ が与えられているとき, 棒の温度の時間変化を見る, という問題になっている.

- ▷ この偏微分方程式は解析的に解け,

$$u(x,t) = e^{-\pi^2 t}\sin \pi x$$

  となる. これを確認する.

  - ◇ $u(x,0) = \sin \pi x$ であるから, 時刻 0 では条件は満たされている.
  - ◇ $u(0,t) = u(1,t) = 0$ だから, $x = 0$ および $x = 1$ では条件は満たされている.

◇ 偏微分により

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\pi^2 u(x,t),$$

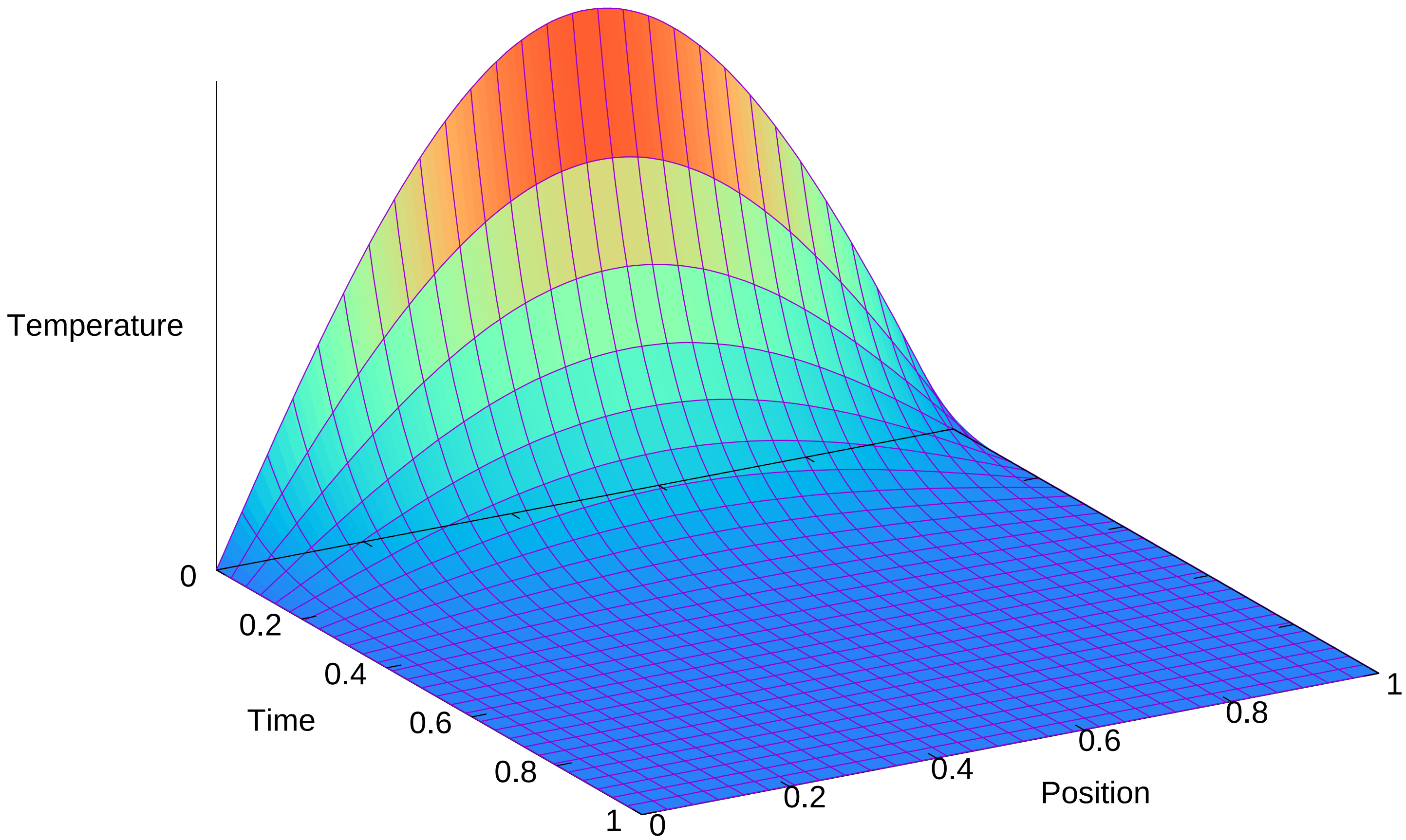
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\pi^2 u(x,t)$$

となるから，

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

となっている．

▷ 解のグラフを次ページに示す.


