工共 212 工業数学 IV
第 15 回
リーマン球面・解析接続

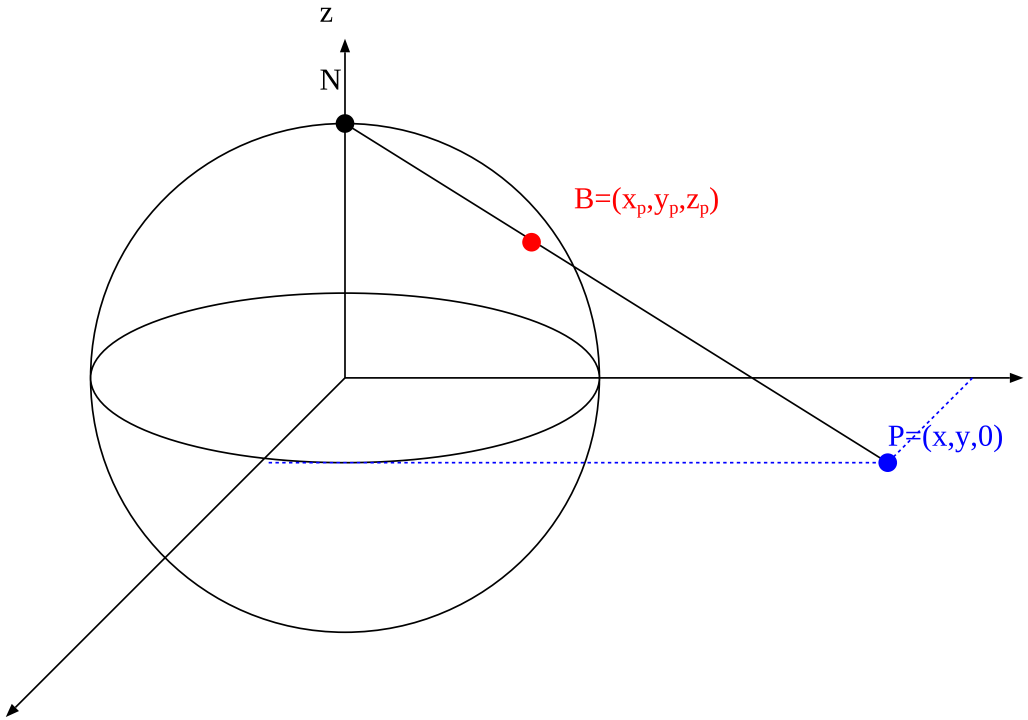
リーマン球面と無限遠点

- 複素解析では，「無限遠点」をひとつの点として扱うことがある．
- 講義第 12 回では，「$z \to \infty$ としたときの孤立特異点, 零点」という言葉が出た．このような場合に，「$z = \infty$」をひとつの点として扱っていることになる．

- 換言すると，複素平面に，「無限遠点」という点が追加されている．
- これは，どのような考え方かというと，
    - ▷ 複素平面と 2 次元平面を対応させる
    - ▷ 2 次元平面と原点を中心とする単位球面から 1 点を除いたものを対応させる

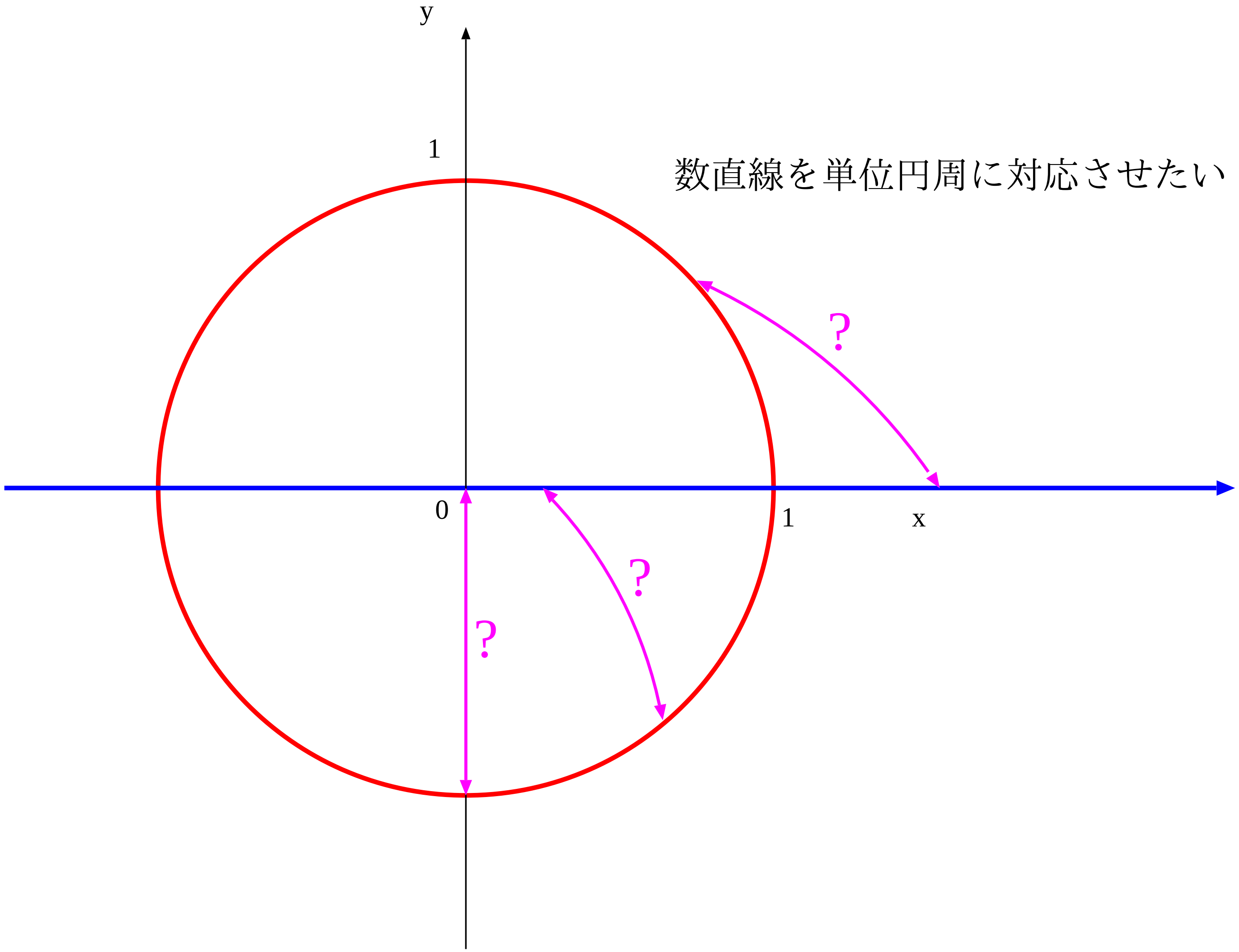
という考え方．

- 詳しい方法は改めて説明するが…
- 次のページのように点 N, P, B を取る.
  - ▷ N は単位球面上の点で, 座標は $(0, 0, 1)$
  - ▷ P は 2 次元平面上の点
  - ▷ B は単位球面上の点

