工業数学 IV 第 14 回
複素解析の実積分・微分方程式への応用

留数計算の公式 (復習)

- 点 α が $f(z)$ の 1 位の極のとき,

$$\mathrm{Res}\,(f,\alpha) = \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z).$$

- 点 α が $f(z)$ の k 位の極のとき,

$$\mathrm{Res}\,(f,\alpha) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to\alpha}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}((z-\alpha)^k f(z)).$$

- 上記は前回に定理 7.2 として述べたもの.
- 留数はローラン展開できる関数に対してつねに意味を持つが, 応用上は「極に関する留数の計算」が頻出する. 上述の公式はこのような場合に有用.
- 一般の場合に定義に戻って留数を計算するのはかなり大変.

実積分の計算 (1) (p.260)

- 留数定理を使って実積分の計算をするときには実軸を含む単一閉曲線をうまく構成することが重要
- 特異点を避けて積分路を構成する必要がある

実積分の計算 (2) (p.260)

定理 7.3(1) $R(p,q)$ は 2 変数有理関数で, $R(\cos\theta, \sin\theta)$ が $0 \leq \theta \leq 2\pi$ で 定義され, 積分路 C は正の向きの単位円とする.
$f(z) = R\left(\dfrac{z^2+1}{2z}, \dfrac{z^2-1}{2iz}\right)\dfrac{1}{z}$ とする. $f(z)$ は単位円周に極を持たないと仮定する.

定理 7.3(2) $f(z)$ の C の内部の極を $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ とすると,

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = \frac{1}{i}\int_C f(z)dz$$
$$= 2\pi \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}\,(f, \alpha_k)$$

- $R(\cos\theta, \sin\theta)$ は $R(p,q)$ に

$$p = \cos\theta, \quad q = \sin\theta$$

  を代入したもの

- $R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)$ は $R(p,q)$ に

$$p = \frac{z^2+1}{2z}, \quad q = \frac{z^2-1}{2iz}$$

を代入したもの

(証明)

- $z(\theta) = e^{i\theta}$ とすると
  - ▷ $dz/d\theta = ie^{i\theta} = iz$
  - ▷ $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \dfrac{z(\theta) + 1/z(\theta)}{2} = \dfrac{z^2(\theta) + 1}{2z(\theta)}$,
  - ▷ $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z(\theta) - 1/z(\theta)}{2i} = \frac{z^2(\theta) - 1}{2iz(\theta)}$
- よって

$$\int_C \frac{1}{i} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right) \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$$

- 定理 7.1 により, この左辺は $2\pi \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}\,(f, \alpha_k)$ となる.

計算例

- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin\theta}d\theta$ を計算する
- 定理 7.3 の記法を用いると，$R(p,q) = \dfrac{1}{2+q}$.
  $R(\cos\theta, \sin\theta)$ は $0 \leq \theta \leq 2\pi$ で定義される.
- 定理 7.3 の後に述べた通り，q に $\dfrac{z^2-1}{2iz}$ を代入する.

- $f(z) = \dfrac{1}{2 + \frac{z^2-1}{2iz}} \dfrac{1}{z} = \dfrac{2i}{z^2 + 4iz - 1}.$
- $f(z)$ の分母の零点は2次方程式の解の公式により計算でき, $(-2\pm\sqrt{3})i$ となる. この2個の零点のうち, 単位円内にあるのは $(-2+\sqrt{3})i$.
- 単位円周上には極はないので, 定理 7.3 が適用できる.

- $f(z) = (z - (-2 + \sqrt{3})i)(z - (-2 - \sqrt{3})i)$ と書けることに注意.

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Res}\left(f, (-2+\sqrt{3})i\right) \\
&= \lim_{z \to (-2+\sqrt{3})i} (z-(-2+\sqrt{3})i)\frac{2i}{(z-(-2+\sqrt{3})i)(z-(-2-\sqrt{3})i)} \\
&\qquad\qquad = \lim_{z \to (-2+\sqrt{3})i} \frac{2i}{(z-(-2-\sqrt{3})i)} = \frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

- よって, 定理 7.3 により,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin\theta} d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

- 三角関数の有理式を積分するときは, 定理 7.3 はしばしば有用.
- 実数値関数の積分なのだから, 積分の結果が実数になることは計算するまでもなくわかる.
- 被積分関数が非負だから, 積分の結果が正であることも計算するまでもなくわかる.

- 一般に, 計算した結果が計算するまでもなくわかる事実と異なる場合, 計算がどこか間違っている.
- 計算結果の妥当性を検証する習慣を付けると, 計算ミスを減らせる.

実積分の計算 (4) (p.262)

定理 7.4 $P(z)$ を m 次多項式, $Q(z)$ を実軸上に零点を持たない n 次多項式 $(n \geq m+2)$ とし, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ を $P(z)/Q(z)$ の上半平面 $(\mathrm{Im}\, z > 0)$ にある極とすると, 次式が成り立つ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x)/Q(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}\,(P/Q, \alpha_k)$$

- $\dfrac{P(z)}{Q(z)} = \dfrac{a_m z^m + \cdots + a_0}{b_n z^n + \cdots + b_0}$ とする
- z が実軸上を動くときには, この有理式は,

