電気 303 / 電情 303　数値解析 (7)

関数近似 (1)
関数空間

関数近似とは何か

- 関数近似 (関数の近似) という言葉は, いくつかの教科書で, 未定義で用いられている.
- この講義では, 仮に, 関数を, 性質が既知の関数 (系) を使って (近似的に) 表現することと定義しておく.

- 実用上は, もう少し意味を狭めて, 関数を, 性質が既知の関数 (系) の線形結合によって (近似的に) 表現することとした方が使いやすい. 今後は, この講義では, 線形結合に限定して議論を進める.
- 表現が厳密であることも, 誤差を含む近似表現であることもあり得る.

- $f(x)$ が周期 2π の周期関数であるとき,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

という表現を $f(x)$ の Fourier 級数展開という (岩波数学入門辞典).

ただし, x は実数, $f(x)$ は実数値関数で,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

である．Fourier 級数展開の定義には色々なバリエーションがあるので注意.

- Fourier 級数は関数近似の一種.
- 関数が Fourier 展開できる (Fourier 級数が収束する) ための十分条件としては, たとえば $f(x)$ が区分的に連続, というものがある (詳細は略す).

- Fourier 級数展開で三角関数を使って他の関数を表現するのは, 三角関数が周期現象の表現や線形回路網の解析に適しているから．とはいえ, 絶対に三角関数を使わねばならないというわけではない.

- 三角関数以外で，もっとも一般的なのは，多項式を使った展開である．関数の Taylor 展開は多項式による展開である．
- 関数 $f(x)$ の Taylor 展開が無限個の係数が零でない項を持つとき，それを最初の N 項で打ち切ったものは，関数近似になる．

- 関数を近似するときには, 単に既知の関数系で展開するよりは, 直交関数系と呼ばれる関数系で展開した方が便利.
- 三角関数は直交関数系.
- 多項式系から直交化関数系を作って用いることも多い.

- 応用で使われる直交多項式には, Legendre 多項式, Chebychev 多項式, Jacobi 多項式, Laguerre 多項式, Hermite 多項式といったものがある.
- この講義では, これらの一部を取り上げる.

直交性

- 先の議論で「直交」という言葉が出て来た.
- 直交性を導入することの利点を, 内積が通常の形で定義されている2次元数ベクトル空間を例に取って説明する.
- $\boldsymbol{a}_1 = (a_{11}, a_{21})^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (a_{12}, a_{22})^T$ を線形独立なベクトル, $\boldsymbol{b}$ を2次の数ベクトルとする.

- $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の線形結合で書き表すには,

$$\boldsymbol{a}_1 x_1 + \boldsymbol{a}_2 x_2 = \boldsymbol{b}$$

  という方程式を解かねばならない.

- $\boldsymbol{a}_1$ の成分と $\boldsymbol{a}_2$ の成分を横にならべて行列 $\boldsymbol{A}$ を作ると, 上記は連立一次方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解くことに相当する.

- 一方, $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ が正規直交基底になっているときには, 内積 $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b})$ $(i = 1, 2)$ を計算することにより,

$$\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1 + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{a}_2$$

となり, 計算はずっと簡単 (連立一次方程式を解く必要がない).

- 内積が定義されている n 次のベクトル空間に一般化すると…
- ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ がこの空間の (正規) 直交基底となっていれば, ベクトル $\boldsymbol{x}$ のベクトル $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$(ただし $k \leq n$) が張る部分空間への直交射影は, ベクトル $\boldsymbol{x}$ のその部分空間における最良近似になっていることが示せる.

- 一般のベクトル空間でも, その空間に適切な内積を導入すれば, 直交性を用いた議論ができる.
- この空間における正規直交基底の利点は n 次のベクトル空間のそれと同一.

- 以上では, 内積が所与とした上で直交性について議論したが, 数学的には, 内積とはそもそも何かということから議論する必要がある.
- 内積の定義については後で述べる.

関数空間

- 線形代数は, 有限次元ベクトル空間における線形写像の理論であった.
- ベクトル空間と線形写像の理論を無限次元空間に拡張しようとする試みは 20 世紀初頭に始まった.

