電 210 電気数学 IV
第 14 回
留数と実積分への応用 (2)

留数に関する演習から始める.

演習 14-1

空欄を埋め, 正しいと思われるものを選択せよ.

演習 14-1 解答 (1)

$e^{iz} = e^{-y}(\boxed{\cos x + i \sin x})$, $e^{-iz} = e^{y}(\boxed{\cos x - i \sin x})$,

$\cos z = (\boxed{\dfrac{e^{y} + e^{-y}}{2}}) \cos x + i(\boxed{\dfrac{e^{-y} - e^{y}}{2}}) \sin x$,

$\cos x = \boxed{0}$ かつ $\dfrac{e^{-y} - e^{y}}{2} = \boxed{0}$,

$x = \boxed{\pi/2 + n\pi, n \in \mathbb{Z}}$, $y = \boxed{0}$

(x については違う書き方でもよい)

演習 14-1 解答 (2)

$z=\pi/2$ において $\cos z = \boxed{0}$, $z=\pi/2$ は $1/\cos z$ の特異点で $\boxed{\text{ある}}$. また, $z=\pi/2$ の十分小さい除外近傍では, $\cos z$ は零に $\boxed{\text{ならない}}$ から, $z=\pi/2$ は $1/\cos z$ の孤立特異点で $\boxed{\text{ある}}$.

演習 14-1 解答 (3)

$$\cos\left(\xi + \tfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\xi = \boxed{-\xi + \frac{1}{3!}\xi^3 - \frac{1}{5!}\xi^5 + \cdots}$$

$$\cos z =$$

$$\boxed{-(z-\pi/2) + \frac{1}{3!}(z-\pi/2)^3 - \frac{1}{5!}(z-\pi/2)^5 + \cdots}$$

(違う書き方でもよい)

演習 14-1 解答 (4)

注意: $g(z) = (1 - \frac{1}{3!}(z - \pi/2)^2 + \cdots)$ とおくと, $g(\pi/2) = 1 \neq 0$ で, $\cos z = -(z - \pi/2)g(z)$ である. $z = \pi/2$ は $\cos z$ の $\boxed{1}$ 位の零点, $z = \pi/2$ は

$1/\cos z$ の $\boxed{\boxed{1\text{位の}}\text{極}}$,

定理 7.2 が適用 $\boxed{\text{できて留数は}\boxed{-1}\text{となる}}$.

演習 14-1 解答 (5)

理由: 上記注意により, $z=\pi/2$ は $1/\cos z$ の 1 位の極だから,

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(1/\cos z, \frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{-(z-\frac{\pi}{2})g(z)} \\ &= \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-g(z)} = -1\end{aligned}$$

実積分の計算 (1) (p.260)

- 留数定理を使って実積分の計算をするときには実軸を含む単一閉曲線をうまく構成することが重要
- 特異点を避けて積分路を構成する必要がある

実積分の計算 (2) (p.260)

定理 7.3　$R(p,q)$ は 2 変数有理関数で，$R(\cos\theta, \sin\theta)$ が $0 \le \theta \le 2\pi$ で定義され，積分路 C は正の向きの単位円で，$f(z) = R(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz})\frac{1}{z}$ の C の内部の極を $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ とすると，$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = \frac{1}{i}\int_C f(z)dz = 2\pi\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}\,(f, \alpha_k)$ となる．

$R(\cos\theta, \sin\theta)$ は $R(p, q)$ に $p = \cos\theta, q = \sin\theta$ を代入したものをあらわす． $R(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz})$ も同様である．

証明　$z(\theta) = e^{i\theta}$ とすると $dz/d\theta = ie^{i\theta} = iz$,
$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z(\theta)+1/z(\theta)}{2} = \frac{z^2(\theta)+1}{2z(\theta)}$,
$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z(\theta)-1/z(\theta)}{2i} = \frac{z^2(\theta)-1}{2iz(\theta)}$ だから,
$\int_C \frac{1}{i} R(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz})\frac{1}{z}dz \quad = \quad \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$
である.　定理 7.1 により，この左辺は
$2\pi \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}\,(f, \alpha_k)$ となる.