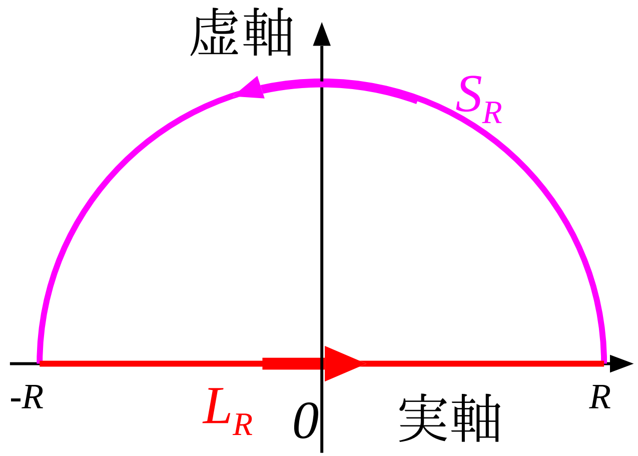
  $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_m x^m + \cdots + a_0}{b_n x^n + \cdots + b_0}$$

  と一致
- よって, 実軸に沿って左から右に向かう $P(z)/Q(z)$ の複素積分は, 実関数の積分と一致する.

上記の定理では, これらの事実が用いられている.

証明の概略 $f(z) = P(z)/Q(z)$ とする． $L_R = [-R, R]$ とし，$(R, 0)$ から $(-R, 0)$ に反時計回りに進む半円を S_R とする．

$n \geq m+2$ なので, R が十分大きければ, $f(z) \simeq c/z^2$ (c は適当な定数) である. $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\int_{L_R} f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\int_{L_R} f(z)dz + \int_{S_R} f(z)dz - \int_{S_R} f(z)dz$ であるが, R が十分大きければ，$\int_{S_R} f(z)dz$ は零に近付き，かつ L_R と S_R をつないだ閉曲線は $f(z)$ の上半平面の極をすべて含む．よって定理の主張が成り立つ．



- 厳密な証明には広義積分という概念が必要だが, この講義では取り扱わない (杉浦, 解析入門 I, 東京大学出版会, 1980 などを参照)
- 大雑把に言うと,
$\lim_{R\to\infty}\int_R^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}dx = 0$,
$\lim_{R\to\infty}\left|\int_0^\pi \frac{1}{(Re^{i\theta})^2} iRe^{i\theta}d\theta\right| \le \lim_{R\to\infty}\frac{\pi}{R} = 0$
となることを使っている.

計算例 (1)

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$ を計算する
- $f(z) = 1/(1+z^2)$ の分子は 0 次多項式, 分母は 2 次多項式で, 分母の零点は $\pm i$ だから実軸上にない. よって定理 7.4 を適用できる.
- $f(z) = 1/(1+z^2)$ の上半平面にある極は i で, 極の位数は 1 である.

- 講義冒頭で述べた留数計算の公式を使うと,

$$\mathrm{Res}\,(f, i) = \lim_{z \to i}(z-i)\frac{1}{z^2+1} = \lim_{z-i}\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}$$

- よって, 定理 7.4 により,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = 2\pi i\,\mathrm{Res}\,(f, i) = \pi.$$

§(別解) 微分積分学の範囲での計算法

- $x = \tan \dfrac{\theta}{2}$ と変数変換する.
- $\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(\cos\frac{\theta}{2})^2}$ である.
- 変数変換により, 積分の範囲は $-\pi < \theta < \pi$ に変わる.
- 被積分関数に変数変換を適用すると, $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1+(\tan\frac{\theta}{2})^2} = (\cos\dfrac{1}{2})^2$.
- 以上により,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\left(\cos\frac{\theta}{2} \right)^2 \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2} \right) d\theta = \pi$$

- 微分積分の範囲での計算では変数変換に発見的なアイデアが必要になる．この意味で機械的に計算がおこなえる留数定理の応用の方が優れている．
- 注意: 定理を使うときには，その定理が成り立つための条件が満たされていることを確認する習慣をつけること．

計算例 (2)

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+3x^2+3x^4+x^6}dx$ を計算する
- $f(z) = \dfrac{1}{(1+3z^2+3z^4+z^6)} = \dfrac{1}{(1+z^2)^3} = \dfrac{1}{(z+i)^3(z-i)^3}$

  分母は 6 次多項式で, 分母の零点は $\pm i$ だから実軸上にない. よって定理 7.4 を適用できる.

- $f(z) = 1/(1+z^2)^3$ の上半平面にある極は i で, 極の位数は 3 である.
- 講義冒頭で述べた留数計算の公式を使うと,

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, i) &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}(z-i)^3\frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z-i}\frac{d^2}{dz^2}(z+i)^{-3} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z-i}12(z+i)^{-5} = \frac{3}{16}\frac{1}{i}.\end{aligned}$$

- $f(z) = 1/(1+z^2)^3$ の上半平面にある極は i で, 極の位数は 3 である.
- よって, 定理 7.4 により,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+3x^2+3x^4+x^6}dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i)$$
$$= 2\pi i \frac{3}{16}\frac{1}{i} = \frac{3\pi}{8}.$$

- 計算例 (2) の積分を微分積分学の範囲で評価するのは困難．留数定理を応用すれば機械的にできる．

実積分の計算 (5) (p.265)

定理 7.5(1) $P(z)$ を m 次多項式, $Q(z)$ を実軸上に零点を持たない n 次多項式 $(n \geq m+1)$ とし, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ を $P(z)/Q(z)$ の上半平面 $(\mathrm{Im}\, z > 0)$ にある極とする．また, $\lambda > 0$ とする．すると, 次の 2 式が成り立つ:

実積分の計算 (6) (p.265)