- その出発点は, ベクトル空間を公理によって定義することである.

- ベクトル空間の公理を述べる．ただし, $\mathbb{K}$ を体とする．実用上は $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (実数体) あるいは $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合が重要なのではあるが, 定義の上では, $\mathbb{K}$ は体 (すなわち体の公理を満たすもの) であれば何でもよい.
- 体の定義には深入りしないが, 簡単に言うと加減乗除ができる数学的対象のことである.

- **ベクトル空間の公理:** 集合 $\boldsymbol{V}$ と 体 $\mathbb{K}$ が与えられ,

$$\text{可算 } + : \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \mapsto \boldsymbol{V}$$

$$\text{スカラー倍 } \cdot : \mathbb{K} \times \boldsymbol{V} \mapsto \boldsymbol{V}$$

が定義されているものとする.

1 を $\mathbb{K}$ における乗法に関する単位元とする. V には零元と呼ばれる特別な元が定義されているものとし, これを 0 と書く.

V がベクトル空間であるとは, 以下の条件がすべて成り立つことをいう.

1. $\forall x, y \in V$, $x + y = y + x$ (可算は可換)
2. $\forall x, y, z \in V$, $(x + y) + z = x + (y + z)$ (可算は結合的)
3. $\forall x \in V$, $x + 0 = x$ (V の零元との可算で x は不変)
4. $\forall x \in V$, $\exists w \in V$, $x + w = 0$ (加法に係る逆元の存在)

5. $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V, (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (スカラー倍に関する分配則 1)

6. $\forall \alpha \in K, \forall x, y \in V, \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (スカラー倍に関する分配則 2)

7. $\forall x \in V,\ 1x = x$ (体 $\mathbb{K}$ の乗法に係る単位元によるスカラー倍で x は不変) $\blacksquare$

- $x + w = 0$ となる元のことを, 通常は $-x$ と書く. $-x = (-1)x$ となることが証明できるが, 厳密に言うと, これは証明すべきことで, 自明な結果ではない.

- 続いて, ノルムや位相に関した議論をするのだが, 具体的な内容に先立って, 動機付けについて述べる.

- たとえば「勝手に取られた関数をなるべくうまく連続関数で近似したい」といった問題を取り扱うときには, 最適解を探す空間 (この例には連続関数の全体) がどのような構造を持っているかが問題となる.
- 以下しばらく, 便宜上, 関数の定義域を $\mathbb{R}$ とする.

- $\mathbb{R}$ で定義された実数値関数の全体を V とする．$f, g \in V$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し，$f+g$ および αf を次のように定義する：

$$
\begin{aligned}
f+g: &\qquad \mathbb{R} \ni x \mapsto f(x)+g(x) \in \mathbb{R} \\
\alpha f: &\qquad \mathbb{R} \ni x \mapsto \alpha f(x) \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

- 前ページの記法には不慣れな者が多いと思うが,
  - ▷ $f+g$ は各点 x において $f(x)+g(x)$ という値を取る関数
  - ▷ αf は各点 x において $\alpha f(x)$ という値を取る関数

と定義する, という意味である.

- $\mathbb{R}$ で定義された実数値関数の全体 V は，以上にようによって定義された加算およびスカラー倍の演算によって，ベクトル空間となる (ベクトル空間の公理を満たす) ことが確認できる．

- 証明は易しい．興味がある者は，先に述べたベクトル空間の公理をチェックせよ．ただし，この場合，零元は，恒等的に値が零となる関数である．

- 関数全体がつくるベクトル空間を関数空間という (岩波数学入門辞典).
- 以下の講義では, 関数を関数空間というベクトル空間の要素として取り扱う.
- ただし, ベクトルを太字にすることはない (これが関数解析における慣例).

- 連続関数を操作して, もとの関数を近似するのだから, 少なくとも連続関数の加算とスカラー倍の演算は連続関数全体の集合の中で実行できる必要がある.
- 換言すると, 連続関数の全体がベクトル空間になっていないと困る.

- 幸い, 連続関数の全体はベクトル空間をなすことが証明できる.
- この事実の証明については微分積分学の教科書を参照せよ.