演習 14-2

空欄を埋めよ.

演習 14-2 解答

$f(z) = \dfrac{1}{\frac{5}{3}+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}}\dfrac{1}{z} = \dfrac{2}{z^2+\frac{10}{3}z+1}$ だから

$$f(z) = \boxed{\frac{2}{(z+3)(z+1/3)}},$$

$f(z)$ の単位円内の極は $z = \boxed{-1/3}$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{5}{3}+\cos\theta}d\theta = 2\pi \mathrm{Res}\left(f, \boxed{-1/3}\right) = \boxed{3\pi/2}$$

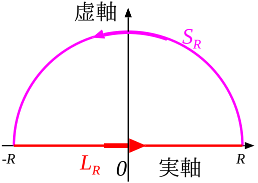
実積分の計算 (4) (p.262)

定理 7.4　$P(z)$ を m 次多項式, $Q(z)$ を実軸上に零点を持たない n 次多項式 $(n \geq m+2)$ とし, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ を $P(z)/Q(z)$ の上半平面 $(\mathrm{Im}\, z > 0)$ にある極とすると, 次式が成り立つ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x)/Q(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}\,(P/Q, \alpha_k)$$

$\dfrac{P(z)}{Q(z)} = \dfrac{a_m z^m + \cdots + a_0}{b_n z^n + \cdots + b_0}$ とする．z が実軸上を動くときには, この有理式は $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{a_m x^m + \cdots + a_0}{b_n x^n + \cdots + b_0}$ と一致する．また, 実軸に沿って左から右に向かう複素積分は, 実関数の積分と一致する．上記の定理では, これらの事実が用いられれている．

証明の概略 $f(z) = P(z)/Q(z)$ とする． $L_R = [-R, R]$ とし, $(R, 0)$ から $(-R, 0)$ に反時計回りに進む半円を S_R とする．$n \geq m + 2$ なので, R が十分大きければ, $f(z) \simeq c/z^2$ (c は適当な定数) である． $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = \lim_{R\to\infty} \int_{L_R} f(z)dz = \lim_{R\to\infty} \int_{L_R} f(z)dz + \int_{S_R} f(z)dz - \int_{S_R} f(z)dz$ であるが, R が十分大きければ, $\int_{S_R} f(z)dz$ は零に近付き, かつ L_R と S_R をつないだ閉曲線は $f(z)$ の上半平面の極をすべて含む．よって定理の主張が成り立つ．



- 厳密な証明には広義積分という概念が必要だが, この講義では取り扱わない (杉浦, 解析入門 I, 東京大学出版会, 1980 などを参照)

- 大雑把に言うと,
$\lim_{R\to\infty}\int_R^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}dx = 0,$
$\lim_{R\to\infty}\left|\int_0^\pi \frac{1}{(Re^{i\theta})^2} iRe^{i\theta}d\theta\right| \leq \lim_{R\to\infty}\frac{\pi}{R} = 0$
となることを使っている.

演習 14-3

空欄を埋め, 正しいと思う方を選択せよ.

演習 14-3 解答 (1)

$m = \boxed{0}$, $n = \boxed{4}$ である．よって，定理 7.4 の，$n \geq m + 2$ という条件は満たされ$\boxed{\text{る}}$.

$Q(z) = \boxed{(z+i)(z-i)(z+2i)(z-2i)}$, $Q(z)$ の零点は$\boxed{-i}$, $\boxed{i}$, $\boxed{-2i}$, $\boxed{2i}$ 上半平面にある零点は$\boxed{i}$, $\boxed{2i}$;

$Q(z)$ は実軸上に零点を持$\boxed{\text{たず}}$, 定理 7.4 の条件は満たされ$\boxed{\text{る}}$.