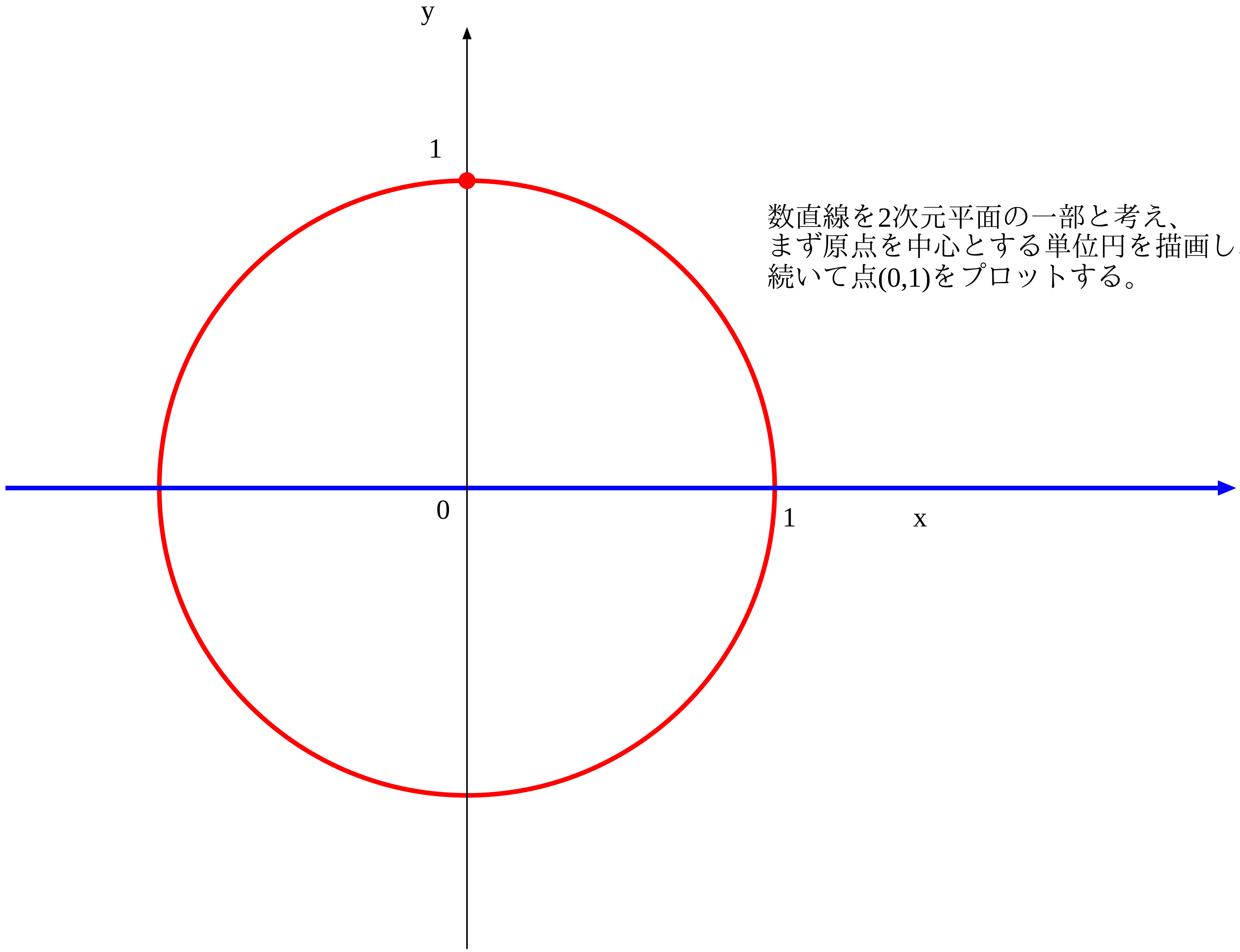

z
N
B=(x_p,y_p,z_p)
P=(x,y,0)

- 点 N と点 P を結ぶ直線 NP を取り, 点 P に, 直線 NP と単位球面の交点を対応させる.
- 図から, 2 次元平面上の点と単位球面上の点が 1 対 1 に対応するが, 点 $N=(0,0,1)$ のみは 2 次元平面上に対応する点がないことがわかる.
- この点 $N=(0,0,1)$ が「無限遠点 $z=\infty$ に対応する」と解釈するわけである.

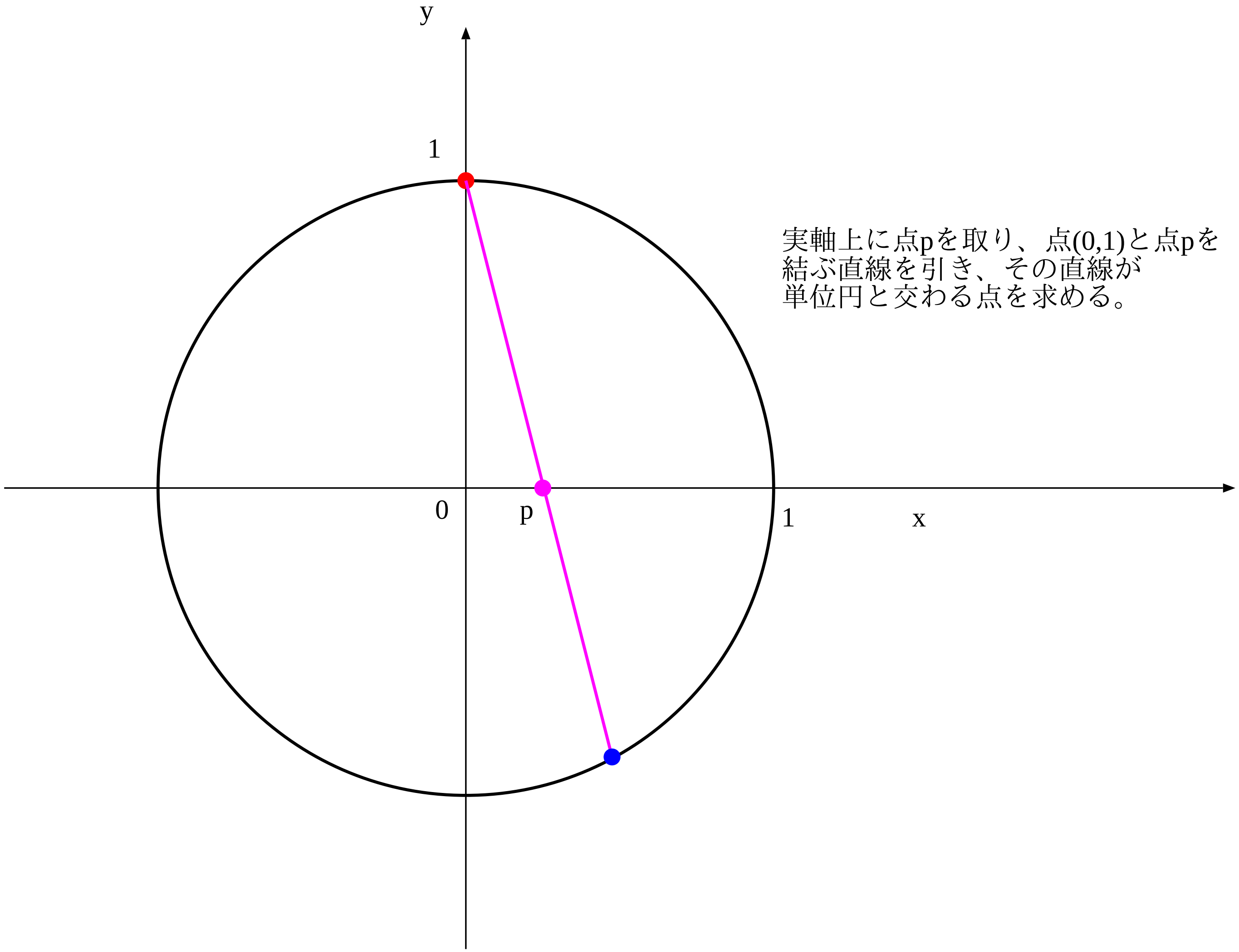
- 次に，この対応関係の式を求めるのだが，式を追いやすくするために，まず 1 次元の数直線に単位円を対応させる式を求める．