Temperature
0
0.2
0.4
Time
0.6
0.8
1
0
0.2
0.4
0.6
Position
0.8
1

- **例: 1 次元波動方程式の解**
  - ▷ 空間の次元が 1 次元の波動方程式

    $$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$$

    を考える.
  - ▷ x は空間に対応する変数で, $x \in [0,1]$ とする.
  - ▷ t は時間に対応する変数で, 非負とする.

- ▷ この偏微分方程式のイメージは, x 軸上の区間 $[0, 1]$ に弦が置かれ, 上下方向に振動しているというものである.
- ▷ 時刻 0 において, 弦の初期位置 $f(x)$ と, 弦の初期速度 $g(x)$ が与えられているものとする.

- ▷ $f(x)$ は 2 階微分可能, $g(x)$ は 1 階微分可能で, $f(x)$ および $g(x)$ はともに微分可能性を保ったまま周期関数に拡張可能であると仮定する.

▷ この微分方程式の解は,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(f(x-t) + f(x+t)\Big) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(\theta)d\theta$$

によって与えられる．これを確認する．

- $\diamond$ $u(x,0) = f(x)$ となることは, 代入によって直ちに確認できる.
- $\diamond$ f の 1 階および 2 階導関数を f' および f'', g の 1 階導関数を g' とする.

◇ $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$ を計算する.

$$\frac{\partial f(x-t)}{\partial t} = -f'(x-t),$$
$$\frac{\partial f(x+t)}{\partial t} = f'(x+t)$$

である.

よって,

$$\left.\frac{\partial f(x-t)}{\partial t}\right|_{t=0}+\left.\frac{\partial f(x+t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0$$

である.

一方,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{x-t}^{x+t} g(\theta)d\theta = g(x+t)+g(x-t)$$

だから,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(\theta)d\theta\right)\bigg|_{t=0} = g(x)$$

である.

◇ 以上によって, $u(x, t)$ は $t = 0$ において条件を満たす.

◇ 次に, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ および $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ を計算する.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}
&= \frac{1}{2}\biggl(f''(x+t) + f''(x-t)\biggr) \\
&\quad + \frac{1}{2}\biggl(g'(x+t) - g'(x-t)\biggr)
\end{aligned}
$$

である．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
&\quad = \frac{1}{2}\Bigl(f''(x+t) + f''(x-t)\Bigr) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\Bigl(g'(x+t) - g'(x-t)\Bigr)
\end{aligned}
$$

である.

したがって,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

である.

▷ 以上によって,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\biggl(f(x-t) + f(x+t)\biggr) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(\theta)d\theta$$