- 上述の事実は, 連続関数全体は関数全体が作るベクトル空間の部分ベクトル空間であると言い換えられる.

- ところで，近似について論ずるのであれば，「関数 f と関数 g がどの程度違うか」を定められなければならない．

- ベクトル空間 V にノルムと呼ばれる量 (記号 $\|\cdot\|$ であらわす) が定まっているときには, $\|f-g\|$ によって「f と g の違い」を測ることができる.
- ノルムとは, 抽象的には, 次の公理を満たすものとして定義される (定義を満たすものであれば, 何でもよい).

- **ノルムの公理:**　ベクトル V で定義された実数値関数 $\|\cdot\|$ が以下の条件を満たすとき，これを V のノルムと呼ぶ.

  1. $\|0\| = 0$,
  2. $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall f \in V, \|\alpha f\| = |a|\|f\|$,
  3. $\forall f, g \in V, \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$. ■

- ベクトル空間 V にノルム $\|\cdot\|$ が定義されているとき, $(V, \|\cdot\|)$ を**ノルム空間**, **ノルム付きベクトル空間**, **ノルム付き線形空間**などと呼ぶ.
- ノルムの部分を略して, V 自体をノルム空間と呼ぶことも多い.

- 「関数列 $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ を f に収束させるようなアルゴリズムを作りたい」といった問題を考えるときには，「収束」「極限」といった概念を明確にしておく必要がある．このためには，「近いか遠いか」を決める何らかの基準が定まっていればよい．このための数学的構造を位相と呼ぶ．

- 位相を定めるもっとも一般的な方法は, 開集合系を公理的に導入する方法である. これについて紹介する.

- **位相の公理:** 集合 X の部分集合を集めた集合 $\mathcal{T}$ が以下の 3 条件を満たすとき, これをを X **の位相** と呼ぶ.

    1. $X, \emptyset \in \mathcal{T}$
    2. Λ を添字集合とし, $\forall \lambda, G_\lambda \in \mathcal{T}$ であるとき, $\cup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \in \mathcal{T}$,
    3. $G_1, G_2 \in \mathcal{T}$ のとき, $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}$ ■

- $\emptyset$ は空集合をあらわす.
- 上記において, X は単に集合であればよく, ベクトル空間の構造などの別の数学的構造は不要.
- 一般に, 集合 X に入れることができる位相には, いくらでもバリエーションが存在する.

- もっとも素朴な位相は,
    - ▷ $\{\emptyset, X\}$
    - ▷ X の部分集合全体

の 2 種類で, 前者を密着位相, 後者を離散位相と呼ぶ. これらは極端な例として挙げられるもので, 実用上の価値はほとんどない.

- 位相が定義された集合 $(X, \mathcal{T})$ のことを位相空間と呼ぶ. $\mathcal{T}$ の部分を省略して, X 自体を位相空間と呼ぶことも多い.

- ノルムが定義されたベクトル空間 V において, $r > 0$ に対し,

$$B(f, r) = \{g \in V : \|f - g\| < r\}$$

と定義する. これを, f を中心とする半径 r の開球と呼ぶ.

- ノルム空間 V において, 開球の和集合全体を集めて作った集合は, V の位相となる. これが, V でもっとも普通に用いられる位相である.
- 上記が位相となることの証明については, 位相空間論の教科書などを参照せよ.

- 位相空間とノルム空間のあいだの中間的な構造に, 距離空間と呼ばれるものがある. これについて述べる.

- **距離の公理:**　集合 X の直積 $X \times X$ で定義された実数値関数 $\rho(\cdot,\cdot)$ が以下の 3 条件を満たすとき, これを距離関数と呼ぶ.

  1. $\forall x, y \in X,\ \rho(x,y) \geq 0$
  2. $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
  3. $\forall x, y \in X,\ \rho(x,y) = \rho(y,x)$
  4. $\forall x, y, z \in X,\ \rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$

$\blacksquare$

- 集合 X における距離関数が定義されているとき, (X, ρ) を距離空間と呼ぶ．距離関数を省略して, X 自体を距離空間と呼ぶこともある.