演習 14-3 解答 (2)

定理 7.2 より,

$\mathrm{Res}\,(P/Q, \boxed{i}) = \boxed{-i/6}$,

$\mathrm{Res}\,(P/Q, \boxed{2i}) = \boxed{i/12}$; $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \boxed{\pi/6}$ と

なる.

演習 14-4

空欄を埋め, 正しいと思う方を選択せよ.

演習 14-4 解答 (1)

$m = \boxed{0}$, $n = \boxed{4}$, $n \geq m + 2$ という条件は満たされ$\boxed{\text{る}}$.

$Q(z) = \boxed{(z+2i)^2(z-2i)^2}$,

$Q(z)$ の零点は $\boxed{2i}$, $\boxed{-2i}$

上半平面にある零点は $\boxed{2i}$, 極の位数は$\boxed{2}$

実軸上に零点を持$\boxed{\text{たず}}$,

定理 7.4 の条件は満たされ$\boxed{\text{る}}$

演習 14-4 解答 (2)

$\mathrm{Res}\,(P/Q, \boxed{2i}) = \boxed{-i/32}$:

$(\frac{1}{1!}\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left((z-2i)^2\frac{1}{(z-2i)^2(z+2i)^2}\right) = \lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}(z+2i)^{-2} = \lim_{z\to 2i} -2(z+2i)^{-3} = \frac{-2}{(4i)^3} = -\frac{i}{32})$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx = \boxed{\pi/16}$$ となる.

実積分の計算 (5) (p.265)

定理 7.5(1) $P(z)$ を m 次多項式, $Q(z)$ を実軸上に零点を持たない n 次多項式 $(n \geq m+1)$ とし, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ を $P(z)/Q(z)$ の上半平面 $(\mathrm{Im}\, z > 0)$ にある極とする. また, $\lambda > 0$ とする. すると, 次の 2 式が成り立つ:

実積分の計算 (6) (p.265)

定理 7.5(2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos \lambda x dx$$

$$= \mathrm{Re} \left(2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}, \alpha_k \right) \right)$$

実積分の計算 (7) (p.265)

定理 7.5(3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin \lambda x dx$$

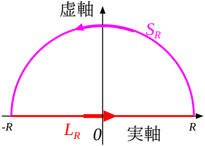
$$= \mathrm{Im} \left(2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}, \alpha_k \right) \right)$$

- 定理 7.5 の 2 個の等式は,
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}, \alpha_k\right)$$
を実部と虚部なので, この等式を示せばよい

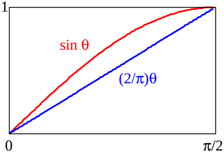
- 証明の考え方は定理 7.4 と同じ

- $e^{\lambda z}$ は正則だから極を持たず, したがって $\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}$ の極と $\frac{P(z)}{Q(z)}$ は一致することに注意する.

証明の概略 (1) $f(z) = P(z)/Q(z)e^{i\lambda z}$ とする． $L_R = [-R, R]$ とし，$(R, 0)$ から $(-R, 0)$ に反時計回りに進む半円を S_R とする． 定理 7.4 の証明と同様に，$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\int_{L_R} f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\int_{L_R} f(z)dz + \int_{S_R} f(z)dz - \int_{S_R} f(z)dz$ なので，$\lim_{R\to\infty}\int_{S_R} f(z)dz = 0$ がいえれば，定理の証明は完成する．



積分路



$\sin x \geq \frac{2}{\pi}x, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