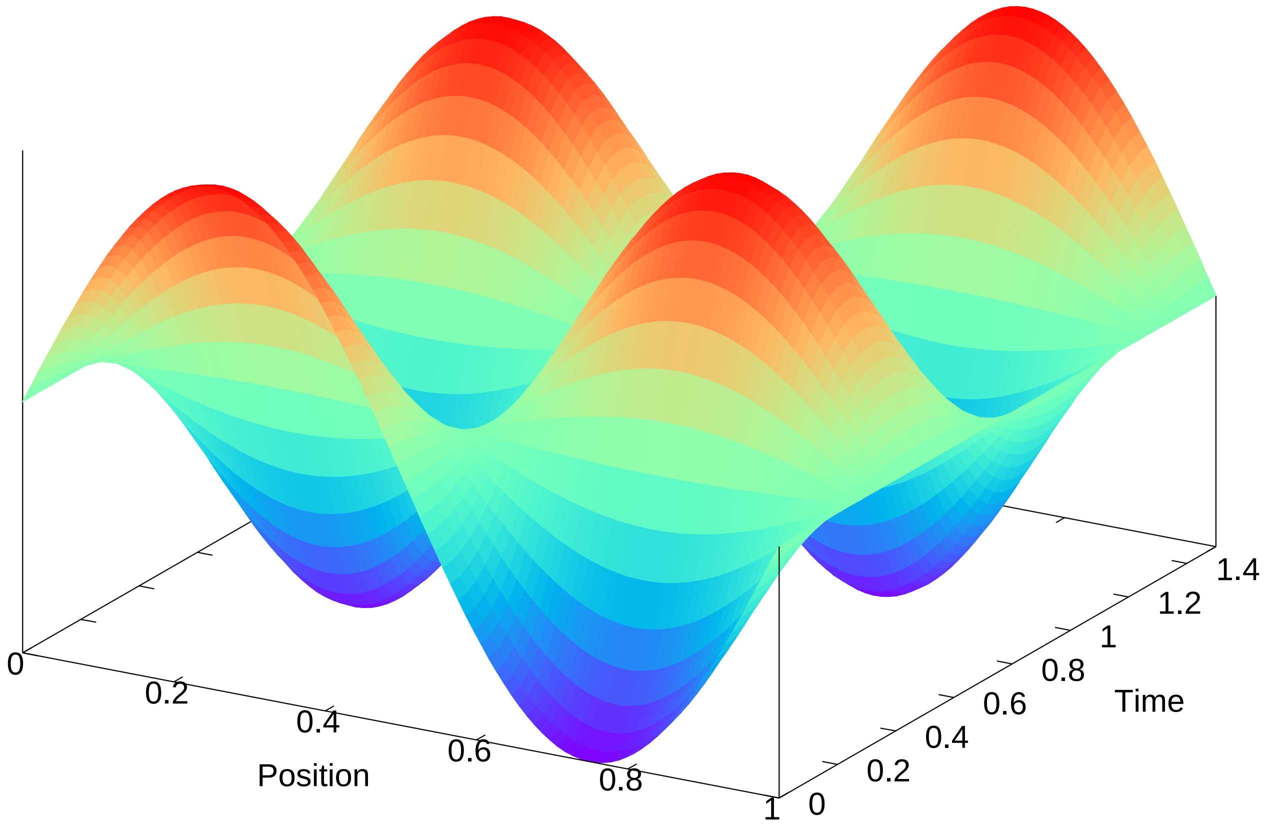
はこの波動方程式の解である.

▷ この解のことを, D'Alembert の解と呼ぶ. $f(x)$ と $g(x)$ は任意である.

▷ 例として,

$$f(x) = \sin(2\pi x),\ g(x) = 0$$

とした場合の解を次ページの図に示す. これは, 時刻 0 において, $\sin 2\pi x$ の形状で静止していた理想的な弦が固定から外されたときに振動する波形を示している.


0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
Position
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
Time

- 偏微分方程式を解くときにはフーリエ級数が多用されるが, この講義の目的は偏微分方程式を解析的に解くことではないので, 求解の技法については述べない.

初期値問題と境界値問題

- 今後は, 当分の間, 独立変数が 2 個の特別な場合から離れ, 独立変数が n 個ある一般の場合について議論する.
- 当面, 偏微分方程式の独立変数を

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$$

とする.

- 独立変数 $\boldsymbol{x}$ は集合

$$U \subset \mathbb{R}^n$$

の中を動くものとする. $U = \mathbb{R}^n$ である可能性は排除しない.

- 習慣的に, U を領域と呼ぶことがあるが, 複素関数論における慣習と異なり, 領域という言葉には厳密な意味はない.

- U の境界とは, U の閉包と U の補集合の閉包の共通部分のことである. これを ∂U と書く. 曖昧な言い方になるが, U および ∂U は, 数値計算で困ることがないような「素直な形状」になっていると仮定する.