- 距離空間 (X,ρ) において, $r>0$ に対し,

$$B(x,r)=\{y\in V:\rho(x,y)<r\}$$

と定義する. これを, x を中心とする半径 r の開球と呼ぶ.

- 距離空間 X において, 開球の和集合全体を集めて作った集合は, X の位相となる. これが, X でもっとも普通に用いられる位相である.
- 上記が位相となることの証明については, 位相空間論の教科書などを参照せよ.

- ノルム空間 V の元 $f, g \in V$ に対し,

$$\rho(f,g) = \|f - g\|$$

と定義すると, これは V における距離関数になっている. したがって, ノルム空間は, 距離空間の特別な場合であると解釈できる.

- 距離空間 (X,ρ) では, 距離関数 $\rho(\cdot,\cdot)$ を用いて X の位相を定めることができる. したがって, 距離空間は位相空間の特別な場合であると解釈できる.

- これらをまとめると, 以下の包含関係が成り立つ. この包含関係で等号は成立しない.

$$\text{ノルム空間} \subset \text{距離空間} \subset \text{位相空間}$$

- 以上のような議論をした理由は, 収束などの議論をする際に重要なのは位相であって, ノルムそのものではないからである.
- 異なるノルムが同一の位相構造を定めることも, そうでないこともある.

- 同じ位相構造を定めるノルムを, 同値なノルムという.

- ノルム空間 V に 2 個のノルム $\|\cdot\|_A$ と $\|\cdot\|_B$ が定義され,

$$\exists a, b > 0, \forall x \in V, a\|x\|_A \leq \|x\|_B \leq b\|x\|_A$$

となれば, $\|\cdot\|_A$ と $\|\cdot\|_B$ は同値であることが証明できる.

- 証明については, 線形代数あるいは関数解析の教科書を参照せよ.

- ベクトル空間 V に 2 個のノルム $\|\cdot\|_A$ と $\|\cdot\|_B$ が定められているものとする.
- $\|\cdot\|_A$ と $\|\cdot\|_B$ が同値でないときには, 集合としての V は共通でも, $(V, \|\cdot\|_A)$ と $(V, \|\cdot\|_B)$ とは位相空間としては別物である.

- 一方, $\|\cdot\|_A$ と $\|\cdot\|_B$ が同値であれば, $(V, \|\cdot\|_A)$ と $(V, \|\cdot\|_B)$ とは, ノルムの値が違っても位相空間としては同じである.
- 同値なノルムが複数あるときには, 収束などの議論をする際に, 計算がもっとも簡単なノルムを選べる, という利点がある.

- V が有限次元ノルム空間であるとき, V で定義されたノルムはすべて同値であることが証明できる.
- 証明については関数解析の教科書を参照せよ.

- したがって, 有限次元ノルム空間で位相に関する議論をする場合には, 計算がもっとも簡単なノルムを用いてよいことになる.

- 解析学では「Cauchy 列は収束する」という性質が必要となることが多い．この性質を完備あるいは完備性という．関連する定義を改めて述べておく．

- **定義 (数列):** X における数列とは, $\mathbb{N}$ から X への関数のことを言う. これを,

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

などと書く (() のかわりに $\{\}$ が用いられることも多い). ■

- **定義 (収束):** 位相空間 $(X, \mathcal{T})$ における数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $x \in X$ に収束するとは, x を含む任意の開集合 G に対し, ある $N \geq 0$ が存在し, すべての $n \geq N$ に対し,

$$x_n \in G$$

となることをいう. ■

- **定義 (Cauchy 列):**　距離空間 (X, ρ) における数列 $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ が Cauchy 列であるとは,

$$\forall \varepsilon, \exists N, \forall m, n \geq N, d(x_m, x_n) < \epsilon$$

となることをいう. ■

- **定義 (完備):** 距離空間 (X, ρ) が完備であるとは, X の任意の Cauchy 列が収束することをいう. ■

- 有限次元ノルム空間は完備であることが証明できる.
- 証明については関数解析の教科書を参照せよ.

