電 301 数値解析
第 8 回
関数近似 (2)

補間 (1)

- 補間とは, 関数 $f(x)$ が未知であるが, その n 個の点 $x_1, \ldots, x_n$ における値 $y_1, \ldots, y_n$ が知られているとき, $x_1, \ldots, x_n$ 以外の点における $f(x)$ の値を推測しようとすることをいう. 1 次元の補間問題において, $\min\{x_1, \ldots, x_n\} \leq x \leq \max\{x_1, \ldots, x_n\}$ となっているときに補間, そうでないときに補外と呼ぶ ([伊理]).

補間 (2)

- もっとも基礎的な補間は線形補間.
- これ以外に, 多項式による補間もよく用いられる.
- 多項式による関数の近似や補間を考えることに根拠を与えているのが, Weierstrass の多項式近似定理である.

補間 (3)

Weierstrass の多項式近似定理　関数 f が区間 $[a,b]$ において連続であれば, f に一様収束する多項式の列が存在する.

W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, 3/e, McGraw-Hill, 1976

「一様収束」とは, 一様ノルムの意味で収束という意味. また, 一様ノルムの定義は, $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$. 前回紹介した essential supremum と同じ記号は, 意味がほぼ同じだから. このあたりの議論には深入りしない.

この定理は次のような形で一般化される.

Stone-Weierstrass の定理　K をコンパクト集合とし, $\mathcal{A}$ を以下の性質を満たす K 上の複素関数の集合とする.

1 $f, g \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ なら $f + g \in \mathcal{A}$, $fg \in \mathcal{A}$, $\alpha f \in \mathcal{A}$

2 $x_1, x_2 \in K$, $x_1 \neq x_2$ なら $\exists f \in \mathcal{A}, f(x_1) \neq f(x_2)$

3 $\forall x \in K, \exists g \in \mathcal{A}, g(x) \neq 0.$

このとき, $\mathcal{A}$ の閉包は K 上の連続関数全体を含む.

W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, 3/e, McGraw-Hill, 1976

補間 (5)

- Fourier 解析の基礎を与えるのが, Stone - Weierstrass の定理である.
- 三角関数による近似 (Fourier 級数展開) は, 単位円上で定義された関数 (周期関数) の多項式による展開と解釈することができる. これを導いたのも Weierstrass である.

竹之内, フーリエ展開, 秀潤社, 1978.

線形作用素のノルム (1)

- 無限次元空間における線形写像のことを線形作用素と呼ぶことが多い.
- $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ をノルム空間, A を V から W への線形作用素とする. このとき, A の作用素ノルムは次のように定義される:

$$\|A\| = \sup_{x \in V, \|x\|_V \leq 1} \|Ax\|_W \qquad \text{(岩波数学辞典)}.$$

線形作用素のノルム (2)

- V, W におけるノルムの取り方には, 様々なものがあり得る. これらの取り方に応じて作用素ノルムは変わる.
- 作用素ノルムのことを誘導ノルム (induced norm) と呼ぶこともある

S. Skogestad and I. Postlethwaite, Multivarible feedback control, Wiley, 1996.

行列のノルム (1)

- m 行 n 列の行列は, $m \times n$ 次元のベクトルと解釈することもできるし, n 次元数空間から m 次元数空間への線形写像 (作用素) と解釈することもできる.
- したがって, 行列 A を m 行 n 列の行列としたとき, A のベクトルとしてのノルムと作用素としてのノルムが定義できる.

行列のノルム (1)

- A のベクトルとしてのノルムの定義は,
  $\|A\|_p = \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} |a_{kl}|^p\right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty)$
  $\|A\|_\infty = \left(\max_{k\in\{1,\ldots,m\},l\in\{1\ldots,n\}} |a_{kl}|\right)$
- A の作用素としてのノルムは
  $\|A\| = \sup_{x\in V,\|x\|_V\leq 1} \|Ax\|_W$

行列のノルム (3)

- $(V, \|\cdot\|_p)$, $(W, \|\cdot\|_p)$ に対し, V から W への線形作用素の作用素ノルムを l_p 誘導ノルムと呼ぶ

  S. Skogestad and I. Postlethwaite, Multivarible feedback control, Wiley, 1996.

- $(V, \|\cdot\|_p)$, $(W, \|\cdot\|_q)$ としたとき, V から W への線形作用素の作用素ノルムは $(p, q)-$ 誘導ノルムとでも呼ぶべきであろうが, このような用語は定着していない.

行列のノルム (4)

- Scilab の組み込み関数 `norm` は, 行列 `A` に対して以下のように振舞う.