- n 個の独立変数を取り扱う際,
  - ▷ どの独立変数も対等に取り扱う場合
  - ▷ その中の 1 個を「時間」と読んで特別扱いする場合

がある. どちらも応用上重要である.

- 偏微分方程式が物理現象に対応しており, 独立変数の中に, 物理的な意味で「時間」と解釈されるものが含まれる場合, その偏微分方程式は, 過去から現在そして未来へと移り変わる現象を記述していることが期待されており, 過去の解から現在の解を決定するという形の定式化が意味を持つ.

- このような場合には, 初期時刻において与えられた関数に対して偏微分方程式を解くという問題が重要になる．これを**初期値問題**あるいは**Cauchy 問題**という．また, 初期時刻で与えられた関数を**初期条件**と呼ぶ.

- 独立変数に時間に対応する変数が含まれていない場合には，そのうちの１個の「初期値」を特別扱いする理由はなくなる．

- 独立変数が動く範囲を有限の領域に限って偏微分方程式を解くことも多いが，その場合には，領域の境界で一定の条件を満たす解が必要になる．そのような解を求める問題を境界値問題という．また，境界で与えられた条件を境界条件という．

- 初期値問題と境界値問題が組み合わされた問題を**混合問題**という．

- 以下では, 偏微分方程式の独立変数が含まれ, これを特別扱いする場合には, 独立変数を

$$(\boldsymbol{x}, t)$$

と書くことがある.

偏微分方程式の分類

- $\boldsymbol{\alpha}$ を n 個の非負の整数の組とする．以下ではこれを多重指標と呼ぶ.
- 多重指標 $\boldsymbol{\alpha}$ に対し,

$$|\boldsymbol{\alpha}| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

と定義する.

- 多重指標 $\boldsymbol{\alpha}$ に対応する微分演算子 $D^{\boldsymbol{\alpha}}$ を,

$$D^{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

のように定義する.

- $D^{\boldsymbol{\alpha}}$ を u に作用させると,

$$D^{\boldsymbol{\alpha}} u = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

となる.

- $k \geq 0$ と u に対し, 次のように定義する:

$$D^k u = \left\{ D^{\boldsymbol{\alpha}} u : \boldsymbol{\alpha} \text{ は多重指標で } |\boldsymbol{\alpha}| = k \right\}$$

$D^k u$ は集合であることに注意する.

- 次ページ以降では, しばらく,
  - ▷ F (細字): 実数値関数,
  - ▷ $\boldsymbol{F}$ (太字): ベクトル値関数

とする. ベクトル値関数については, 値域の次元は指定しない. 関数がどのような変数を取るかが重要なので注意せよ (括弧内に示されている).

偏微分方程式の階数

- k 階の偏微分方程式とは,

$$F(D^k u(\boldsymbol{x}), D^{k-1} u(\boldsymbol{x}), \ldots, u(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) = 0$$

という関係式を言う.

- k 階の偏微分方程式系とは,

$$\boldsymbol{F}(D^k u(\boldsymbol{x}), D^{k-1} u(\boldsymbol{x}), \ldots, u(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$$

という一連の関係式を言う．ただし, $\mathbf{0}$ は零ベクトルである.

線形・半線形・準線形・非線形

- k 階の偏微分方程式が線形であるとは, 偏微分方程式が u に依存しない関数 $\{a_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x}) : |\boldsymbol{\alpha}| \leq k\}$ を使って次のように書き表せることをいう.

$$\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leq k} a_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x}) D^{\boldsymbol{\alpha}} u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$$

$f = 0$ のときには上記を斉次方程式という

- k 階の偏微分方程式が**半線形 (semilinear)** であるとは, 偏微分方程式が

$$\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=k} a_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x}) D^{\boldsymbol{\alpha}} u(\boldsymbol{x}) \\ \quad + a_0(D^{k-1} u(\boldsymbol{x}), \ldots, \boldsymbol{u}(x), \boldsymbol{x}) = 0$$

のように書き表せることをいう.