- 線形代数において, ベクトルを別のベクトルに移す写像のうち, もっともよく使われる (使いやすい) ものは線形写像である. 関数空間でもこれは同様で, 線形写像が重要な役割を果たす.
- 改めて線形写像の定義を述べておく.

- **定義 (線形写像):** ベクトル空間 V, W が与えられているとき, 写像

$$L : V \to W$$

が線形であるとは,

$$\forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y \in V,$$
$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$$

となることをいう. ■

ノルム空間の例

- 定義ばかり続いたので, ノルム空間の例をいくつか見ておく.

§ 有限次元ベクトル空間

- まず, V が有限次元のベクトル空間の場合を考える.

- V には基底 $(e_1, \ldots, e_n)$ が与えられ, V の要素がこの基底を用いて

$$x = (x_1, \ldots, x_n)$$

と成分表示されているものとする.

- 有限次元ベクトル空間で 応用上 よく使われるノルムは以下の通り. (下付き添字に注意)

    ▷ l_1 ノルム: $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$

    ▷ l_2 ノルム: $\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2}$

- ▷ l_p ノルム: $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}$
  ただし $1 \le p < \infty$, 上記の l_1 ノルム ($p = 1$) と l_2 ノルム ($p = 2$) を含む
- ▷ 無限大ノルム:
  $\|x\|_\infty = \max\{|x_k|, 1 \le k \le n\}$

- l_1 ノルムと無限大ノルムがノルムの定義を満たすことはすぐに確認できる.

- l_2 ノルムがノルムの定義を満たすことの確認には，Cauchy-Schwarz の不等式と呼ばれる不等式が必要であり，難しくはないが，やや繁雑である．

- 一般の p に対して l_p ノルムがノルムの定義を満たすことを確認するためには Hölder の不等式と Minkowski の不等式と呼ばれる不等式が必要となり, 技巧的である．これらについては関数解析の教科書などを参照せよ.

- $0 < p < 1$ に対し,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$$

はノルムにならない.

- ただし, $x, y \in V$ に対し,

$$d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)$$

は距離を定める.

- 以上, 有限次元ベクトル空間のノルムをいくつか紹介したのだが…
- 先ほど述べた通り, 有限次元ベクトル空間のノルムはすべて同値なので, どのノルムを使っても, これらは位相空間としては同一である.

§ 数列のなす空間

- V を実数の無限列 $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ の全体が作る集合とする.
- V は加算とスカラー倍を成分ごとに定義することで無限次元ベクトル空間となる.

- 実数の無限列 $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 全体が作る集合は,

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

(実数体の可算無限個の直積) であるが, これから述べるように, 以下では, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ をノルム空間にするわけでない.

- この空間でよく使われるノルム (に対応する関数の候補) は以下の通り.

- ▷ $$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$$
- ▷ $$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2}$$
- ▷ $$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$$
- ▷ $$\|x\|_\infty = \sup\big\{|x_k|, k \in \mathbb{N}\big\}$$

- 以上は, 見掛け上は, 有限次元空間における有限の和が無限和で置き換わっただけであるが, この時点では値が有限であることは保証されていない. したがって, 上記の定義の時点では, これらはまだノルムではない.

- 上述のノルム関数の候補が定めるノルム空間は以下の通り.
  - ▷ $l_1 = \{x \in V : \|x\|_1 < \infty\}$,
  - ▷ $l_2 = \{x \in V : \|x\|_2 < \infty\}$
  - ▷ $l_p = \{x \in V : \|x\|_p < \infty\}$,
  - ▷ $l_\infty = \{x \in V : \|x\|_\infty < \infty\}$

- 有限次元空間と同様に…
  - ▷ $\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_\infty$ がノルムの定義を満たすことはすぐに確認できる.
  - ▷ $\|\cdot\|_2$ がノルムの定義を満たすことの確認には, Cauchy-Schwarz の不等式と呼ばれる不等式が必要であり, 難しくはないが, やや繁雑である.

- ▷ 一般の p に対して $\|\cdot\|_p$ がノルムの定義を満たすことを確認するためには Hölder の不等式と Minkowski の不等式と呼ばれる不等式が必要となり, 技巧的である.