y
1
数直線を単位円周に対応させたい
?
?
?
0
1
x

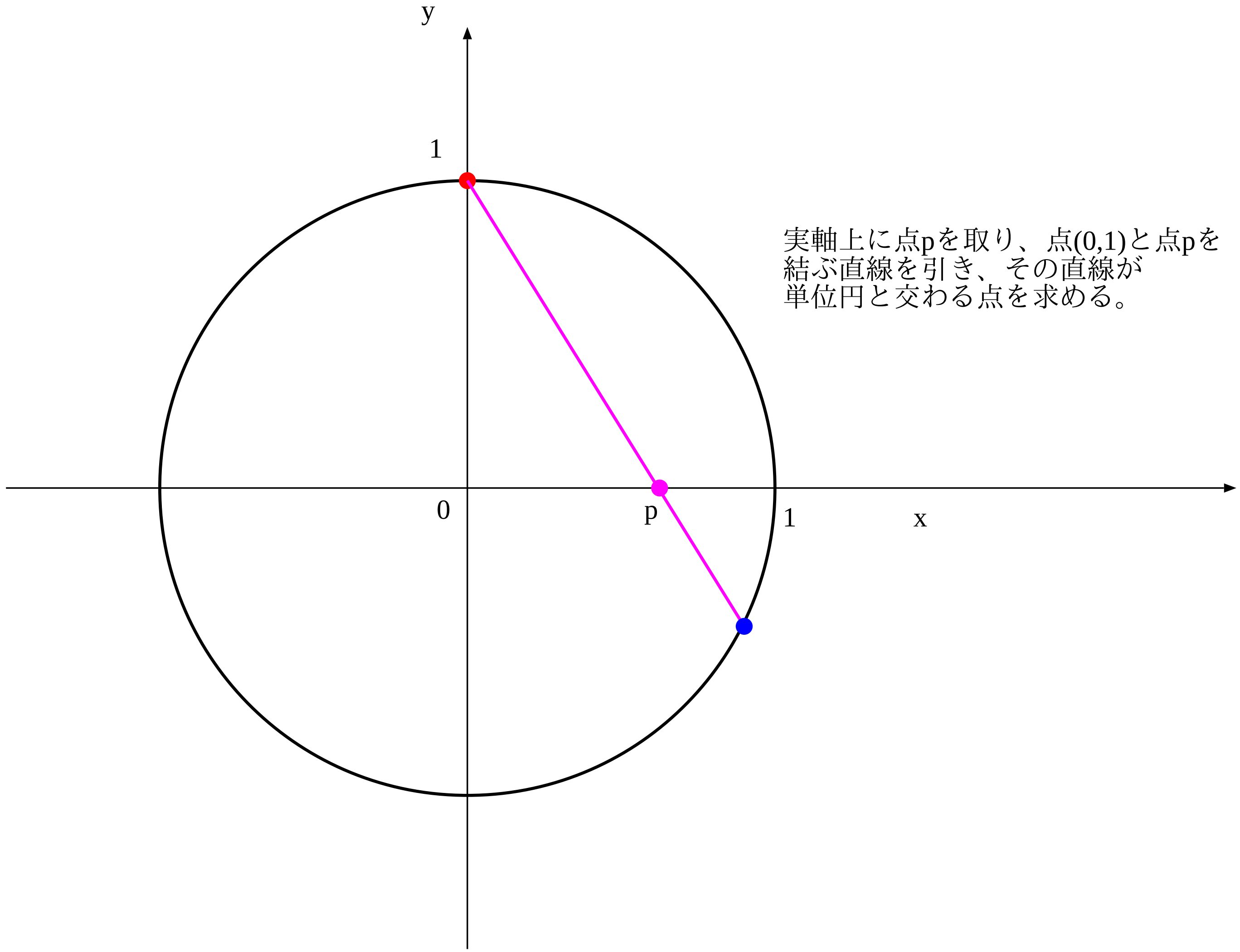
- 1 次元の数直線を 2 次元平面の一部と考え,
  - ▷ 点 $(0, 1)$ と原点を中心とする単位円を描画し
  - ▷ x 軸上の点 p を動かしながら, 点 $(0, 1)$ と点 p を結ぶ直線と単位円との交点を求めてゆく.



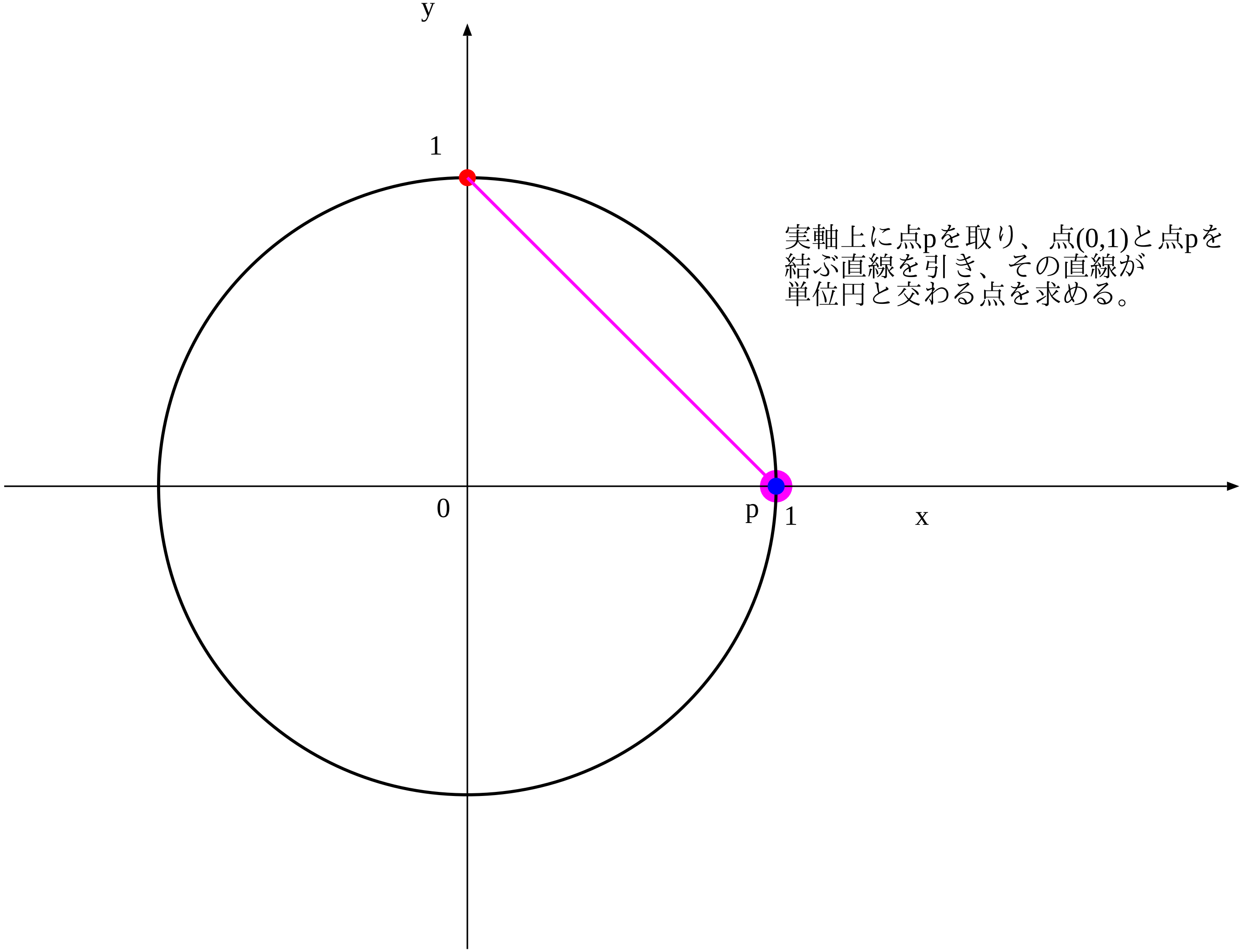
数直線を2次元平面の一部と考え、
まず原点を中心とする単位円を描画し、
続いて点(0,1)をプロットする。