`norm(A)`	l_2 誘導ノルムを返す
`norm(A,1)`	l_1 誘導ノルムを返す
`norm(A,'inf')`	l_∞ 誘導ノルムを返す
`norm(A,'fro')`	Forbenius ノルムを返す (ベクトルとしての l_2 ノルム)

行列のノルム (5)

- ややこしいことに, Scilab(および MATLAB) のオンラインマニュアルは, l_p 誘導ノルムのことを単に l_p ノルムあるいは p ノルムと呼んでいる. なお, `norm(A,'fro')` は `A` をベクトルと見たときの l_2 ノルムを返すが, これは Frobenius ノルムと呼ばれている.
- 行列のノルムについては D. S. Bernstein, Matrix Mathematics, 2/e, Princeton, 2009 を参照.

Lagrange 補間 (1)

- $(x_i, y_i)_{i\in\{1,=\ldots,n\}}$ を n 個の実数の対とし, これらのすべての点を通る $n-1$ 次の多項式を求める, という問題を考える. ただし, これらの実数の対には重複がなく, かつ x_1 から x_n までの中には値が同じものはないと仮定する. $(x_i, y_i)_{i\in\{1,=\ldots,n\}}$ がある関数に対応すると考えれば, このような仮定は妥当である.

Lagrange 補間 (2)

- $n-1$ 次の多項式には係数が(第 0 次の項から第 $n-1$ 次の項まで)n 個あるから, 多項式の係数を未知数と解釈すると, n 個の未知数に関する n 個の方程式を解くことになり, 解は(大抵の場合には) 存在する筈である.

Lagrange 補間 (3)

- ここで, 以下の多項式を考える.

$$p_i(x) = \frac{\prod_{j<i}(x - x_j)\prod_{j>i}(x - x_j)}{\prod_{j<i}(x_i - x_j)\prod_{j>i}(x_i - x_j)}$$

- $i = 1$ のときには $j < i$ となる j は存在しないが, この場合には $\prod_{j<i}(x - x_j) = 1$, $\prod_{j<i}(x_i - x_j) = 1$ と定義する. 同様に, $i = n$ のときには $j > i$ となる j は存在しないが, この場合には $\prod_{j>i}(x - x_j) = 1$, $\prod_{j>i}(x_i - x_j) = 1$ と定義する. これらは, 記法を簡潔にするための約束ごとである.

Lagrange 補間 (4)

- $p_i(x)$ の分子を見ると, $i \neq j$ であれば, $p_i(x_j) = 0$ となることがわかる.
- 一方, $x = x_i$ とすると, p_i の分母と分子が等しくなるから, $p_i(x_i) = 1$ であることがわかる.
- したがって, p_i は, $p_i(x_i) = 1$ で, $j \neq i$ なら $p_i(x_j) = 0$ となる, $n-1$ 次の多項式である.

Lagrange 補間 (5)

- $p_i(x)$ の性質を使い,

$$l(x) = y_1 p_1(x) + y_2 p_2(x) + \cdots + y_n p_n(x)$$

とすると, $l(x)$ は $(x_1, y_1,)$, $\ldots$, (x_n, y_n) を通る $n-1$ 次の多項式になっていることがわかる. これが Lagrange 補間多項式である.

Lagrange 補間 (6)

- Lagrange 補間多項式による補間のことを Lagrange 補間という.
- Lagrange 補間多項式の次数は与えられた標本点の数から決まる. n 個の標本点が与えられたときには, 次数は $n-1$ 次になる. そして, Lagrange 補間多項式 は与えられた標本点に対して一意的である.

Lagrange 補間 (7)

- 以下の議論では, 区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 f を Lagrange 補間によって近似するという問題を考える.
- L_k を, 区間 $[a, b]$ において k 個の標本点を定め, 関数 f から k 個の標本点における関数値を用いて Lagrange 補間多項式を定める作用素とする.

Lagrange 補間 (8)

- L_k は線形作用素であることが示せる.
- f から L_k によって作られる Lagrange 補間多項式を $L_k f$ と書く.
- 問題となるのは, 作用素の系列 $(L_k)_{k\mathbb{N}}$ が与えられたとき, $L_k f$ が k を大きく取れば f に近付くかどうか, ということである.

Lagrange 補間 (9)

以下しばらく杉原, 室田:数値計算法の数理, 岩波書店, 1994 にしたがっていくつか事実を紹介する.

- 関数の定義域を区間 $[a, b]$ とし, $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$ を, 区間 $[a, b]$ におけるある k 個の標本点の取り方に対応した Lagrange 補間の系列とすると, $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$ によって一様近似できない連続関数が存在する.
- 逆に, 連続関数 f を固定した場合には, 標本点の取り方をうまく定めることで, それを一様近似するような列 $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$ を作ることができる.