証明の概略 (2) $\int_{S_R} f(z)dz$ を計算したい. S_R 上で $|P(z)/Q(z)| \le \varepsilon$ であるものとする. $n \ge m+1$ であるから, R を大きくすれば, ε をいくらでも小さくできる. さて, S_R は $z(\theta) = Re^{i\theta} = R(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(0 \le \theta \le \pi)$ で, S_R 上で $e^{i\lambda z} = e^{i\lambda R\cos\theta}e^{-\lambda R\sin\theta}$ だから, $\left|\int_{S_R} f(z)dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{P(z(\theta))}{Q(z(\theta))}e^{i\lambda z(\theta)}\frac{dz}{d\theta}d\theta\right| \le \varepsilon R\int_0^\pi e^{-\lambda R\sin\theta}d\theta = 2\varepsilon R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R\sin\theta}d\theta$ であるが, 前ページの図に示したように, $[0, \frac{\pi}{2}]$ において $\sin\theta \ge \frac{2}{\pi}\theta$ だから, $2\varepsilon R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R\sin\theta}d\theta \le 2\varepsilon R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\lambda R}{\pi}\theta}d\theta \le \frac{\varepsilon\pi}{\lambda}$ となる. ε は R を大きくすればいくらでも小さくできるから, $\lim_{R\to\infty}\int_{S_R} f(z)dz$ となり, 定理は証明された.

演習 14-5

空欄を埋め, 正しいと思う方を選択せよ.

演習 14-5 解答 (1)

$m = \boxed{1}$, $n = \boxed{2}$, $n \geq m+1$ は満たされ $\boxed{\text{る}}$.

$Q(z) = \boxed{(z+2i)(z-2i)}$, $Q(z)$ の零点は $\boxed{2i}$, $\boxed{-2i}$

上半平面にある零点は $\boxed{2i}$, 極の位数は $\boxed{1}$

$Q(z)$ は実軸上に零点を持 $\boxed{\text{たず}}$

定理 7.4 の条件は満たされ $\boxed{\text{る}}$

演習 14-5 解答 (2)

$$\mathrm{Res}\left((P(z)/Q(z))e^{i\frac{z}{2}}, \boxed{2i}\right) = \boxed{1/(2e)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (P(x)/Q(x))e^{i\frac{x}{2}}dx = \boxed{\pi i/e}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (P(x)/Q(x))\cos\frac{x}{2}dx = \boxed{0}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (P(x)/Q(x))\sin\frac{x}{2}dx = \boxed{\pi/e}$$

演習 14-5 解答 (3)

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\left((P(z)/Q(z))e^{i\frac{z}{2}}, 2i\right) &= \lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{z}{(z+2i)(z-2i)}e^{i\frac{z}{2}} \\ &= \lim_{z\to 2i}\frac{z}{z+2i}e^{i\frac{z}{2}} = \frac{1}{2}e^{-1}\end{aligned}$$

$\frac{x}{x^2+4}\cos\frac{x}{2}$ は奇関数だから，実は $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+4}\cos\frac{x}{2} = 0$ の方は計算しなくてもわかる．

実積分の計算 (8) (p.268)

定理 7.6(1) $P(z)$ を m 次多項式, $Q(z)$ を実軸上に零点を持たない n 次多項式 $(n \geq m)$ とし, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ を $P(z)/Q(z)$ の上半平面 $(\mathrm{Im}\, z > 0)$ にある極とする. また, $\lambda > 0$ かつ $P(0) \neq 0$ とする. このとき, 次式が成り立つ.

実積分の計算 (9) (p.268)

定理 7.6(2)

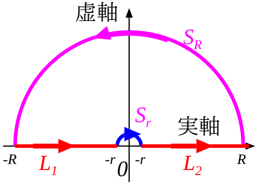
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \frac{P(0)}{Q(0)} \pi + \mathrm{Im} \left(2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}, \alpha_k \right) \right)$$

定理 7.6 の積分は, 厳密に言うと,

$$\lim_{R\to\infty, r\to 0} \int_r^R \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{\sin \lambda x}{x} dx + \int_{-R}^{-r} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{\sin \lambda x}{x} dx$$

である. この積分も広義積分で, 収束性に関する議論が必要だが, この講義では取り扱わない.