定理 7.5(2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos \lambda x dx$$

$$= \mathrm{Re} \left(2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}, \alpha_k \right) \right)$$

実積分の計算 (7) (p.265)

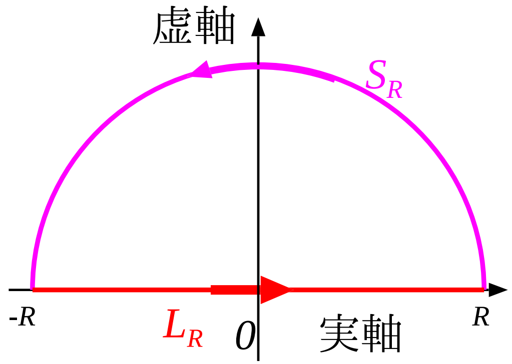
定理 7.5(3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin \lambda x dx$$

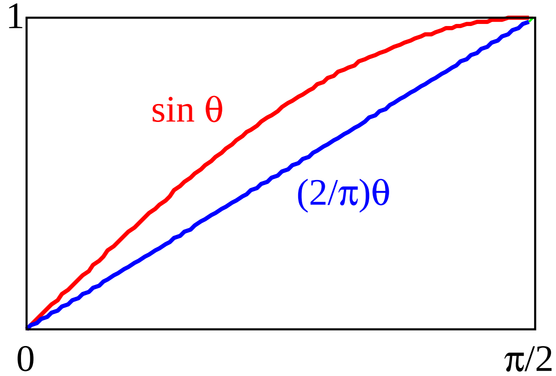
$$= \mathrm{Im} \left(2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}, \alpha_k \right) \right)$$

- 定理 7.5 の 2 個の等式は,
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{i\lambda x}dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}e^{i\lambda z}, \alpha_k\right)$$
を実部と虚部なので, この等式を示せばよい.
- 証明の考え方は定理 7.4 と同じ. 厳密には広義積分が必要になることも同じである.
- $e^{\lambda z}$ は正則だから極を持たず, したがって $\frac{P(z)}{Q(z)}e^{i\lambda z}$ の極と $\frac{P(z)}{Q(z)}$ は一致することに注意する.

証明の概略 (1) $f(z) = P(z)/Q(z)e^{i\lambda z}$ とする. $L_R = [-R, R]$ とし, $(R, 0)$ から $(-R, 0)$ に反時計回りに進む半円を S_R とする. 定理 7.4 の証明と同様に, $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\int_{L_R} f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\int_{L_R} f(z)dz + \int_{S_R} f(z)dz - \int_{S_R} f(z)dz$ なので, $\lim_{R\to\infty}\int_{S_R} f(z)dz = 0$ がいえれば, 定理の証明は完成する.



積分路



$\sin x \geq \frac{2}{\pi}x, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

証明の概略 (2) $\int_{S_R} f(z)dz$ を計算したい. S_R 上で $|P(z)/Q(z)| \leq \varepsilon$ であるものとする. $n \geq m+1$ であるから, R を大きくすれば, ε をいくらでも小さくできる. さて, S_R は $z(\theta) = Re^{i\theta} = R(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ で, S_R 上で $e^{i\lambda z} = e^{i\lambda R\cos\theta} e^{-\lambda R\sin\theta}$ だから, $\left|\int_{S_R} f(z)dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{P(z(\theta))}{Q(z(\theta))} e^{i\lambda z(\theta)} \frac{dz}{d\theta} d\theta\right| \leq \varepsilon R \int_0^\pi e^{-\lambda R\sin\theta} d\theta = 2\varepsilon R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R\sin\theta} d\theta$ であるが, 前ページの図に示したように, $[0, \frac{\pi}{2}]$ において $\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$ だから, $2\varepsilon R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R\sin\theta} d\theta \leq 2\varepsilon R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\lambda R}{\pi}\theta} d\theta \leq \frac{\varepsilon\pi}{\lambda}$ となる. ε は R を大きくすればいくらでも小さくできるから, $\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} f(z)dz = 0$ となり, 定理は証明された.

- 定理 7.5 の形の積分は, 有理関数をフーリエ変換するときに出て来ることがある.

計算例

- 定理 7.5 を使って $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ をフーリエ変換する.
- 定理 7.5 の $\lambda > 0$ という条件に注意.

- $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ とすると，$f(z)$ の分母の零点は $z = \pm i$ で, これらは虚軸上にない．また, 分母の次数は 2, 分子の次数は 0 である．よって, 定理 7.5 を適用できる.
- 負の周波数の部分の計算については後で述べることとし, 当面は正の周波数部分についてフーリエ変換を計算する.

- 歴史的経緯から, フーリエ変換には何通りかよく使われる定義がある.
- 教科書では (298 ページ)⋯

$$\text{フーリエ変換: } F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

$$\text{逆フーリエ変換: } f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

- 色々な資料を見ると…
  - ▷ フーリエ変換の方に $e^{i\omega x}$, 逆フーリエ変換の方に $e^{i\omega x}$ が使われていたり
  - ▷ 角周波数 ω の変わりに周波数 $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$ が使われていたり…
  - ▷ 逆フーリエ変換の方に $\dfrac{1}{2\pi}$ が付いていたり…
  - ▷ フーリエ変換と逆フーリエ変換に均等に $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ が付いていたり…
- 定義が統一されてらず, 混乱しやすい.
- この講義では便宜上教科書の定義にしたがう.