Lagrange 補間 (10)

- f を n 回以上連続微分可能な関数とする．L_n を n 個の標本点 $(x_1, \ldots, x_n)$ に対応した Lagrange 補間多項式を作る作用素とし，$W = \prod_{k=1}^{n}(x - x_k)$ とする．このとき，以下が成り立つ [杉原，室田]:

$$\|f - L_n f\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty \|W\|_\infty}{n!}$$

Lagrange 補間 (11)

- f が解析関数であっても, 標本点の取り方を等間隔としてしまうと, n をいくら大きく取っても $L_n f$ が f に近付かないことがある. これを Runge の現象という. 標本点の取り方を工夫すれば, この問題を改善することができる [杉原, 室田].

Newton 補間 (1)

- Lagrange 補間には, 数値計算の誤差に弱いという問題がある.
- 展開に $p_i(x) = \dfrac{\prod_{j<i}(x-x_j)\prod_{j>i}(x-x_j)}{\prod_{j<i}(x_i-x_j)\prod_{j>i}(x_i-x_j)}$ のかわりに $(x-x_1)$, $(x-x_1)(x-x_2)$, $\ldots$ を使うことにより, この問題は緩和される.

Newton 補間 (1)

- $f_n(x) = c_0 + c_1(x - x_1) + c_2(x - x_1)(x - x_2) + \cdots + c_{n-1}(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$ とおく.
- $f(x_1) = c_0$, $f(x_2) = c_0 + c_1(x_2 - x_1)$, $f(x_3) = c_0 + c_1(x_2 - x_1) + c_3(x_3 - x_1)(x_3 - x{+}2)$, $\ldots$, $f(x_n) = c_0 + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \prod_{j=1}^{i}(x_n - x_j)$ である.

Newton 補間 (3)

- したがって, $f(x_i) = y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ を満たす $c_0, c_1, \ldots, c_n$ が一意的に定まる. この係数を用いた補間を Newton 補間という.
- Newton 補間と Lagrange 補間の計算のしかたは異なるが, 標本点を固定したとき, Newton 補間と Lagrange 補間によって得られる多項式は同一である.

Hermite 補間 (1)

- Lagrange 補間 (および Newton 補間) で得られた多項式は, 標本点の取り方によっては, 標本点間における関数値の脈動が激しい多項式となる. しかし, n 個の標本点を通る $n-1$ 次の多項式は一意的に定まるため, 多項式の次数をこのままにした場合には, これを改善する余地はない.

Hermite 補間 (2)

- Lagrange 多項式より高い次数の多項式を用いることで, この「脈動」を抑えることを考える.
- 具体的には, 標本点において, 関数 f と関数値およびその 1 階の導関数の値を一致させることを考える.

Hermite 補間 (2)

- 区間 $[a, b]$ において少なくとも 1 階微分可能な関数 $f(x)$ を多項式によって近似したい. n 個の相異なる点 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ において, $f(x)$ の値 $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ と, その導関数 $f'(x)$ の値 $f'(x_1), \ldots, f'(x_n)$ が与えられているものとする.

Hermite 補間 (3)

- $2n$ 個の方程式を解くということは, 未知数が $2n$ 個必要である. すなわち, $2n-1$ 次の多項式 (係数は零次の項も含めて $2n$ 個) を使えば, 目的は達成される筈である.

- 以下, 斎藤, 数値解析入門, 東京大学出版会, 2012 に基づいて Hermite 多項式の求め方を説明する. [杉原, 室田] には Vandermonde 行列を用いた導出法が記載さている.

Hermite 補間 (4)

- Lagrange 補間で用いた
  $p_i(x) = \dfrac{\prod_{j<i}(x-x_j)\prod_{j>i}(x-x_j)}{\prod_{j<i}(x_i-x_j)\prod_{j>i}(x_i-x_j)} \ (i = 1, \ldots, n)$
  を再び用いる.

- $h_i(x) = (p_i(x))^2 (1 - 2p_i'(x_i)(x - x_i))$,
  $k_i(x) = (p_i(x))^2 (x - x_i)$ とする $(i = 1, \ldots, n)$.

Hermite 補間 (5)

- 見にくいが, $(1 - 2p_i'(x_i)(x - x_i))$ において, $(x - x_i)$ の係数 $2p_i'(x_i)$ は p' の点 x_i における値であり, 定数である. よって, $h_i(x)$ は $2n-1$ 次の多項式である.
- 定義から, $k_i(x)$ も $2n - 1$ 次の多項式である.