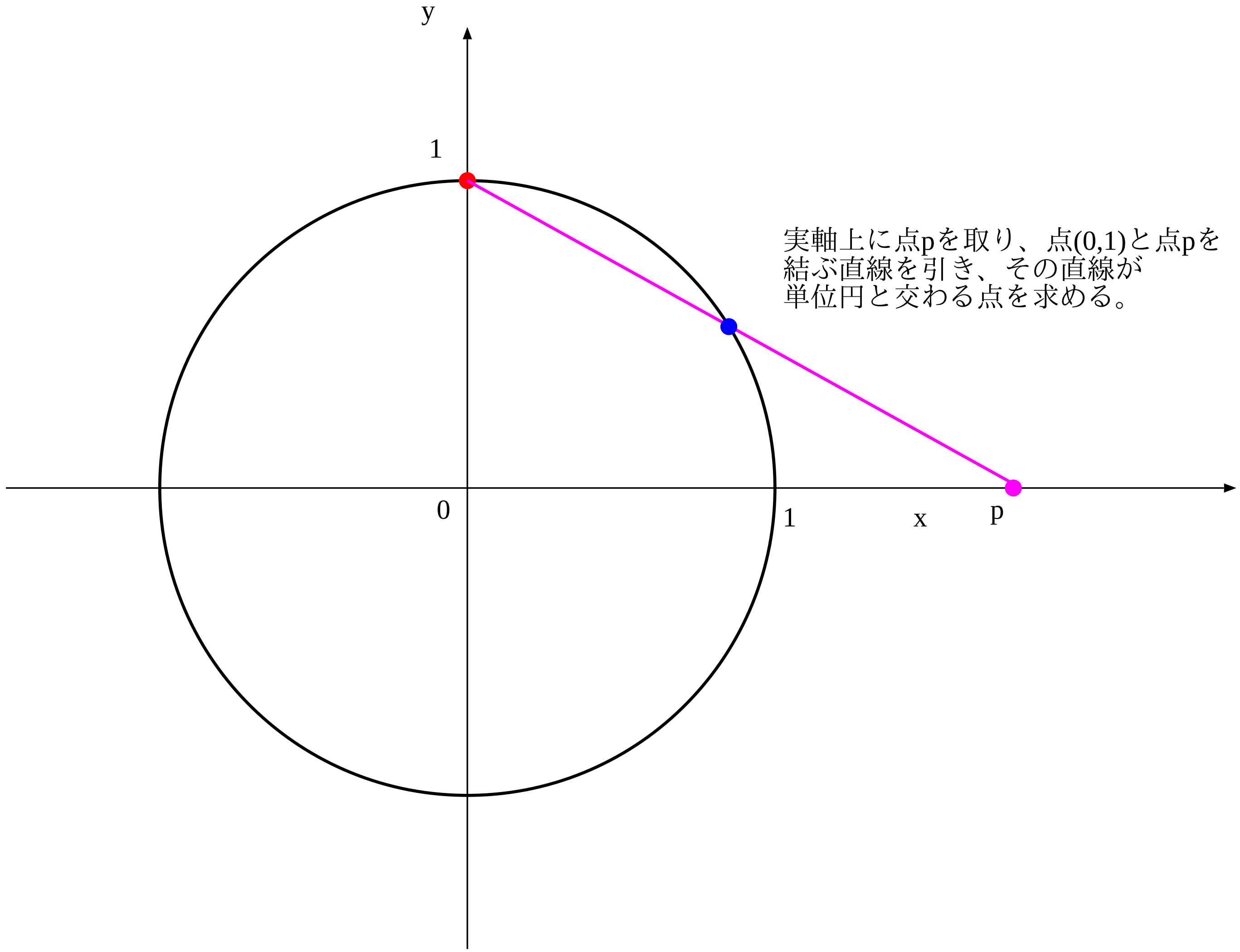
実軸上に点pを取り、点(0,1)と点pを
結ぶ直線を引き、その直線が
単位円と交わる点を求める。