- 有限次元と同様に, $0 < p < 1$ に対し,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}$$

はノルムにならない.

- 一方, こちらも有限次元と同様に, $0 < p < 1$ に対し, $x, y \in V$ に対し,

$$d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right)$$

は距離を定める.

- 有限次元で l_1, l_2, l_p $(p \neq 1, 2)$, l_∞ がすべて代数的には $\mathbb{R}^n$ (ただし n はこのベクトル空間の次元) と同一で, かつノルムが同値であったから位相空間としても同一であった.

- 一方, 数列の空間では, l_1, l_2, l_p $(p \neq 1, 2)$, l_∞ はすべて $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ の極めて限定された部分空間である.

- また，これらの部分空間に限定しても，それぞれの空間のノルムは同値にならないので，l_1, l_2, l_p $(p \neq 1, 2)$, l_∞ はすべて位相空間として別物である．

§ 可測関数のなす空間

- V を，ほとんど至るところで有限値を取る Lebesgue 可測関数全体とする．

- V はベクトル空間であることが証明できる.
- 証明については Lebesgue 積分あるいは関数解析の教科書を参照せよ.

V の要素 (関数)f と $1 \leq p < \infty$ に対し,

$$\|f\|_p = \left(\int (f(x))^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

と定義する ($d\mu$ は Lebesgue 測度に関する積分).

- $\|\cdot\|_p$ はノルムの公理を一部満たさず, $f \neq 0$ であっても $\|f\|_p = 0$ となることがある.
- そこで, $f, g \in V$ に対し,

$$\mu\{x : f(x) \neq g(x)\} = 0$$

となっているとき, $f \sim g$ と定義する.

- この講義では詳細は略すが, 上述の $\sim$ は同値関係になっているので, この同値関係に係る商集合 $\mathcal{L}_p/\sim$ を作る. すると, L_p はベクトル空間で, $\|\cdot\|_p$ は L_p におけるノルムになる.

- この事実の証明には数列と同様に Hölder の不等式 や Minkowski の 不等式などを用いるが, 詳細についてはLebesgue積分あるいは関数解析の教科書を参照せよ.

- 上記の $\|\cdot\|_p$ を用い,

$$\mathcal{L}_p = \{f \in V : \|f\|_p < \infty\}$$

と定義する. $\mathcal{L}_p$ 商空間としたとき, $\|\cdot\|_p$ は L_p におけるノルムになる.

- 以上は l_1, l_2, l_p の関数版であった.
- l_∞ の関数版はどうかというと, こちらも構成できる.

- μ を Lebesgue 速度とし,

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \in [0,\infty) : \\ \mu\{x : |f(x)| > M\} = 0\}$$

とする. $\|f\|_\infty$ が定まらない場合には,

$$\|f\|_\infty = \infty$$

と定義する.

- そして,

$$\mathcal{L}_\infty = \{f \in V : \|f\|_\infty < \infty\}$$

とし, 更に先と同様に

$$L_\infty = \mathcal{L}_\infty/\sim$$

とすると, L_∞ はノルム空間で, $\|\cdot\|_\infty$ は L_∞ にノルムとなることが証明できる.

- 詳細については Lebesgue 積分あるいは関数解析の教科書を参照せよ.

内積

- 一般のベクトル空間では, ノルムが公理的に導入されたのと同様に, 内積も公理的に導入される.
- 内積を導入するときには, 係数体を実数体 $\mathbb{R}$ か複素数体 $\mathbb{C}$ のいずれか一方に取る.

- まず係数体が $\mathbb{C}$ の場合の定義を述べる.
- V を複素数体上のベクトル空間とし, $V \times V$ で定義された複素関数 $g(\cdot, \cdot)$ が与えらているものとする.

- **内積の公理 (係数体が $\mathbb{C}$ のとき):**　$g(\cdot,\cdot)$ が任意の $u, v, w \in V$ および $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して次の 5 条件を満たすとき, これを内積という.