- 定理 7.5 の変数 λ を ω に変更する
- $e^{-i\omega x} = \cos\omega x - i\sin\omega x$ だから$\cdots$
- $\dfrac{1}{1+x^2}$ のフーリエ変換の実部は
$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\cos\omega x dx$ (ただし $\omega > 0$)
- 定理 7.5 の形にすると, $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{1}{1+x^2}$

- $\dfrac{P(z)}{Q(z)} = \dfrac{1}{1+z^2}$ の上半平面の極は $z = i$ の 1 個のみで, その位数は 1
- $e^{i\omega z}$ は正則だから特異点なし

$$\mathrm{Res}\ (\frac{P(z)}{Q(z)}e^{i\omega z}, i) = \mathrm{Res}\ \frac{1}{1+z^2}e^{i\omega z}, i)$$

$$= \lim_{z\to i}(z+i)\frac{e^{i\omega z}}{(z+i)(z-i)} = \lim_{z\to i}\frac{e^{i\omega z}}{z+i} = \frac{e^{-\omega}}{2i}$$

- したがって,
$$\mathrm{Re}\left(2\pi i\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}e^{i\omega z},\alpha_k\right)\right)=\pi e^{-\omega}$$
- 上記が $\omega > 0$ における $\dfrac{1}{1+x^2}$ のフーリエ変換の実部になる

- $\omega < 0$ のときは, $\omega' = -\omega$ とすると, 先ほどの計算結果が使える.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\cos(-\omega' x)dx \\
&\quad = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\cos(\omega' x)dx = \pi e^{-\omega'} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \pi e^{-|\omega|}
\end{aligned}$$

($\omega < 0$ だから $\omega' = |\omega|$ であることに注意).

- $\omega = 0$ のときは, 定理 7.4 の後に述べた計算例 (1) により, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$

- $\omega > 0$, $\omega < 0$, $\omega = 0$ の結果をまとめて,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \cos \omega x dx = \pi e^{-|\omega|}.$$

- $\dfrac{1}{1+x^2}$ のフーリエ変換の虚部, すなわち $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \sin \omega x$ も同様に計算できるが…
- 定理 7.4 が厳密には広義積分の収束を前提としており, 後に述べるように広義積分が収束するときにはこれをコーシーの主値積分によって計算できることを使うと…

- $\displaystyle\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}\sin\omega x$ の被積分関数は奇関数だから，これを積分すれば零になることがわかる．
- したがって，$\dfrac{1}{1+x^2}$ のフーリエ変換の虚部は零．

- 以上をまとめると,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-i\omega x} dx = \pi e^{-|\omega|}.$$

これが $\dfrac{1}{1+x^2}$ のフーリエ変換である.

実積分の計算 (8) (p.268)

定理 7.6(1) $P(z)$ を m 次多項式, $Q(z)$ を実軸上に零点を持たない n 次多項式 $(n \geq m)$ とし, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ を $P(z)/Q(z)$ の上半平面 $(\mathrm{Im}\, z > 0)$ にある極とする．また, $\lambda > 0$ かつ $P(0) \neq 0$ とする．このとき, 次式が成り立つ.

実積分の計算 (9) (p.268)

定理 7.6(2)

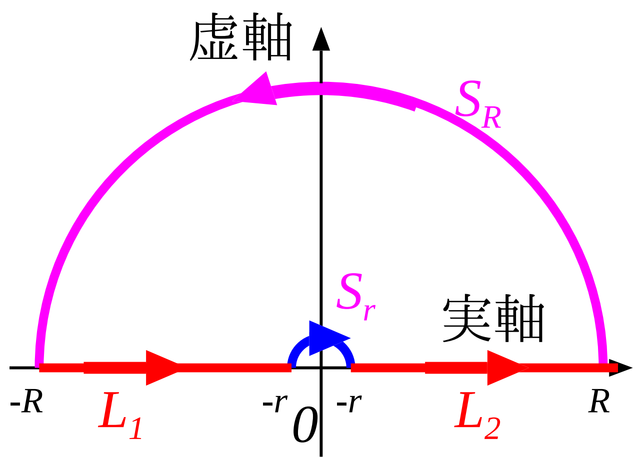
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \frac{P(0)}{Q(0)}\pi + \mathrm{Im}\left(2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}, \alpha_k\right)\right)$$

- 定理 7.6 の積分は, 厳密に言うと,

$$\lim_{R\to\infty, r\to 0}\int_r^R \frac{P(x)}{Q(x)}\frac{\sin\lambda x}{x}dx+\int_{-R}^{-r}\frac{P(x)}{Q(x)}\frac{\sin\lambda x}{x}dx$$

である. この積分も広義積分で, 収束性に関する議論が必要だが, この講義では取り扱わない.