実軸上に点pを取り、点(0,1)と点pを
結ぶ直線を引き、その直線が
単位円と交わる点を求める。



実軸上に点pを取り、点(0,1)と点pを
結ぶ直線を引き、その直線が
単位円と交わる点を求める。

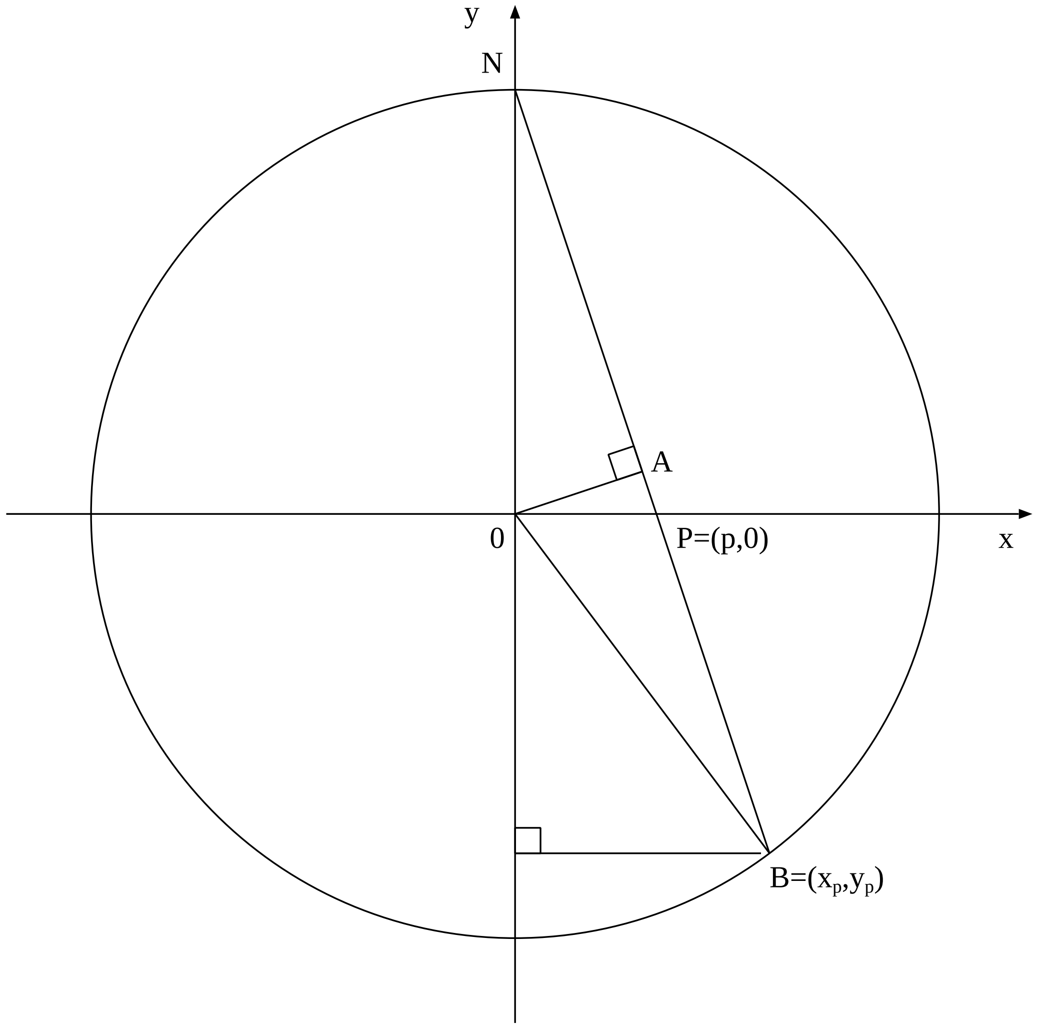


実軸上に点pを取り、点(0,1)と点pを
結ぶ直線を引き、その直線が
単位円と交わる点を求める。

- 以上のようにすると, 実軸と単位円上の点が1対1に対応するのだが…
- $p \to +\infty$ とした場合と, $p \to -\infty$ とした場合には, ともに対応する点は $(0, 1)$ となる.

- 言い換えると，実軸に「無限遠点」($+\infty$ と $-\infty$ を同一の点と考える) を追加したものは，2 次元の単位円と，1 対 1 に対応する．
- 無限遠点を 1 点と考えるというのは，こういうこと．

- 先の手順によって点 $(p, 0)$ に対応する単位円上の点を (x_p, y_p) としたとき, (x_p, y_p) を求める.
- 次のページのように点 N, A, B を取る.


y
N
A
0
P=(p,0)
x
B=(x_p,y_p)

- 辺NAの長さをlとすると, $l : 1 = 1 : \sqrt{1+p^2}$ だから,

$$l = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

- $l : 1 = 1 - y_p : 2l$ だから,

$$y_p = 1 - 2l^2 = \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1}.$$

- $p : 1 = x_p : 1 - y_p$ だから,

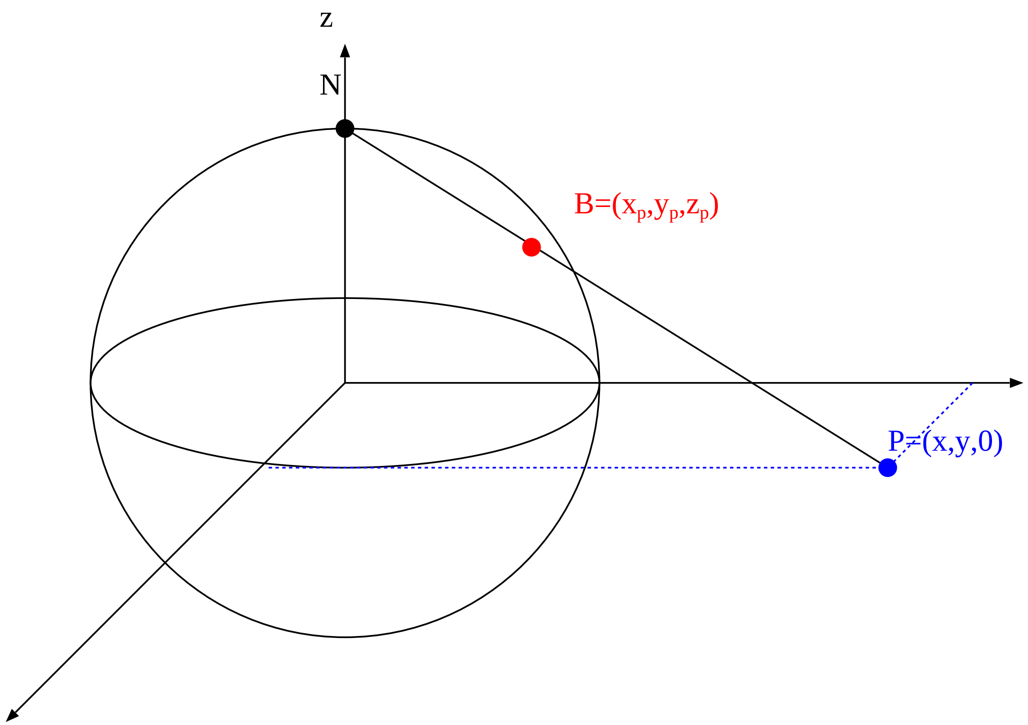
$$x_p = (1 - y_p)p = \frac{2p}{1 + p^2}.$$

- よって, 点 p には,

$$\left(\frac{2p}{1+p^2}, \frac{p^2-1}{p^2+1}\right)$$

という点が対応する.

- 次に, 同じ要領で, 2 次元平面上の点に原点を中心とする単位球面上の点を対応させる式を求める.
- 改めて, 次のページのように点 N, P, B を取る. B は単位球面上にあるものとする.


z
N
B=(x_p,y_p,z_p)
P=(x,y,0)

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とすると, 先ほど確認した数直線と単位円の対応関係と同じ計算により,

$$z_p = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}.$$

となる.

- (x_p, y_p) については, 先ほど確認した数直線と単位円の対応関係から, $l = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}$ とすると,

$$l = \frac{2r}{r^2 + 1}.$$

- (x_p, y_p) は (x, y) と同じ方向だから,

$$(x_p, y_p) = \left(\frac{2x}{r^2 + 1}, \frac{2y}{r^2 + 1} \right).$$

- まとめると,

$$(x_p, y_p, z_p) = \left(\frac{2x}{r^2+1}, \frac{2y}{r^2+1}, \frac{r^2-1}{r^2+1} \right).$$

- 上記のようにして, 2 次元平面に「無限遠点」を追加したものと単位球面の対応を取ることができる.

- ところで, 2 次元平面と複素平面は幾何学的には同じものだったから…
- $z = x + iy$ に対し,

$$(x_p, y_p, z_p) = \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

とすることで, 複素平面に「無限遠点」を追加したものと単位球面の対応を取ることができる.

- 以上のような対応を取り, 単位球面の点 $(0, 0, 1)$ を複素平面の無限円点と解釈したものを, リーマン球面と呼ぶ.

- 複素解析において無限遠点をひとつの点として取り扱うということは, 無限遠点をリーマン球面における点 $(0, 0, 1)$ と解釈することと同等である.

- また, 先ほど構成した, 単位球面と平面の対応を与える写像を, 立体射影と呼ぶ.

解析接続

- D_1 と D_2 を領域とする.

  ▷ 領域とは弧状連結な開集合であった.

- $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ と仮定する.
- 領域 D_1 で定義された解析関数 $f_1(z)$ と領域 D_2 で定義された解析関数 $f_2(z)$ が存在し, $D_1 \cap D_2$ で $f_1(z)$ と $f_2(z)$ は一致するものとする.