  1. $g(v,u) = \overline{g(u,v)}$
  2. $g(\alpha u, v) = \alpha g(u,v)$,
  3. $g(u+v, w) = g(u,w) + g(v,w)$,
  4. $g(u,u) \geq 0$,
  5. $g(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$. ■

- 前ページの式において，$\overline{\cdot}$ は複素共役をあらわす．

- 係数体が複素数の場合の内積の定義にはバリエーションがあり, 第二の条件のかわりに $g(u, \alpha v) = \alpha g(u, v)$ を用いることもある.

- 次に, 係数体が $\mathbb{R}$ の場合の定義を述べる.
- V を実数体上のベクトル空間とし, $V \times V$ で定義された実数値関数 $g(\cdot, \cdot)$ が与えらているものとする.

- **内積の公理 (係数体が $\mathbb{R}$ のとき):** $g(\cdot,\cdot)$ が任意の $u, v, w \in V$ および $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して次の 5 条件を満たすとき, これを内積という.

  1. $g(v, u) = g(u, v)$
  2. $g(\alpha u, v) = \alpha g(u, v)$,
  3. $g(u + v, w) = g(u, w) + g(v, w)$,
  4. $g(u, u) \geq 0$,
  5. $g(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$. ■

- 内積が定義されたベクトル空間を内積空間または前 Hilbert 空間という.
- 以下では, $g(u, v)$ を単に (u, v) と書く.
- 内積は, 一般的な関数空間に直交性を導入するために必要となる.

- 内積の例を挙げる.

- $\mathbb{R}^n$ のベクトル

$$x = (x_1, \ldots, x_n)^T, \quad y = (y_1, \ldots, y_n)^t$$

に対し,

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

と定義すると, これは内積の公理を満たすことが定義から直ちに確認できるので, 内積である.

- 先の内積は, もっとも標準的に用いられるものである.
- $(x, y) = x^T y$ とも書ける.

- より一般に, M を正定対称行列としたとき,

$$(x, y)_M = x^T M y$$

と定義すると, $(x, y)_M$ は内積になる.

- $\mathbb{C}^n$ のベクトル

$$x = (x_1, \ldots, x_n)^T, \quad y = (y_1, \ldots, y_n)^t$$

に対し,

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$$

と定義すると, これは内積の公理を満たすことが定義から直ちに確認できるので, 内積である.

- 先の内積も, もっとも標準的に用いられるものである.
- $(x, y) = x^T \bar{y}$ とも書ける.

- より一般に, H を Hermite 行列としたとき,

$$(x, y)_H = x^T H y$$

と定義すると, $(x, y)_H$ は内積になる.

- l_2 における内積は, たとえば $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $v = (v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ としたとき,

$$(u, v) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \overline{v_k}$$

によって与えられる

- L_2 における内積は, たとえば

$$(f,g) = \int f(t)\overline{g(t)}d\mu$$

によって与えられる.

Banach 空間と Hilbert 空間

- 完備なノルム空間を Banach 空間という.
- 完備な内積空間を Hilbert 空間という.

- Banach 空間と Hilbert 空間は関数空間の代表格であり, 数値解析でもしばしば登場する.

- Banach 空間と Hilbert 空間以外にも応用上重要な関数があるが (たとえば偏微分方程式論であらわれる Sobolev 空間) この講義では述べない.

関数解析に関する注意

- これまで述べてきたことは, 関数解析と呼ばれる数学の１分野の入り口の部分である.
- 入り口の部分のため, ほぼ定義の羅列であったが, この程度の定義や用語は工学の色々な分野でしばしば出て来る.

- 数学の１分野としての関数解析の主要部分は線形作用素の理論であり，そこでは，線形代数の無限次元への拡張がなされている (それだけではないが).

- (線形) 関数解析においてもっとも基本的な定理は, 開写像定理, 閉グラフ定理, 一様有界性定理と呼ばれる 3 個の定理である.

- 今までの講義中で, これらの定理に一切言及していないことに注意せよ. この講義では, 応用上よく出てくる関数解析関連の定義や概念を紹介したのみであり, 関数解析の本体の部分には立ち入っていない. これらの内容に興味がある者は, 関数解析の教科書を参照するとよい.