証明の概略 (1) $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}\frac{e^{i\lambda z}}{z}$ とする． $r < R$, $L_1 = [-R,-r]$, $L_2 = [r,R]$ とし，$(R,0)$ から $(-R,0)$ に反時計回りに進む半円を S_R，$(-r,0)$ から $(r,0)$ に時計回りに進む半円を S_r とする． R が十分大きく，r が十分小さければ，$\int_{L_1+S_r+L_2+S_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}\,(f(z),\alpha_k)$ だから，$\lim_{R\to\infty}\int_{S_R} f(z)dz = 0$ と $\lim_{r\to 0}\int_{S_r} f(z)dz = -\frac{P(0)}{Q(0)}\pi i$ がいえればよい．前者は定理 7.5 の証明ですでに示されているので，後者を示す．



証明の概略 (2)　$(P(z)/Q(z))e^{i\lambda z}$ は $z=0$ で正則なので，$z=0$ のある近傍でテイラー展開して定数項と 1 次以上の項を分けると，$(P(z)/Q(z))e^{i\lambda z} = P(0)/Q(0) + z\varphi(z)$ と書け，$\varphi(z)$ は正則である．そこで，$f(z) = \frac{P(0)}{Q(0)}\frac{1}{z} + \varphi(z)$ となる．十分小さい r に対し，$\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ における $|\varphi(z)|$ の最大値を M とする．すると，S_r は $z(\theta) = re^{i(\pi-\theta)}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ と書けるので，$\left|\int_{S_r} \varphi(z)dz\right| = \left|\int_0^\pi \varphi(z(\theta))z'(\theta)d\theta\right| \leq Mr\pi$ であり，$r \to 0$ とすればこの項は零である．　次に，$\int_{S_r} \frac{P(0)}{Q(0)}\frac{1}{z}dz = \int_0^\pi \frac{P(0)}{Q(0)}\frac{1}{re^{i(\pi-\theta)}}(-i)re^{(\pi-i\theta)}d\theta = -\frac{P(0)}{Q(0)}\pi i$ となる．　よって，$\int_{L_1+L_2} f(z)dz - (P(0)/Q(0))\pi i = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}\,(f(z), \alpha_k)$ となり，この虚部を取ることにより定理の等式が得られる．

- 定理 7.6 のタイプの積分では, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ (例 7.7(教科書 269 ページ)) が 実用上よく出て来る．この計算以外でこの定理を使う機会はあまりないと思われる.
- 次ページ以降で, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ をこの定理を使って計算する例を示す.

- 定理 7.6 にあてはめると, $P(z) \equiv 1$, $Q(z) \equiv 1$ だから, 定理 7.6 が適用できる. $\dfrac{P(z)}{Q(z)}\dfrac{e^{i\lambda z}}{z}$ は上半平面に極を持たないから留数の項は省略でき, $\dfrac{P(z)}{Q(z)}\pi = \pi$ だから,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

となる.

- ここまで, 複素解析を使って実積分を評価する手法について述べてきた.
- これらの手法は有用ではあるが…
- 一方で, **応用であらわれる積分の多くは解析的な手段では評価できない**ということにも注意すべきである.

- 応用上は, 解析的な手段で積分を求めることのかわりに, コンピュータを用いた積分の数値的な近似 (数値積分と呼ぶ) を使う必要があることも多い. 数値積分は数値解析と呼ばれる分野で取り扱われる.

- 解析的な手段で積分が遂行できる場合にも, どの方法が使えるかという選択には, 発見的な発想が必要になることも多い.
- 数式処理システム (Mathematica, Maple, Maxima など) は, 解析的な手法で求められる積分の多くを評価することができる.

- 学習上は, 解析的な積分の技法にある程度習熟することは必要ではあるが (積分の技法がわからないと関連する書籍や文献が読めない), 応用で積分の評価が必要なときには数式処理システムに頼るのも一案.

コーシーの主値

- コーシーの主値について教科書の記述 (p.274) はやや不十分なので定義を述べる
- 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ の定義は,

$$\lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} \int_a^b f(x)dx \qquad (\heartsuit)$$

- 広義積分の定義では, a の $-\infty$ への近付き方と b の ∞ への近付き方は独立
- (♡) に関連して, 次の形の積分を考える:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx \qquad (\spadesuit)$$

- (♠) を (♡) に対するコーシーの主値という

- 広義積分が存在するときにはコーシーの主値も存在し, これらの値は一致する
- コーシーの主値が存在しても, 広義積分が存在するとは限らない.

広義積分	そのコーシーの主値
$\displaystyle\lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} \int_a^b f(x)dx$	$\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$

同じものではないので注意すること

- 次に, 以下の 2 個の広義積分を考える:

$$\lim_{a \to c-0} \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

$$\lim_{b \to c+0} \int_{b}^{\infty} f(x)dx$$

ただし $c \in \mathbb{R}$

- 記号の意味は $\cdots$
    - ▷ $a \to c - 0$: a が c に左から近付く
    - ▷ $b \to c + 0$: b が c に右から近付く

- 以下の積分:

$$\lim_{r\to 0}\left(\int_{-\infty}^{c-r} f(x)dx + \int_{c+r}^{\infty} f(x)ds\right)$$

を, 先ほどの (2 個の) 広義積分のコーシーの主値と呼ぶことがある

ラプラス変換

- ラプラス変換は工業数学 II や回路理論などで既習の筈であるが…
- 複素解析との関係で述べることがあるので,このこの講義でも簡単に述べる

- z 変換に片側 z 変換と両側 z 変換の 2 種類があったように, ラプラス変換にも片側ラプラス変換と両側ラプラス変換の 2 種類がある.
- ラプラス変換を取り扱うときには, 独立変数として時間が想定されることが多い. このため, 習慣的に, 独立変数として t がよく用いられる. この講義でもこの習慣に従う.

片側ラプラス変換の定義

- s を複素数とし, $f(t)$ は $t<0$ で恒等的に零となる実数値関数とする．このとき, $f(t)$ の**片側ラプラス変換**は, 次式で定義される．

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

両側ラプラス変換の定義

- s を複素数とし, $f(t)$ は実数値関数とする. このとき, $f(t)$ の両側ラプラス変換は, 次式で定義される.