- k 階の偏微分方程式が準線形 (**quasilinear**) であるとは, 偏微分方程式が

$$
\begin{gathered}
\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=k} a_{\boldsymbol{\alpha}}(D^{k-1}u(\boldsymbol{x}), \ldots, u(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) D^{\boldsymbol{\alpha}} u(\boldsymbol{x}) \\
+a_0(D^{k-1}u(\boldsymbol{x}), \ldots, \boldsymbol{u}(x), \boldsymbol{x}) = 0
\end{gathered}
$$

のように書き表せることをいう.

- 非線形偏微分方程式はこれらを含む一般的な偏微分方程式であるが, 線形・半線形・準線形のいずれにも該当しない偏微分方程式を呼ぶときに非線形偏微分方程式という言葉を使うこともある.

2 階線形偏微分方程式の一般形

- 偏微分方程式には様々な階数のものがある．
- 2 変数 2 階線形定係数偏微分方程式は，楕円型，放物型，双曲型の 3 種類に分類される．
- 3 変数以上の場合は上記の分類は網羅的でないが，上記 3 種は応用上重要である．多変数の場合の一般形を以下に述べる ([Evans])．

§ 多変数 2 階線形楕円型偏微分方程式の一般形

- 多変数 2 階線形楕円型偏微分方程式の一般形は, 作用素 L(後述) に対し, 次のような形になる.

$$Lu = f \qquad (+\text{境界条件})$$

- 作用素 L は次ページのいずれかの式で定義される.

- **Nondivergent form:**

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\boldsymbol{x})u$$

- **Divergent form:**

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\boldsymbol{x}) u$$

- ただし, 前ページにおいて, $a_{ij}(\boldsymbol{x})$ は, 以下の 2 条件を満たす.

  ▷ $\forall i, j,\ \forall \boldsymbol{x},\ a_{ij}(\boldsymbol{x}) = a_{ji}(\boldsymbol{x})$

  ▷ $\exists c > 0,\ \forall \boldsymbol{x},$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x})\xi_i\xi_j \geq c\|\boldsymbol{\xi}\|^2$$

§ 多変数 2 階線形放物型偏微分方程式の一般形

- 多変数 2 階線形放物型偏微分方程式の一般形は, 作用素 L(後述) に対し, 次のような形になる.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f \qquad (+\text{初期条件, 境界条件})$$

- L は次ページのいずれかの式で定義される.

- **Nondivergent form**:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(\boldsymbol{x}, t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x}, t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\boldsymbol{x}, t)u$$

- **Divergent form:**

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x}, t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\boldsymbol{x}, t)u$$

- ただし, 前ページにおいて, $a_{ij}(\boldsymbol{x}, t)$ は, 以下の 2 条件を満たす.

  ▷ $\forall i, j,\ \forall \boldsymbol{x}, t,$

  $$a_{ij}(\boldsymbol{x}, t) = a_{ji}(\boldsymbol{x}, t)$$

  ▷ $\exists c > 0,\ \forall \boldsymbol{x},\ \forall t,$

  $$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}, t)\xi_i\xi_j \geq c\|\boldsymbol{\xi}\|^2$$

- 放物型では独立変数に時間 t が追加されている．これは, 物理的解釈 (熱伝導方程式の一般化) の関係である．

§ 多変数 2 階線形双曲型偏微分方程式の一般形

- 多変数 2 階線形双曲型偏微分方程式の一般形は, 次のような形になる.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Lu = f \qquad (+\text{初期条件, 境界条件})$$

- L と $a_{ij}(\boldsymbol{x}, t)$ の条件は双曲型と同じ.

- 双曲型でも独立変数に時間 t が追加されている． これは, 物理的解釈 (波動方程式の一般化) の関係である.

解の存在性と数値解法

- 常微分方程式と同様に, 偏微分方程式でも, 解が存在するか (存在性), 解が一意的に定まるか (一意性), 解がパラメータに対して連続に変化するか (安定性) が問題となる.
- 偏微分方程式の解の存在性に関し, Cauchy-Kowalevskaya の定理と呼ばれる定理を結果のみ紹介する ([熊ノ郷]).