Hermite 補間 (6)

- 代入して計算すると次の事実が確認できる.

$$h_i(x_j) = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases}, \quad h_i'(x_j) = 0,$$

$$k_i(x_j) = 0, \quad k_i'(x_j) = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases}$$

Hermite 補間 (7)

- したがって, 以下のようにすると $\{x_1, \ldots, x_n\}$ において f およびその導関数と値が一致する $2n-1$ 次多項式が得られる. これが Hermite 補間多項式である.

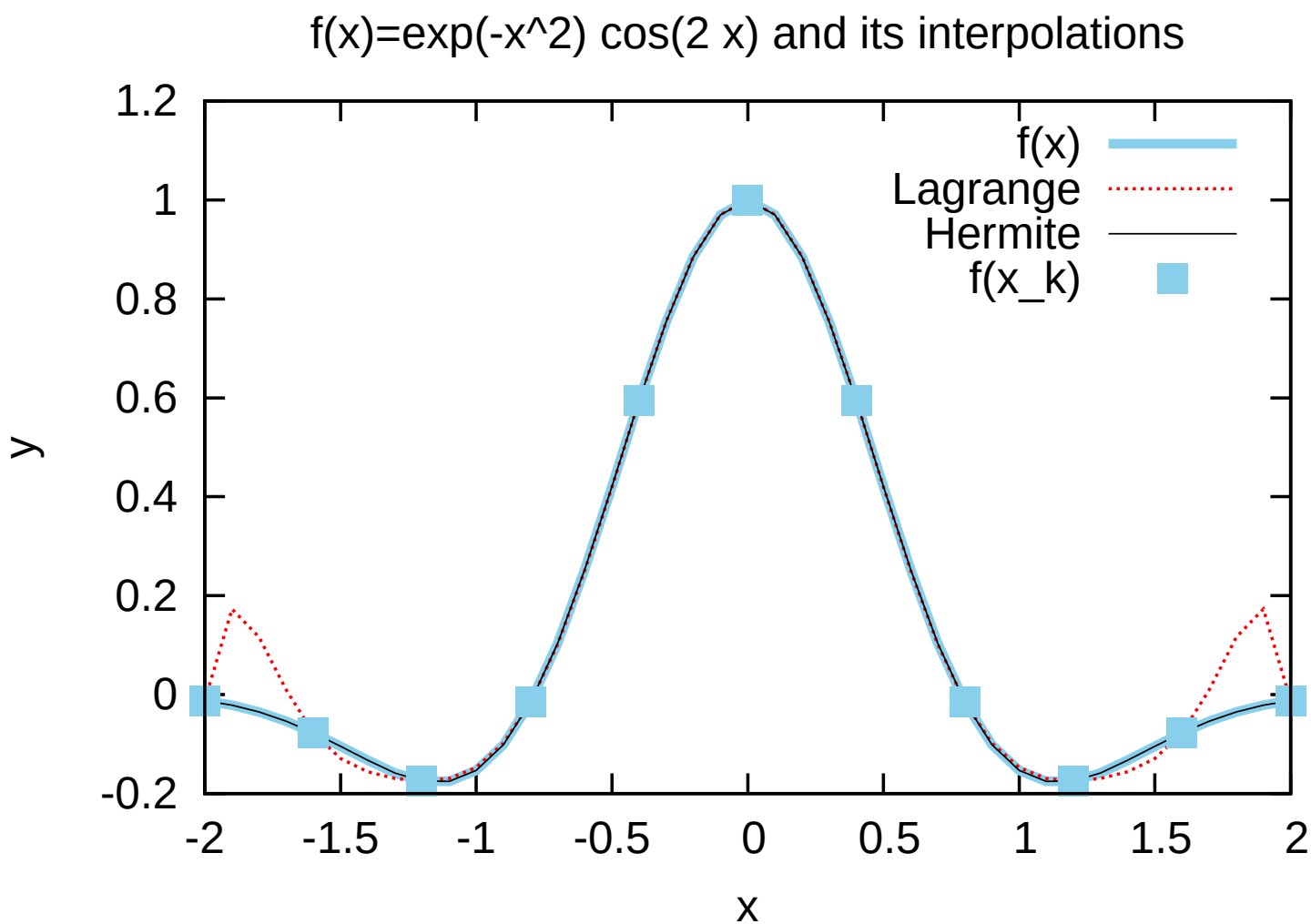
$$q_{2n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) h_i(x) + \sum_{i=1}^{n} f'(x_i) k_i(x)$$