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

- 比較すると…

片側ラプラス変換	両側ラプラス変換
$\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$	$\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-st}dt$

- 片側 z 変換がリアルタイム信号処理, 両側 z 変換が非リアルタイムを含む一般の信号処理で用いられるのと同様に…
- 片側ラプラス変換がリアルタイム信号処理を対象とするのに対し, 両側ラプラス変換は一般の信号処理を対象とするが…
- 両側ラプラス変換は応用ではあまり用いられない (記述がない教科書も多い).

- 以下の議論でも, 応用でよく用いられる片側ラプラス変換についてのみ述べるが…
- 片側ラプラス変換では, $t < 0$ で恒等的に零となる信号 (因果的な信号という言葉が使われることもある) のみを対象としていることを忘れないように. 以下ではこれを仮定する.
- 応用上, 因果性は重要な性質であるが, この講義では深入りしない).

- 両側ラプラス変換において $f(t)$ に $t < 0$ で恒等的に零という条件を付けると片側ラプラス変換になるので, 実はこの 2 者は別物というわけではない.

ラプラス変換と微分方程式

- ラプラス変換が線形定係数微分方程式の求解にどのように用いられるかについて述べる.
- 信号 $x(t)$ を, その任意の導関数の絶対値が十分大きな t で指数関数によって上から押さえられる信号とする. 信号 $x(t)$ がこの条件を満たせば, s の実部が十分大きい領域で, $x(t)$ の任意の導関数のラプラス変換が定義できる.

- 上述の条件を満たす信号 $x(t)$ のラプラス変換を $X(s)$ とし $\dfrac{dx}{dt}$ をラプラス変換すると,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{dt}e^{-st} = x(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$
$$= -x(0_+) + sX(s).$$

- $x(0_+)$ は t を正の範囲で零に近付けたときの $x(t)$ の極限.

- 上記の計算では, 信号 $x(t)$ の任意の導関数の絶対値が十分大きな t で指数関数によって上から押さえられることと, s の実部が十分大きいことを使っている.

$$x(t)e^{-st}\Big|_0^\infty = \lim_{R\to\infty} x(R)e^{-sR} - \lim_{r\to 0, r\geq 0} x(r)e^{-sr}$$

であるが, $x(t)$ が上述の条件を満たすときには, $\lim_{R\to\infty} x(R)e^{-sR} = 0$ で,
$\lim_{r\to 0, r\geq 0} x(r)e^{-sr} = x(0_+)$ である.

- 帰納的に，上述の条件を満たす信号 $x(t)$ に対して，$\dfrac{d^n}{dt^n}x(t)$ のラプラス変換が，

$$s^n X(s) - \sum_{m=1}^{n} s^{n-m} x^{(m-1)}(0_+)$$

となることが示せる．

- $x^{(m)}(0_+)$ は $\dfrac{d^m}{dt^m}x(t)$ の t を正の範囲で零に近付けたときの極限．

- 上記を確認しておく.
    - ▷ $n=1$ の場合はすでに示されている.
    - ▷ $n=k$ まで主張が正しいと仮定し, $n=k+1$ について主張を示す.

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{d^{k+1}x}{dt^{k+1}} e^{-st} &= \left.\frac{d^k x}{dt^k} e^{-st}\right|_0^\infty + s\int_0^\infty \frac{d^k x}{dt^k} e^{-st} ds \\
&= -x^{(k)}(0_+) + s\left(s^k X(s) - \sum_{m=1}^{k} s^{k-m} x^{(m-1)}(0_+)\right) \\
&= s^{k+1}X(s) - \sum_{m=1}^{k+1} s^{(k+1)-m} x^{(m-1)}(0_+)
\end{aligned}
$$

- 上記の計算でも, 信号 $x(t)$ の任意の導関数の絶対値が十分大きな t で指数関数によって上から押さえられることと, s の実部が十分大きいことを使っている.

$$\left.\frac{d^k x}{dt^k} e^{-st}\right|_0^\infty = \lim_{R\to\infty} x^{(k)}(R)e^{-sR} - \lim_{r\to 0, r\geq 0} x^{(k)}(r)e^{-sr}$$

であるが, $x(t)$ が上述の条件を満たすときには,

$$\lim_{R\to\infty} x^{(k)}(R)e^{-sR} = 0, \lim_{r\to 0, r\geq 0} x^{(k)}(r)e^{-sr} = x^{(k)}(0+)$$

- 以上を使って線形定数係数微分方程式全体をラプラス変換することを考える.
- まず, 強制項がない場合を考える.

- 微分方程式

$$y^{(k)} + a_1 y^{(k-1)} + \cdots + a_{k-1} y = 0$$

は, $y(t)$ のラプラス変換を $Y(s)$ とし, $N(s)$ を y とその導関数の初期値に関する s の多項式とすると,

$$\left(s^k + a_1 s^{k-1} + \cdots + a_{k-1}\right) Y(s) = N(s)$$

となる.

- 多項式 $N(s)$ の形は明示しなかったが, $\dfrac{d^n}{dt^n}y(t)$ のラプラス変換が

$$s^n Y(s) - \sum_{m=1}^{n} s^{n-m} y^{(m-1)}(0_+)$$

となることを使うと, 上記の微分方程式の係数から $N(s)$ を定めることができる.