証明の概略 (1) $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}\frac{e^{i\lambda z}}{z}$ とする. $r<R$, $L_1=[-R,-r]$, $L_2=[r,R]$ とし, $(R,0)$ から $(-R,0)$ に反時計回りに進む半円を S_R, $(-r,0)$ から $(r,0)$ に時計回りに進む半円を S_r とする. R が十分大きく, r が十分小さければ,



$\int_{L_1+S_r+L_2+S_R} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Res}\left(f(z),\alpha_k\right)$ だから, $\lim_{R\to\infty}\int_{S_R} f(z)dz=0$ と $\lim_{r\to 0}\int_{S_r} f(z)dz=-\frac{P(0)}{Q(0)}\pi i$ がいえればよい. 前者は定理 7.5 の証明ですでに示されているので, 後者を示す.

証明の概略 (2) $(P(z)/Q(z))e^{i\lambda z}$ は $z=0$ で正則なので, $z=0$ のある近傍でテイラー展開して定数項と 1 次以上の項を分けると, $(P(z)/Q(z))e^{i\lambda z} = P(0)/Q(0) + z\varphi(z)$ と書け, $\varphi(z)$ は正則である. そこで, $f(z) = \frac{P(0)}{Q(0)}\frac{1}{z} + \varphi(z)$ となる. 十分小さい r に対し, $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ における $|\varphi(z)|$ の最大値を M とする. すると, S_r は $z(\theta) = re^{i(\pi-\theta)}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ と書けるので, $\left|\int_{S_r} \varphi(z)dz\right| = \left|\int_0^\pi \varphi(z(\theta))z'(\theta)d\theta\right| \leq Mr\pi$ であり, $r \to 0$ とすればこの項は零である. 次に, $\int_{S_r} \frac{P(0)}{Q(0)}\frac{1}{z}dz = \int_0^\pi \frac{P(0)}{Q(0)}\frac{1}{re^{i(\pi-\theta)}}(-i)re^{(\pi-i\theta)}d\theta = -\frac{P(0)}{Q(0)}\pi i$ となる. よって, $\int_{L_1+L_2} f(z)dz - (P(0)/Q(0))\pi i = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}\,(f(z), \alpha_k)$ となり, この虚部を取ることにより定理の等式が得られる.

- 定理 7.6 のタイプの積分で, 実用上よく出て来るのは, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ (例 7.7)

- 定理 7.6 にあてはめると, $P(z) = 1$, $Q(z) = 1$ だから, $P(z)$ と $Q(z)$ はともに零次で, よって零点を持たず, $\frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\lambda z}}{z}$ は上半平面に極を持たないから留数の項は省略でき, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$ となる.

コーシーの主値

- コーシーの主値について教科書の記述 (p.274) は正確ではないので訂正しておく
- 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ の定義は,

$$\lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} \int_a^b f(x)dx \qquad (\heartsuit)$$

- 広義積分の定義では, a の $-\infty$ への近付き方と b の ∞ への近付き方は独立

- ($\heartsuit$) に関連して, 次の形の積分を考える:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx \qquad (\spadesuit)$$

- $(\heartsuit)$ が存在するときには $(\spadesuit)$ も存在し，これらの値は一致することが証明できる．
- $(\spadesuit)$ を $(\heartsuit)$ に対するコーシーの主値という
- $(\spadesuit)$ が存在しても，$(\heartsuit)$ が存在するとは限らない．

広義積分	そのコーシーの主値
$\displaystyle\lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} \int_a^b f(x)dx$	$\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^R f(x)dx$

同じものではないので注意すること

同様に, $c \in \mathbb{R}$ に対し, $\displaystyle\lim_{a\to c-0}\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ と

$\displaystyle\lim_{b\to c+0}\int_{b}^{\infty} f(x)dx$ がともに存在するとき,

$\displaystyle\lim_{r\to 0}\left(\int_{-\infty}^{c-r} f(x)dx + \int_{c+r}^{\infty} f(x)ds\right)$ のことも上記の広義積分のコーシーの主値と呼ぶことがある

- $a \to c-0$: a が c に左から近付く
- $b \to c+0$: b が c に右から近付く