- **定理 (Cauchy-Kowalevskaya).** 次の1階連立偏微分方程式の初期値問題を考える.

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{p=1}^{n} a_{jkp}(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial u_j}{\partial x_p} + b_{jk}(\boldsymbol{x},t)u_k\right)$$
$$+ c_j(\boldsymbol{x},t),$$
$$u_j(\boldsymbol{x},t_0) = \psi_j(\boldsymbol{x}), \qquad j = 1,\ldots,l.$$

$$(\bigstar)$$

- ただし, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ で, 上式の $a_{jkp}(\boldsymbol{x}, t)$ などは, その変数の実解析関数であるものとする.
- 以上の条件のもとで, 偏微分方程式系 (★) は局所的に実解析的な一意解を持つ. $\blacksquare$

- 「実解析的」という条件を外すと解の存在性は保証されない).

- たとえ線形であっても, 偏微分方程式はふつうは解析的には解けない. よって, 数値解法への依存性が高くなる.
- 偏微分方程式の数値解法は, 常微分方程式と比べて極端に難しいということはないし, ある程度汎用的に使える. ただし数値解が真の解に収束するか否かについては注意が必要.

弱解

- 偏微分方程式の微分可能とは限らない「拡張された解」を取り扱うために導入されたのが弱解である.
- 弱解は, 積分を用いて定義され, 応用上は有限要素法 (次回) とも関係がある. この講義では, 2 階線形楕円型, 放物型, 双曲型偏微分方程式に限り, 弱解の定義を述べる.

2 階線形楕円型偏微分方程式

- まず, 2 階線形楕円型偏微分方程式の弱形式と弱解について考える.

- 有界な領域 U(境界を ∂U とする) における 2 階線形楕円型偏微分方程式

$$Lu = f$$

が与えられ, ∂U において $u = 0$ という境界条件のもとでこれを解きたいものとする.

- L は nondivergent form で与えられているものとする:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\boldsymbol{x}) u.$$

- ∂U の外向き法線ベクトルを

$$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$$

とすると, Gauss-Green の公式によれば,

$$\int_U \frac{\partial u}{\partial x_i} d\boldsymbol{x} = \int_{\partial U} u \nu_i dS$$

である ([Evans]).

- 偏微分方程式

$$Lu = f$$

の両辺に関数 v を掛けて積分することにより, Gauss-Green の公式を適用することで, 微分の階数を 1 だけ減らすことを考える.

- 関数 v は **Sobolev 空間**と呼ばれる関数空間の要素なのであるが，この講義では深入りしない．

- Gauss-Green の公式と, ∂U において v が零という性質から, 次式が得られる.

$$\int_U \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) v + a_{ij}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) d\boldsymbol{x} = 0.$$

- $Lu = f$ の両辺に v を掛けてから 積分すると

$$\int_U (Lu) v d\boldsymbol{x} = \int_U f v d\boldsymbol{x}$$

となる.

- これに上式を代入すると, 次式が得られる.

$$
\begin{aligned}
\int_U \Bigg(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \\
+ \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} v + c(\boldsymbol{x}) uv \Bigg) d\boldsymbol{x} \\
= \int_U f v \, d\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

- v をどのように取っても u がこの方程式を満たすとき, u をこの問題の弱解という.

- 以下では,

$$(u, v) = \int_D uv d\boldsymbol{x}$$

によって u と v の内積を定義する.

- $B[u,v]$ を次のように定義する．

$$B[u,v] = \int_U \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} v + c(\boldsymbol{x}) uv \right) d\boldsymbol{x}$$

- 上記を使うと, 弱解の満たすべき方程式は

$$B[u, v] = (f, v)$$

と書ける. このような形式を**弱形式**という.

- ∂U で u が零でない場合には，弱形式の右辺にそれに対応する項が追加される．

2 階線形放物型偏微分方程式

- 次に, 2 階線形放物型偏微分方程式の弱形式と弱解について考える.