- $N(s)$ の s に関する最高次の項は $y^{(k)}$ のラプラス変換から発生し, $\dfrac{d^k}{dt^k}y(t)$ のラプラス変換は

$$s^k Y(k) - \sum_{m=1}^{k} s^{k-m} y^{(k-1)}(0_+)$$

だから, $N(s)$ は s の $k-1$ 次以下の多項式である.

- $D(s) = s^k + a_1 s^{k-1} + \cdots + a_{k-1}$ とする.
- $Y(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)}$ であるが, 代数学の基本定理を使うと, $D(s)$ は 1 次の多項式の積 (重複を含む) で書き下せることがわかる.

- $D(s) = (s-\alpha_1)(s-\alpha_2)\cdots(s-\alpha_k)$ となっているときには, 後で述べる部分分数展開を使うと ($N(s)$ の次数が $D(s)$ の次数未満であることにも注意), 定数 $C_1, \ldots, C_k$ をうまく定めれば,

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{C_1}{s-\alpha_1} + \cdots \frac{C_k}{s-\alpha_k}$$

のように書き直せることがわかる.

- $\dfrac{1}{s-\alpha}$ は $e^{\alpha t}$ のラプラス変換なので，上記から，積分をおこなうことなく微分方程式の解が求められることになる (係数合わせの計算はそれなりに大変だが).
- α は一般に複素数であることに注意．α が純虚数の場合は $e^{\alpha t}$ は三角関数，α が純虚数でない複素数の場合は $e^{\alpha t}$ は指数関数と三角関数の複合である.

- $D(s) = (s-\alpha_1)^{\rho_1} \cdots (s-\alpha_l)^{\rho_l}$ となっているときには(重複あり;$\rho_j \geq 1$), 後で述べる部分分数展開を使うと…

- 定数 $C_{1,1},\ \ldots,\ C_{1,\rho_1},\ \ldots,\ C_{l,1},\ \ldots,\ C_{l,\rho_l}$ をうまく定めれば

$$
\begin{aligned}
Y(s) = {} & \frac{C_{1,1}}{s-\alpha_1} + \cdots + \frac{C_{1,\rho_1}}{(s-\alpha_1)^{\rho_1}} \\
& + \cdots \\
& + \frac{C_{l,1}}{s-\alpha_l} + \cdots + \frac{C_{l,\rho_l}}{(s-\alpha_l)^{\rho_l}}
\end{aligned}
$$

のように書き直せることがわかる.

- $\dfrac{1}{(s-\alpha)^k}$ は $\dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\alpha t}$ のラプラス変換なので，上記から，積分をおこなうことなく微分方程式の解が求められることになる (係数合わせの計算はそれなりに大変だが).

- 次に強制項がある場合を考える
- 微分方程式

$$y^{(k)} + a_1 y^{(k-1)} + \cdots + a_{k-1} y = b_0 u^{(l)} + \cdots + b_l u$$

(ただし $l < k$ とする) は…

- $y(t)$ のラプラス変換を $Y(s)$, $u(t)$ のラプラス変換を $U(s)$ とし, $P(s)$ を $y(s)$ と $u(s)$ およびそれらの導関数の初期値 (より正確には時刻を正の範囲で零に近付けた極限) から定まる s の多項式としたとき⋯

$$
\begin{aligned}
&\left(s^k + a_1 s^{k-1} + \cdots + a_{k-1}\right) Y(s) \\
&= \left(b_0 s^l + b_1 s^{l-1} + \cdots + b_1\right) U(s) + P(s)
\end{aligned}
$$

- $D(s) = s^k + a_1 s^{k-1} + \cdots + a_{k-1}$, $B(s) = b_0 s^l + b_1 s^{l-1} + \cdots + b_l$ とする.
- $Y(s) = \dfrac{B(s)U(s)}{D(s)} + \dfrac{P(s)}{D(s)}$ なので, これらを部分分数展開すれば, やはり積分することなく微分方程式の解が求められる.

§$e^{\alpha t}$ のラプラス変換

- $e^{\alpha t}$ をラプラス変換すると, s の実部が α の実部より大きければ,

$$\int_0^\infty e^{\alpha t} e^{-st} dt = \frac{1}{\alpha - s} \, e^{(\alpha - s)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s - \alpha}.$$

§$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\alpha t}$ のラプラス変換

- $\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\alpha t}$ のラプラス変換が $\dfrac{1}{(s-\alpha)^n}$ となることを示す.
- $n=1$ の場合はすでに示されている.
- $n=k$ まで主張が正しいものと仮定し, $n=k+1$ の場合を考える. 部分積分を使う.

- s の実部を α の実部より大きく取れば,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{t^k}{k!} e^{\alpha t} e^{-st} dt \\
&= \frac{1}{\alpha - s} \frac{t^k}{k!} e^{(\alpha - s)t} \bigg|_0^\infty \\
&\qquad - \int_0^\infty \frac{1}{\alpha - s} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{(\alpha - s)t} dt \\
&= \frac{1}{(s - \alpha)^{k+1}}.
\end{aligned}
$$

部分分数展開

- 有理式 $G(z) = \dfrac{B_0(z)}{A_0(z)}$ が定める関数を考える.
  - ▷ $A_0(z)$ は零でない有限次の多項式
  - ▷ $B_0(z)$ は有限次の多項式

- c_0 を零でない定数とすると,

$$G(z) = \frac{B_0(z)}{A_0(z)} = \frac{c_0 B_0(z)}{c_0 A_0(z)}.$$

- c_0 を調整し, $c_0 A_0(z)$ の最高次の係数が 1 になるようにしたものを $A(z)$ とおく.
$G(z) = \dfrac{c_0 B_0(z)}{A(z)}$ と書ける.