- 上記のような状況で,

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & z \in D_1, \\ f_2(z) & z \in D_2 \end{cases}$$

は, 領域 $D_1 \cup D_2$ で定義された解析関数となる.

- このようになっているとき, f_2 を f_1 の (D_2 への) 解析接続と呼ぶ.

- 解析接続は, 何回も繰り返すことができる.

- $D = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$ で定義された関数

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

のテイラー展開を考える.

- $f(z)$ を $z=1$ のまわりでテイラー展開して得られる関数を $f_1(z)$ とすると,

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(1-z)^n$$

となる. $f_1(z)$ は $z=1$ を中心とする半径 1 の円 D_1 の内部で定義された解析関数である.

テイラー展開の定義にしたがえば, この表現は直ちに得られるが, 等比級数の公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

に $r = 1 - z$ を代入しても, 同じ結果が得られる.

- $f(z)$ を $z = i$ のまわりでテイラー展開して得られる関数を $f_2(z)$ とすると,

$$f_2(z) = -i \sum_{n=0}^{\infty} (1 + iz)^n$$

となる. $f_2(z)$ は $z = i$ を中心とする半径 1 の円 D_2 の内部で定義された解析関数である.

テイラー展開の定義にしたがえば, この表現は直ちに得られるが, 等比級数の公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

に $r = 1 + iz$ を代入しても, 同じ結果が得られる.

- $f(z)$ を $z=-1$ のまわりでテイラー展開して得られる関数を $f_3(z)$ とすると,

$$f_3(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}(1+z)^n$$

となる. $f_3(z)$ は $z=-1$ を中心とする半径 1 の円 D_3 の内部で定義された解析関数である.

テイラー展開の定義にしたがえば, この表現は直ちに得られるが, 等比級数の公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

に $r = 1 + z$ を代入しても, 同じ結果が得られる.

- $f(z)$ を $z=-i$ のまわりでテイラー展開して得られる関数を $f_4(z)$ とすると,

$$f_4(z) = i\sum_{n=0}^{\infty}(1-iz)^n$$

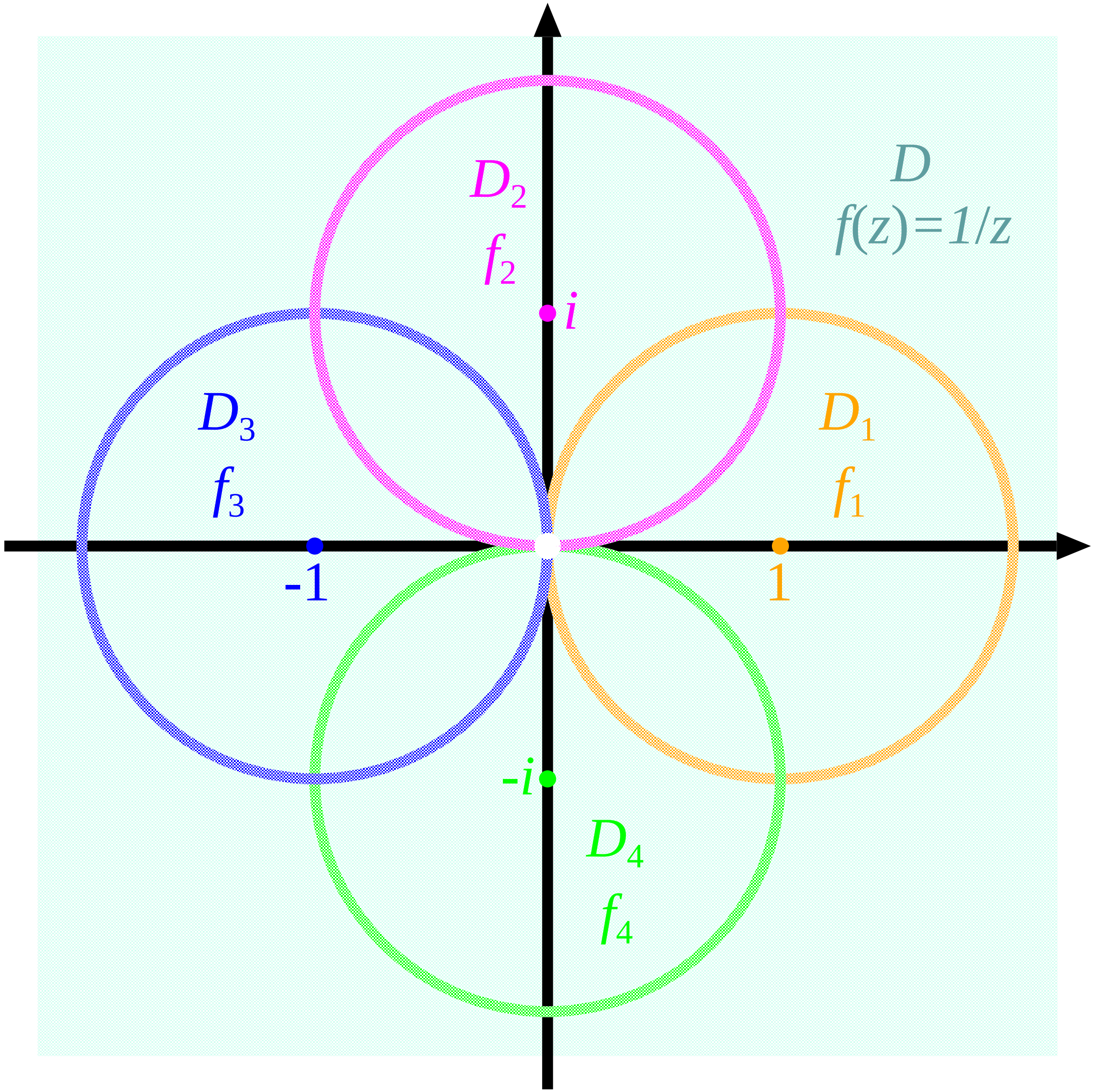
となる. $f_4(z)$ は $z=i$ を中心とする半径 1 の円 D_4 の内部で定義された解析関数である.

テイラー展開の定義にしたがえば, この表現は直ちに得られるが, 等比級数の公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

に $r = 1 - iz$ を代入しても, 同じ結果が得られる.

- D, D_1, D_2, D_3, D_4 を重ね書きすると, 次ページのようになる.


D_2
f_2
D
$f(z)=1/z$
i
D_3
f_3
D_1
f_1
-1
1
$-i$
D_4
f_4

- このようになっているとき…
  - $\triangleright$ f_2 は f_1 の $(D_2$ への$)$ 解析接続
  - $\triangleright$ f_3 は f_2 の $(D_3$ への$)$ 解析接続
  - $\triangleright$ f_4 は f_3 の $(D_4$ への$)$ 解析接続
  - $\triangleright$ f_1 は f_4 の $(D_1$ への$)$ 解析接続

- また,

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

は, $i = 1, 2, 3, 4$ に対し, f_i の D への解析接続になっている.

- 解析接続を繰り返すことにより, 解析関数の定義域を拡大してゆくことができる (どこまで拡大できるかは関数によって異なる).

- この講義では深入りしないが, 解析接続の考え方は, ラプラス変換で暗黙のうちに使われている (ラプラス変換が収束する領域をあまり気にしないでよいのは, 解析接続を考えているから).