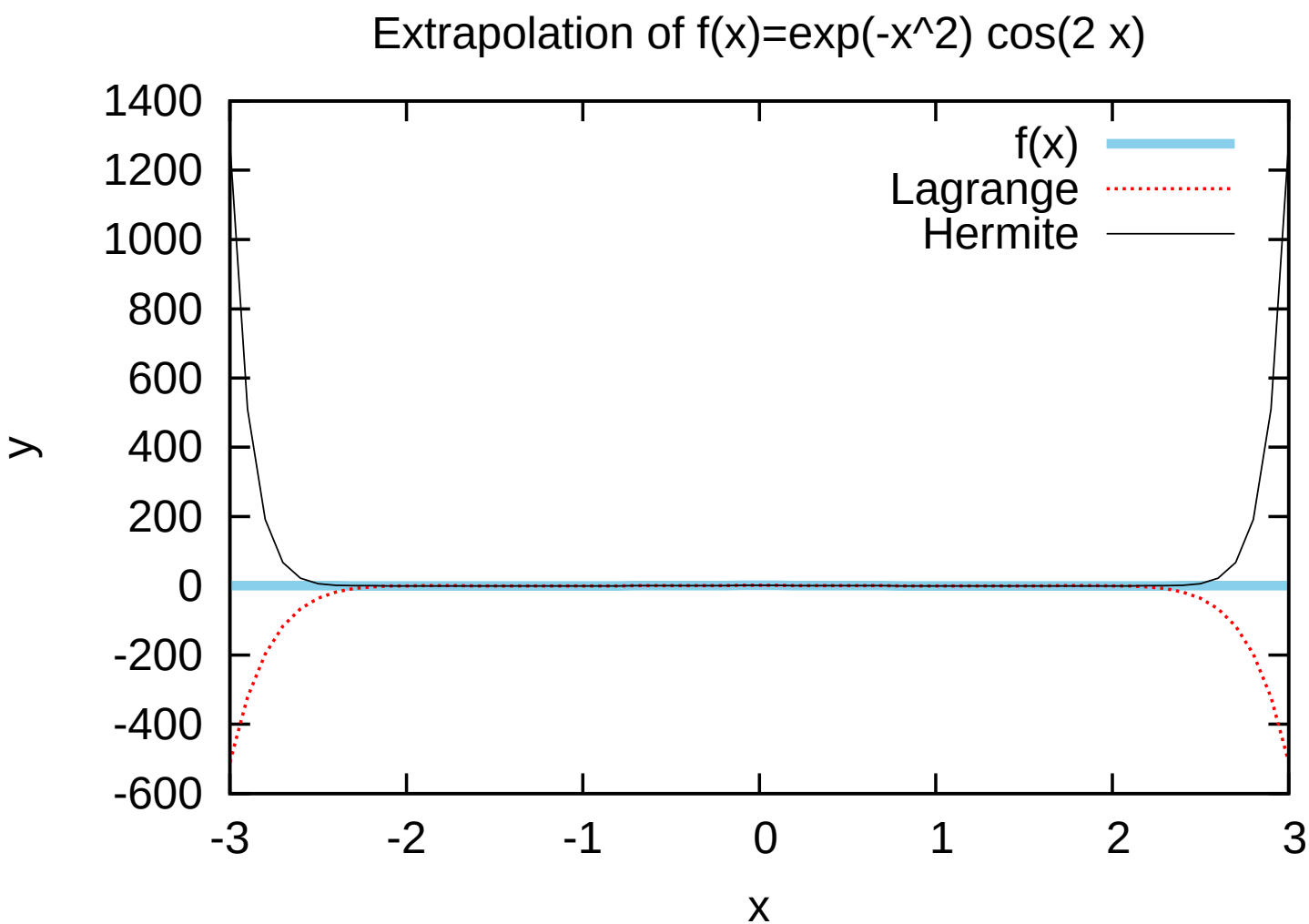
Hermite 補間 (8)