線形作用素のノルム

- 今後の議論で必要になることがあるので, 線形写像 (あるいは線形作用素) のノルムを定義しておく.
- 線形写像と線形作用素は同義だが, 無限次元空間では線形作用素という言葉の方がよく用いられる.

- $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ をノルム空間, A を V から W への線形作用素とする．このとき, A の作用素ノルム (誘導ノルム, あるいは単にノルムとも呼ぶ) は次のように定義される．

$$\|A\| = \sup_{x \in V, \|x\|_V \leq 1} \|Ax\|_W$$

- V, W におけるノルムの取り方には, 様々なものがあり得る. これらの取り方に応じて作用素ノルムは変わる.

行列のノルム

- m 行 n 列の行列 A は, n 次元空間 V から m 次元空間 W への線形写像と解釈することもできるし, $m \times n$ 次元のベクトルと解釈することもできる.

- したがって, 行列 A を m 行 n 列の行列としたとき, A のベクトルとしてのノルムと作用素としてのノルムが定義できる.
- 以下では, 行列 A の (i, j) 成分を $a_{i,j}$ と書く.

- A のベクトルとしてのノルムの定義は, $1 \leq p < \infty$ に対しては

$$\|A\|_p = \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} |a_{kl}|^p \right)^{1/p}$$

である.

- A のベクトルとしてのノルムの定義は, $p = \infty$ に対しては

$$\|A\|_\infty = \left(\max_{k \in \{1,\ldots,m\}, l \in \{1\ldots,n\}} |a_{kl}| \right)$$

である.

- 一方, A の作用素としてのノルムは, V におけるノルムを $\|\cdot\|_V$, W におけるノルムを $\|\cdot\|_W$ と書くと,

$$\|A\| = \sup_{x \in V, \|x\|_V \leq 1} \|Ax\|_W$$

となる.

- これらはどちらも使われることがあるので, 文脈によって, どちらが必要かを判断しなければならない.

- $(V, \|\cdot\|_p)$, $(W, \|\cdot\|_p)$ に対し, V から W への線形作用素の作用素ノルムを l_p 誘導ノルムと呼ぶ (単に l_p ノルムと呼ぶこともある). 行列 A のベクトルとしてのノルムと混乱しやすいので注意せよ.

- $(V, \|\cdot\|_p)$, $(W, \|\cdot\|_q)$ としたとき, V から W への線形作用素の作用素ノルムは $(p, q)-$ 誘導ノルムとでも呼ぶべきであろうが, このような用語は定着していない.

Scilab におけるノルムの計算

- Scilab でノルムを計算するには, 組み込み関数 `norm` を用いる.
- `norm` の挙動は, 引数がベクトルの場合と行列の場合で異なる.

引数がベクトルの場合

- 以下では, $\mathbf{x}$ はベクトルとする.

- このとき,

  `norm(x)`

  とすると, `x` の l_2 ノルムが計算される.

- 一方, 変数 `p` に 1 以上の数が代入されているという前提のもとで,

  `norm(x,p)`

  とすると, `x` の l_p ノルムが計算される.

- たとえば,
  `norm(x,4)`
  とすると, `x` の l_4 ノルムが計算される.

- 無限大ノルムを計算する場合には,
`norm(x,'inf')`
とする.

引数が行列の場合

- 引数が行列の場合には, Scilab の組み込み関数 `norm` は, その行列の誘導ノルムなどを計算する.
- 以下では, `A` は行列とする.

- このとき,

  `norm(A)`

  とすると, `A` の l_2 誘導ノルムが計算される.

- 一方, 変数 p に 1 以上の数が代入されているという前提のもとで,

  `norm(A,p)`

  とすると, A の l_p 誘導ノルムが計算される.

- たとえば,
  `norm(A,4)`
  とすると, `A` の l_4 ノルムが計算される.

- l_∞ 誘導ノルムを計算する場合には,
  `norm(A,'inf')`
  とする.

- これとは別に, `norm(A,'fro')` という指定の仕方があり, このようにすると `A` をベクトルと解釈した場合の l_2 ノルムが計算される. このノルムには Frobenius ノルムという名前が付けられており, 第二引数 'fro' はこの略である.