工業数学IV 第15回

Maximaによる
複素解析

- これから、講義の後半で述べてきた様々な計算をMaximaで実行する方法を示す
- 受講者がMaximaを実行できる環境を持っていることを前提とする
- Maximaのコマンドを赤字で書くので、各自で実行してみること
- Maximaによる実行結果を黒枠で囲って示す

- コマンドをコピー＆ペーストする際に、改行部分に余分な文字が入ってしまうことがあるので、注意すること
(余分な文字を削除する必要がある)
- Shift+Enterを押すと計算が実行される
- 改行を入力しても入力行の見え方が変わるだけで計算は実行されないので注意せよ
- 入力行の改行は計算結果とは無関係

- 「コンピュータが出した結果は正しい」と信じている学生には衝撃的かもしれないが、今回の講義では、Maximaが誤答を返す例も挙げる。
- Maximaのコマンドに色を付ける際、
  正答が得られる場合は赤色、
  誤答が得られる場合は紫色
  を用いている。

複素積分

- 複素積分の定義を復習する。
- 曲線$C: z = z(t)\ (a \leq t \leq b)$が与えられているとき
$$\int_C f(z)dz$$
は次のように定義されるのだった。
$$\int_a^b f\bigl(z(t)\bigr)z'(t)dt$$

- Maximaでは積分にはintegrate、微分にはdiffという関数を用いる
- 複素数に対応している
- $z'(t)$などを自分で計算してもよいが、数式処理システムを使うときは、微分などのシンボリックな計算は可能な限りすべてシステム側でおこなった方がミスが少なくなる
- 次ページに例を示す。

- $C: z = e^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ としたとき、$\int_C \frac{1}{z} dz$を計算する

```
f(z):=1/z$
z(t):=exp(%i*t)$
integrate(f(z(t))*diff(z(t),t),t,0,2*%pi);
```

```
(%i3) f(z):=1/z$
      z(t):=exp(%i·t)$
      integrate(f(z(t))·diff(z(t),t),t,0,2·%pi);
(%o3) 2 %i π
```

- 行末の$は「Maximaに出力を表示させない」ためのものだったことを思い出すこと
- 行末を;にしても不要な表示が出るだけで無害
- 計算結果が正しい値($2\pi i$)になっていることを確認すること

- 先の例では
  - $f(z) = \frac{1}{z}$と定義する
  - $z(t) = e^{it}$と定義する
  - $\int_0^{2\pi} f\big(z(t)\big)z'(t)dt$を計算する
  - という手順で計算を行っている

- 数学的な意味とコマンドの対応は以下の通り

数学的な意味	**コマンド**
$f(z)=\frac{1}{z}$と定義する	**f(z):=1/z$**
$z(t)=e^{it}$と定義する	**z(t):=exp(%i*t)$**
$\int_0^{2\pi} f\big(z(t)\big)z'(t)dt$を計算する	**integrate(f(z(t))*diff(z(t),t),t,0,2*%pi);**

- :=はMaximaで関数を定義するための構文で
  :=の左辺に関数のシンボル、右辺に定義の内容を書く

- 数学の式を（ほぼ）そのまま打ち込むだけ
- これが数式処理システムのメリット

テイラー展開

- テイラー展開には関数 taylor を使う。
- 展開の中心、次数などを引数で指定する。
- 次ページ以降に例を示す。

- e^xを原点を中心としてxに関してテイラー展開する(3次まで)
  taylor(exp(x),x,0,3);

```
(%i2) taylor(exp(x),x,0,3);
```

(%o2)/T/ $$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots$$

- $\cos x$を原点を中心としてxに関してテイラー展開する(4次まで)
  taylor(cos(x),x,0,4);

```
(%i1) taylor(cos(x),x,0,4);
```

(%o1)/T/ $$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\ldots$$

- $\cos a(x-b)$を$x=b$を原点を中心としてxに関してテイラー展開する(4次まで)
  taylor(cos(a*(x-b)),x,b,4);

(%i10) taylor(cos(a·(x−b)),x,b,4);

(%o10)/T/ $$1-\frac{a^2\,(x-b)^2}{2}+\frac{a^4\,(x-b)^4}{24}+\ldots$$

- ✓ taylorはテイラー展開を計算する関数
  - 第1引数に展開したい関数を書く
  - 第2引数にどの変数に関して展開するかを書く
  - 第3引数にどの点のまわりで展開するかを書く
  - 第4引数に何次まで計算するかを書く
  - 多変数関数を取り扱うことができる
  - 展開の中心点は数値・シンボルのどちらでもよい
  - 係数が0の項は表示されない

ローラン展開

- Maximaでは、ローラン展開の機能は、テイラー展開用の関数 taylor に統合されている。
- 使い方はテイラー展開と同じで、負べきの項を何次まで求めるか指定できないという制限がある。
- 次ページに使用例を示す。

- $\frac{1}{z(z-1)(z-2)}$を$z=2$を中心にzに関してローラン展開する(1次まで)

taylor(1/(z*(z-1)*(z-2)),z,2,1);

(%i4) taylor(1/(z·(z−1)·(z−2)),z,2,1);

(%o4)/T/ $\frac{1}{2(z-2)}-\frac{3}{4}+\frac{7(z-2)}{8}+\dots$

- ✓ 関数taylorはローラン展開にも使える
  - 使い方はテイラー展開と同じ

- Maximaの関数taylorを用いたローラン展開には、負のべきの次数を指定できないという制限があった。
- したがって、真性特異点についてはローラン展開を計算することはできない。
- 次のページに例を示す。

- $e^{1/z}$を$z = \mathbf{0}$を中心に$\mathbf{z}$に関してローラン展開することを試みると(4次の項まで)…
  taylor(exp(1/z),z,0,4);

```
(%i1) taylor(exp(1/z),z,0,4);
```

(%o1)/T/

$$\frac{1}{\%e^{-\frac{1}{z}}}+\ldots$$

- $z=0$は$e^{1/z}$の真性特異点である。
- 指数関数の定義に戻れば$e^{1/z}$のローラン展開は計算でき、以下のようになる筈だが…

$$e^{1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\cdots$$

- このような計算はなされていない。
- Maximaの関数taylorには真性特異点の周りで関数をローラン展開する機能はない。

- $z=\alpha$を中心とした$f(z)$のローラン展開のn次の項の係数は以下の式によって計算できた。

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}dz$$

- $\alpha = 0$とし、複素積分を使ってローラン展開の零時の係数c_0を計算してみる。
- 実は、正しい答が得られない。

- c_0を求めると、間違った値が計算される。

$C: z = e^{it}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ として$\int_C \frac{e^{1/z}}{z} dz$を計算すると…