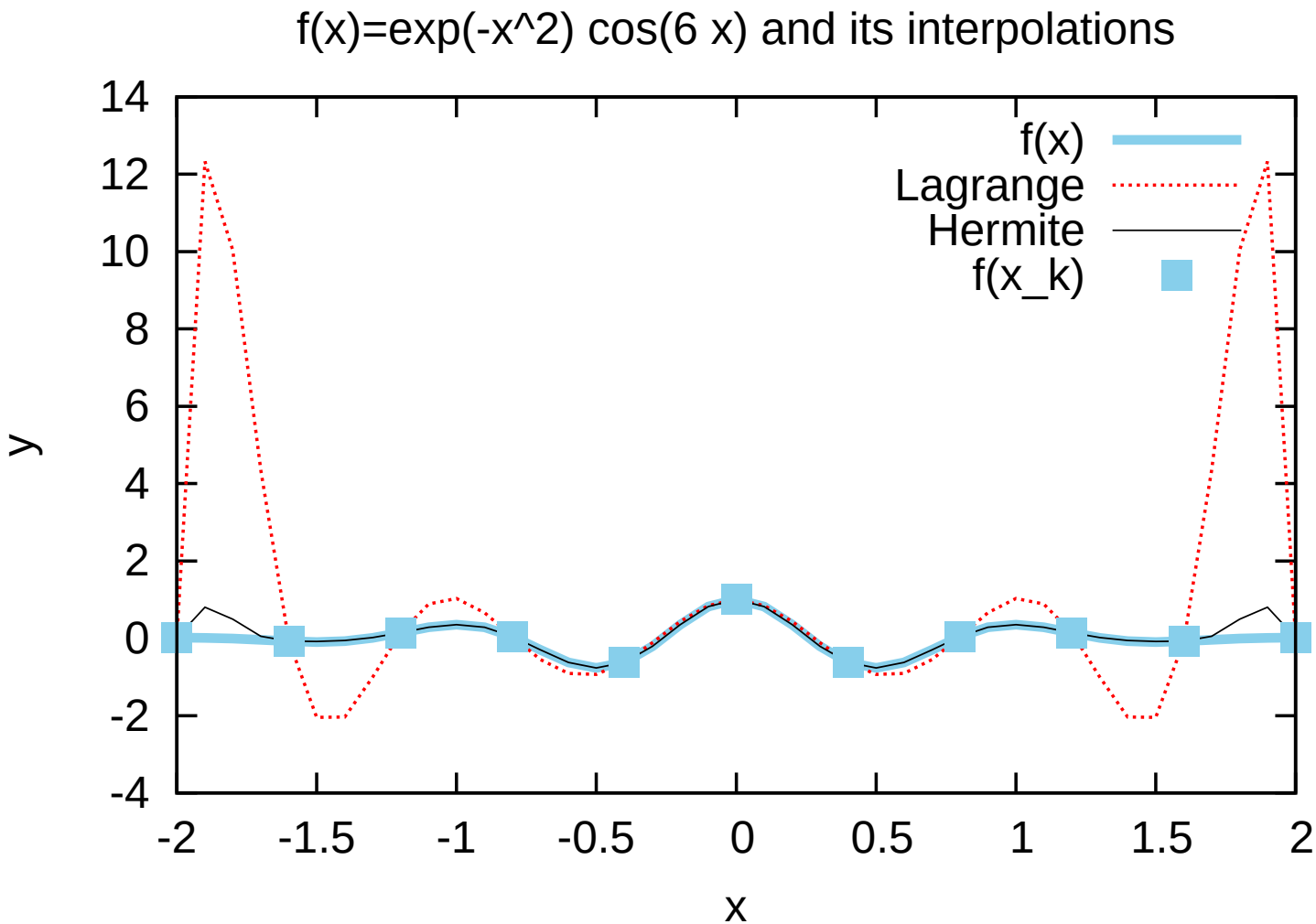
- Hermitte 補間多項式を求めることを Hermite 補間という ([杉原, 室田]).
- Hermite 補間多項式の近似誤差は, Lagrange 補間多項式と同様の方法により評価できるが, 詳細は略す ([斎藤], [杉原, 室田]).

多項式補間の数値例 (1)

- $e^{-x^2}\cos 2x$ および $e^{-x^2}\cos 6x$ を区間 $[-2, 2]$ において Lagrange 補間および Hermite 補間した例を次ページに示す.
- 標本点は 11 点で, 等間隔とした.
- $e^{-x^2}\cos 2x$ については, 区間 $[-2, 2]$ の外部で関数と補間多項式を比較した.


f(x)=exp(-x^2) cos(2 x) and its interpolations
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
y
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
x
f(x)
Lagrange
Hermite
f(x_k)


Extrapolation of f(x)=exp(-x^2) cos(2 x)
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
-200
-400
-600
y
-3
-2
-1
0
1
2
3
x
f(x)
Lagrange
Hermite


f(x)=exp(-x^2) cos(6 x) and its interpolations
f(x)
Lagrange
Hermite
f(x_k)
y
x
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

多項式補間の数値例 (5)

- 標本点では関数とその補間多項式の値は一致する.
- Lagrange 補間の, 区間の境界の近くで関数値からの乖離が発生するという欠点は Hermite 補間では緩和されている.
- Lagrange 補間, Hermite 補間とも, 補外に関する性能は悪い.

多項式補間の数値例 (6)

- 関数の脈動と比較して標本点が少ない場合には, 関数とその補間多項式の値との標本点以外の点における値の乖離が大きくなる.
- とはいえ, 数値計算の誤差の問題があるため, 標本点を無闇に多くするわけにはいかない (特に Hermite 補間多項式).
- 標本点以外の点における近似精度については, 線形補間の方が良いこともある.