- 以下の境界条件および初期条件のもとで, 2 階線形放物型偏微分方程式を解きたい.
  - ▷ 境界条件: $\partial U \times [0, T]$ において
$$u(\boldsymbol{x}, t) = 0$$
  - ▷ 初期条件: $u(\boldsymbol{x}, 0) = g(\boldsymbol{x})$

- $B[u,v;t]$ を次のように定義する.

$$B[u,v;t]=\int_U\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{n}b_i(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial u}{\partial x_i}v+c(\boldsymbol{x},t)uv\right)d\boldsymbol{x}$$

- 偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f$$

の両辺に v を掛けてから積分し, 2 階線形楕円型偏微分方程式の場合と同様の計算をおこなうと, 次式が得られる. これを, 2 階線形放物型偏微分方程式の弱形式という.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + B[u, v; t] = (f, v)$$

- u が任意の v に対して先の方程式を満たし, かつ $u(\boldsymbol{x}, 0) = g(\boldsymbol{x})$ となるとき，これを，放物型の初期値/境界値問題に対する弱解という.

2 階線形双曲型偏微分方程式

- 続いて, 2 階線形双曲型偏微分方程式の弱解について考える.

- 以下の境界条件および初期条件のもとで2階線形双曲型偏微分方程式を解きたい.
  - ▷ 境界条件: $\partial U \times [0, T]$ において

$$u(\boldsymbol{x}, t) = 0$$

  - ▷ 初期条件:

$$u(\boldsymbol{x}, 0) = g(\boldsymbol{x}),\ \frac{\partial u}{\partial t}(\boldsymbol{x}, 0) = h(\boldsymbol{x})$$

- 楕円型と同様の手順で, 以下の方程式が導かれる.

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v\right) + B[u, v; t] = (f, v)$$

- u が任意の v に対して先の方程式を満たし, かつ $u(\boldsymbol{x}, 0) = g(\boldsymbol{x})$, $\frac{\partial u}{\partial t}(\boldsymbol{x}, 0) = h(\boldsymbol{x})$ となるとき, これを, 双曲型の初期値/境界値問題に対する弱解という.

弱解の存在と一意性

- 楕円型偏微分方程式は一定の条件のもとで弱解を持つ. ([Evans]).
- 放物型, 双曲型偏微分方程式はつねに弱解を持ち, それは一意的である ([Evans]).
- この講義では u や v が含まれる関数空間を明示していないので注意. どのような関数空間を用いるかは理論的には重要.

色々な偏微分方程式の数値解法

- 今回の講義では, 具体的な偏微分方程式の数値解法には立ち入らず (次回), その導入的な議論のみを述べる.

- 既に述べたように, 偏微分方程式が解析的に解けることは稀で, 多くの場合に数値的な近似解を構成する必要がある.

- 物理現象が微分方程式でモデリングされることから, 大規模な偏微分方程式を数値的に解くということは, 応用上重要である. 一方, 偏微分方程式の近似解の構成は, 特に大規模になると, コンピュータに極めて大きい負荷をかける. スーパーコンピュータは, このために発展してきたという側面がある.

- 偏微分方程式の数値解法には差分法, 有限要素法, 境界要素法, 有限体積法, メッシュレス法など, 様々なものがある ([Li and Chen]). これらには得手不得手もあるのであるが, どちらかと言うと, 分野によって使われる手法が異なるという側面もある (習慣的なもの).

- これらのうち, 差分法は, 偏微分方程式の素直な離散化であり, 流体力学の分野で広く用いられている ([河村]).

- 有限要素法は, 汎用性が高く, 偏微分方程式の数値解法の代表格である ([Li and Chen]). 歴史的には航空機の翼の強度解析に用いられたのが最初であり ([戸川]), 複雑な形状の問題に強いことから, 様々な分野で用いられるようになってきている.

- なお, 今回の講義で導入した弱形式は, 抽象的な議論のためだけのものではなく, 有限要素法で, この形式を直接利用する.

- 次回の講義では, 差分法と有限要素法について述べる予定である.