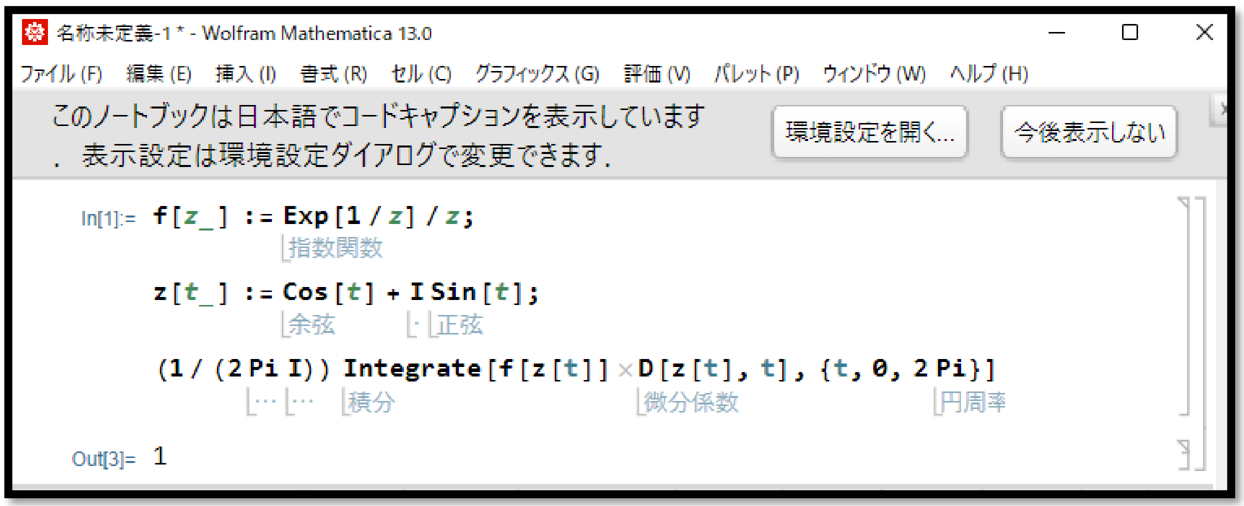
```
f(z):=exp(1/z)/z$
z(t):=exp(%i*t)$
(1/(2*%pi*%i))*integrate(f(z(t))*diff(z(t),t),t,0,2*%pi);
```

```
(%i3) f(z):=exp(1/z)/z$
      z(t):=exp(%i·t)$
      (1/(2·%pi·%i))·integrate(f(z(t))·diff(z(t),t),t,0,2·%pi);
(%o3) 0
```

- 正解は1なのだが、Maximaが計算した値は零になってしまっている(誤答)。
- このように、何の警告もなく誤答が返されることがある。

- Mathematicaを使ってc_0を求める

```
f[z_]:= Exp[1/z]/z;
z[t_]:=Cos[t]+I Sin[t];
(1/(2 Pi I)) Integrate[f[z[t]] D[z[t],t],{t,0,2 Pi}]
```



- Mathematicaでは、正解である1が得られる(ただし計算に時間がかかる)。

留数

- 留数の計算には関数residueを使う。
- 次ページに使用例を示す。

- $\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ の $z=2$ における留数を計算する

residue(1/(z*(z-1)*(z-2)),z,2);

```
(%i5) residue(1/(z·(z−1)·(z−2)),z,2);
(%o5) 1/2
```

- ✓ residueは留数を計算する関数
  - 第1引数に留数を計算したい関数を書く
  - 第2引数にどの変数に関して留数を求めるかを書く
  - 第3引数にどの点で留数を求めるかを書く
  - ローラン展開の-1次の項の係数が得られていることを確認すること

実積分への応用

- 数式処理システムは、無限区間における積分をそのまま実行できる。
- 積分の上限や下限が数値ではなく記号になっている場合にも積分を計算できる。
- そのシステムに組み込まれている規則を使って可能な限り簡単な形で積分の結果を表示しようとする（うまくいかないこともある）

- 「留数定理の実積分への応用」として紹介された技法などを特に意識することなく積分を計算することができる（ただし、そのシステムの能力の範囲内で）
- 次ページに例を示す。

- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$を計算する (教科書 例7.5)
  integrate(1/(1+x^4),x,minf,inf);

```
(%i1) integrate(1/(1+x^4),x,minf,inf);
```

(%o1) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2+2x+5} dx$を計算する (教科書 例7.6)

integrate(x*sin(%pi*x)/(x^2+2*x+5),x,minf,inf);

```
(%i2) integrate(x·sin(%pi·x)/(x^2+2·x+5),x,minf,inf);
```

(%o2) $-\pi \, \%e^{-2\pi}$

- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$を計算する (教科書 例7.7)
  integrate(sin(x)/x,x,minf,inf);

```
(%i3) integrate(sin(x)/x,x,minf,inf);
(%o3)  π
```

- ✓ integrateは積分を計算する関数
  - 第1引数に積分したい関数を書く
  - 第2引数にどの変数に関して積分するかを書く
  - 第3引数に積分区間の下限を書く
  - 第4引数に積分区間の上限を書く

  - 対話的な入力を求められることがある

- $\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{1+2a\cos x+a^2} dx$ を計算する(例7.4)
この例では、対話的な入力が必要となる
integrate(cos(x)/(1+2*a*cos(x)+a^2),x,0,2*%pi);

```
(%i1) integrate(cos(x)/(1+2·a·cos(x)+a^2),x,0,2·%pi);
      Is  a − 1  positive, negative or zero?
```

この積分が収束するための条件は$0 < |a| < 1$
Maximaでこの条件を正しく設定することはできない
この例では negative と答えると偶然うまくいく

```
(%i2) integrate(cos(x)/(1+2·a·cos(x)+a^2),x,0,2·%pi);
Is  a − 1  positive, negative or zero?negative;
```

(%o2) $\frac{2 \pi a}{a^{2} - 1}$

- 正しく条件を設定しなくても、計算が偶然うまくいくことはある
- 正解を知っていれば解が正しいか否かを確認できるが、正解を知らない場合には、計算結果を妄信するのは危険
- 数式処理システムは所詮誰かが作ったプログラムで、プログラムに間違いがあれば間違った計算結果が返される

- 人間が作ったものに「完全」はあり得ないので、数式処理システムの計算結果を全面的に信用できるわけではない

複素変数の明示的な定義

- Maximaの変数は、ユーザが明示的に指定した場合を除き、実変数になっている。
- 変数の数値を指定せずにそれが複素数であることを指定するには declare(a,complex);のようにdeclare(変数名,属性);という指定をするが…
- すべての関数が複素変数に対応しているわけではないので、この指定をすることで計算がうまくいかなくなることもある

積分の評価に関する注意

- 高等学校の数学IIIや微分積分学などでは、積分を手計算で求める様々な技法を学習する
- 留数定理を使うと微分積分学の範囲では計算するのが困難な積分を簡単に計算することができる場合があるのは、すでに見た通りであるが…

- 実用的な多くの積分は手計算では求められず、数値的な近似が必要となるし…
- 手計算と同様のシンボリックな処理で積分を計算することはコンピュータの方が得意なので…
- 今日では、手計算による積分の技法を深く学ぶことには、それほど意義はない(文献を読むためにはある程度の技法は必要)

- 手計算やシンボリックな演算で求めることができない積分の計算(数値積分)は数値解析の守備範囲(数値解析は応用数学と工学の境界領域にある学問)
- Maximaにも数値積分の機能はあるが、充実していない
- 数値積分をおこないたい場合は、MATLAB、Scilab、GNU Octaveなどの数値計算ソフトウェアを使うべき

まとめ

Maximaを数学の計算に使おうと思った場合、
バージョン5.44.0では…

- 微分積分学の範囲：おおむね大丈夫
- 複素解析の範囲：おおむね大丈夫

- 工業数学II（フーリエ解析）や工業数学III（常微分方程式）の計算にもMaximaはある程度使えるが、計算結果は正確とは限らない。

- Maximaは、使い方を限定すれば、ある程度は実用になる
- 無料なので、数式処理システムを試用するには良い
- 計算結果を妄信するのは危険
- 本格的な数式処理システムが必要な学生は信頼できる有償のソフトウェアを入手した方がよい