スプライン補間 (1)

- Lagrange 補間と Hermite 補間には, 多項式の次数が高いという問題と, 標本点以外で関数値と補間多項式の値に大きな乖離が発生することがあるという問題があった.
- 線形補間にはこのような問題はないが, 一方で微分可能でないという問題がある.
- 線形補間の良さを踏襲しつつ補間関数を微分可能にしようというのがスプライン補間の考え方.

スプライン補間 (3)

- 線形補間では, 区間 $[x_{k-1}, x_k]$ における補間直線と区間 $[x_k, x_{k+1}]$ は別物であった.
- スプライン補間では, 区間 $[x_{k-1}, x_k]$ と区間 $[x_k, x_{k+1}]$ とで, 相異なる多項式を用いて補間をおこなう.
- 以下の議論の典拠は [杉原, 室田], [斎藤].

スプライン補間 (4)

- n 個の標本点 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ があれば (Lagrange 補間と異なり, 大小順に並べられている必要がある), 各区間で 1 個, 全体で $n-1$ 個の補間多項式が作られる.

スプライン補間 (5)

- 有限個の点 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ が与えられ, 区間 $[x_k, x_{k+1}]$ $(1 \leq k \leq n-1)$ において f が m 次の多項式となるとき, f は区分的 m 次多項式という.
- $(m-1)$ 階までの導関数が全領域で連続となる区分的 m 次多項式を, m 次スプラインという.

スプライン補間 (6)

- n 個の標本 $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$ が与えられているとき, x_k における値が y_k となるような m 次スプラインによる補間を m 次スプライン補間という.
- 応用上は, 3 次のスプラインがよく用いられる.

スプライン補間 (7)

- $S(x)$ を, これから構成しようとしている 3 次の区分的 3 次多項式とする.
- スプライン補間は補間であるから, $S(x_1) = y_1, \ldots, S(x_n) = y_n$ でなければならない.
- 開区間 (x_k, x_{k+1}) $(1 \leq k \leq n-1)$ では $S(x)$ は多項式だから, $S'(x)$ は連続である.

スプライン補間 (8)

- よって, 区間の端点における $S(x)$ の右微分と左部分が一致すれば, $S(x)$ によってスプライン補間が達成される. このようにするためには, $S'(x_k) = d_k$ とし, d_k を未知数とする方程式を解けばよい (具体的な形は後述).

スプライン補間 (9)

- 区間 $[x_k, x_{k+1}]$ においてスプライン補間の「部品」を 構成するには, 2 個の 標本点 $\{(x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1}\}$ に関する Hermite 補間多項式 を用いる. $n = 2$ のとき Hermite 補間多項式の次数は $2n - 1 = 3$ だから, 次数は合っている.

スプライン補間 (10)

- どの区間について計算しても同じことなので, $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$ が与えられているものとし, 区間 $[x_1, x_2]$ における Hermite 補間を考える.
- 2 点に関する Lagrange 補間は $n - 2 = 1$ だから線形補間であり, $p_1(x) = (x - x_2)/(x_1 - x_2)$, $p_1(x) = (x - x_1)/(x_2 - x_1)$ とすると, $l(x) = y_1 p_1(x) + y_2 p_2(x)$ である.

スプライン補間 (11)

- $\delta = x_2 - x_1$ とおき h_1, h_2, k_1, k_2 を求めると, $h_1(x) = \frac{1}{\delta^3}(x - x_2)^2(\delta + 2(x - x_1))$, $h_2(x) = \frac{1}{\delta^3}(x-x_1)^2(\delta-2(x-x_2))$, $k_1(x) = \frac{1}{\delta^2}(x-x_1)(x-x_2)^2$, $k_2(x) = \frac{1}{\delta^2}(x - x_1)^2(x - x_2)$ となる.
- y_1, y_2, d_1, d_2 を用いて Hermite 補間多項式を求めると, $y_1h_1(x)+y_2h_2(x)+d_1k_1(x)+d_2k_2(x)$ となる. その x_1 における右微分は d_1, x_2 における左微分は d_2 である.

スプライン補間 (12)

- 区間 $[x_2, x_3]$ 以降でも同様に操作をおこなう．区間 $[x_2, x_3]$ の左端 x_2 における補間多項式の右微分は d_2 で，$[x_1, x_2]$ の右端 x_2 における補間多項式の左微分と一致するから，1 階の導関数は連続である．$d_1, d_2, \ldots, d_n$ はまだ決まっていない．
- $m = 3$ だから，2 階の導関数も全領域で連続でなければならない．ここから d_k を定める．

スプライン補間 (13)

- この補間多項式の x_1 における右 2 階微分と x_2 における左 2 階微分はそれぞれ $6\frac{(y_2-y_1)}{\delta^2}-4\frac{d_1}{\delta}-2\frac{d_2}{\delta}$, $-6\frac{y_2-y_1}{\delta^2}+2\frac{d_1}{\delta}+4\frac{d_2}{\delta}$.
- $\delta_1 = x_2 - x_1$, $\delta_2 = x_3 - x_2$ とおき, $[x_2, x_3]$ において同様の計算をした後に, x_2 における左右からの 2 階導関数の値を等号で結んで整理すると,

$$\frac{d_1}{\delta_1}+2\left(\frac{1}{\delta_1}+\frac{1}{\delta_2}\right)d_2+\frac{d_3}{\delta_2}=3\left(\frac{y_2-y_1}{\delta_1^2}+\frac{y_3-y_2}{\delta_2^2}\right)$$

スプライン補間 (14)

- $\delta_k = x_{k+1} - x_k$ $(1 \leq k \leq n-1)$ とおいて全区間について同様の計算をおこない, $\gamma_k = 1/\delta_{k-1} + 1/\delta_{k+1}$ $(2 \leq k \leq n-1)$, $\mu_k = 1/\delta_k$ $(1 \leq k \leq n)$, $\nu_k = (y_k - y_{k-1})/\delta_{k-1}^2 + (y_{k+1} - y_k)/\delta_k^2$ $(2 \leq k \leq n-1)$ ととすると, これらの式を次ページように連立 1 次方程式として纏めることができる.

スプライン補間 (15)

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \gamma_2 & \mu_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \mu_{n-1} & \gamma_{n-1} & \mu_{n-1} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_2 \\ \vdots \\ \nu_{n-1} \end{pmatrix}$$

- この連立 1 次方程式は, n 個の変数に対して方程式が $n-2$ 個なので, 解は一意ではない.
- 解を一意にするために, 上記に式を 2 個追加して解を求めることが普通である.

スプライン補間 (16)

- 補間したい関数 f が既知で微分可能のとき, $f'(x_1) = S'(x_1+0)$ $f'(x_n) = S'(x_n-0)$ とする方法がある.
- これ以外に, $S''(x_1+0) = S''(x_n-0) = 0$ とする方法もある (教科書にはこちらだけが書かれている).
- 上記において, $+0$ は右極限, -0 は左極限をあらわす.

Scilab におけるスプライン補間 (1)

- Scilab でスプライン補間をおこなう関数は色々.
- 関数 `interp` は, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ における関数値 $y = (y_1, \ldots, y_n)$ とその導関数値 $dy = (y'_1, \ldots, y'_n)$ および補間関数値を計算したい点のデータ $z = (z_1, \ldots, z_m)$ を受け取り, z におけるスプライン補間関数値を返す.
- 次ページに例を示す.

Scilab におけるスプライン補間 (2)

$x = (0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi)$ において $\sin x$ の値を使ってスプライン補間をおこない, 0 から 0 から 3 まで 0.1 刻みで関数値を評価する:

```
x=[0 %pi/4 %pi/2 3*%pi/4 %pi];
y=sin(x);
dy=cos(x);
z=0:0.1:3;
val=interp(z,x,y,dy);
```

Scilab におけるスプライン補間 (3)

関数 `smooth` も標本点からスプライン補間をおこない, 補間点における関数値を返すが, x と y のペアを 2 行 n 列の行列にして与える点と, 上記の z ではなく「0.1 刻みで関数値を計算」などのように刻みを与える点, 返却値は 2 行 m 列の行列で, 第 1 列に x 軸上で取られた点の値, 第 2 列に補間関数値が入る点が異なる.

たとえば, 先ほどと同じ x, y について, x 軸上で 0.9 刻みで補間関数値を計算したいときには次のようにする.

Scilab におけるスプライン補間 (4)

```
x=[0 %pi/4 %pi/2 3*%pi/4 %pi];
y=sin(x);
val=smooth([x;y],0.9);
```

val の内容は以下のようになる (端点も含まれる):

```
val  =
 0. 0.9       1.8       2.7       3.1415927
 0. 0.7817805 0.9724687 0.4333687 1.225D-16
```

Scilab におけるスプライン補間 (5)

- 関数 `splin` は, 与えられた標本点からスプライン関数を生成し, その標本点におけるスプライン関数の導関数を返す.
- Scilab のオンラインマニュアルの Interpolation の項を見ると, これ以外にもスプライン補間に対応する関数があるのがわかるが, この講義ではこれ以上述べない.