- $c_0 B_0(z)$ を $A(z)$ で割った商を $Q(z)$, 余りを $B(z)$ とする: $c_0 B_0(z) = Q(z)A(z) + B(z)$, $B(z)$ の次数は $A(z)$ の次数未満,

$$G(z) = \frac{c_0 B_0(z)}{A(z)} = Q(z) + \frac{B(z)}{A(z)}.$$

- $\dfrac{B(z)}{A(z)}$ の部分を 極を使って展開したい (これが部分分数展開).

- 部分分数展開は, 線形定係数の $\cdots$
  - ▷ 微分方程式をラプラス変換で解く
  - ▷ 差分方程式を z 変換で解く

ときに役に立つ

- $\dfrac{B(z)}{A(z)}$ は既約で, $A(z)$ が

$$A(z) = (z-\alpha_1)^{\rho_1}\cdots(z-\alpha_D)^{\rho_D}$$

のように分解表現され, $\alpha_1, \ldots, \alpha_D$ は相異なるのとする

- このとき, $\dfrac{B(z)}{A(z)}$ の極は $\alpha_1, \ldots, \alpha_D$, その位数を $\rho_1, \ldots, \rho_D$ である.

- 以上の条件のもとで,

$$
\begin{aligned}
\frac{B(z)}{A(z)} = & \frac{c_{1,\rho_1}}{(z-\alpha_1)^{\rho_1}} + \cdots + \frac{c_{1,1}}{(z-\alpha_1)} \\
& + \cdots \\
& + \frac{c_{D,\rho_D}}{(z-\alpha_D)^{\rho_D}} + \cdots + \frac{c_{D,1}}{(z-\alpha_D)}
\end{aligned}
$$

のように表現できることが証明できる. これを $\dfrac{B(z)}{A(z)}$ の 部分分数展開 と呼ぶ.

- すべての極の位数が 1 ($\rho_1 = \cdots = \rho_D = 1$) のときは, 上式は,

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{c_{1,1}}{(z-\alpha_1)} \cdots + \frac{c_{D,1}}{(z-\alpha_D)}$$

のように簡単になる.

- s を複素数とすると, $\dfrac{1}{(s-\alpha_k)^k}$ の 逆ラプラス変換は指数関数と時間の多項式を使って表現できる; z 変換も同様
- ラプラス変換表や z 変換表を見れば, その関数形がわかる (自分で計算してもよい)
- 部分分数展開によって, 複雑な有理式の逆ラプラス変換/逆 z 変換ができる

- ローラン展開を使い, 部分分数展開ができる理由を説明する.
- $B(z)$ の次数が $A(z)$ の次数未満であることに注意する.

- $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_D\}$ を相異なる極とし, それぞれに重複度を $\rho_1, \ldots, \rho_D$ とする.
- $\dfrac{B(z)}{A(z)}$ を $z = \alpha_1$ のまわりでローラン展開:

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{c_{1,\rho_1}}{(z-\alpha_1)^{\rho_1}} + \cdots + \frac{c_{1,1}}{(z-\alpha_1)} + G_2(z),$$

$G_2(z)$ は $z = \alpha_1$ で正則.

- $G_2(z)$ を $z = \alpha_2$ のまわりで ローラン展開:

$$G_2(z) = \frac{c_{2,\rho_2}}{(z-\alpha_2)^{\rho_2}} + \cdots + \frac{c_{2,1}}{(z-\alpha_2)} + G_3(z),$$

$G_2(z)$ は $z = \alpha_2$ で正則である.

- 以下同様に,

$$
\begin{aligned}
\frac{B(z)}{A(z)} = {} & \frac{c_{1,\rho_1}}{(z-\alpha_1)^{\rho_1}} + \cdots + \frac{c_{1,1}}{(z-\alpha_1)} \\
& + \cdots \\
& + \frac{c_{D,\rho_D}}{(z-\alpha_D)^{\rho_D}} + \cdots + \frac{c_{D,1}}{(z-\alpha_D)} \\
& + G_{N+1}(z)
\end{aligned}
$$

- $G_{N+1}(z)$ は正則で, $z \to \infty$ としたとき, $\dfrac{B(z)}{A(z)}$ は $z \to \infty$ としたとき有界だから, 有界. よって, リュービルの定理によって, 定数. 一方, $\dfrac{B(z)}{A(z)}$ の分子の次数は分母の次数未満だったから, この定数は零でなければならない.

- $\{c_{k,l}\}_{1\leq k\leq D, 1\leq l\leq \rho_k}$ を求める方法は2通りある.
    - ▷ 連立一次方程式に帰着させる
    - ▷ 個別に計算する

連立一次方程式に帰着させて部分分数展開を求める

$$\begin{aligned}\frac{B(z)}{A(z)} &= \frac{c_{1,\rho_1}}{(z-\alpha_1)^{\rho_1}} + \cdots + \frac{c_{1,1}}{(z-\alpha_1)} \\ &+ \cdots \\ &+ \frac{c_{D,\rho_D}}{(z-\alpha_D)^{\rho_D}} + \cdots + \frac{c_{D,1}}{(z-\alpha_D)}\end{aligned}$$

の両辺に $A(z) = (z-\alpha_1)^{\rho_1} \cdots (z-\alpha_D)^{\rho_D}$ を掛けると両辺ともに z の多項式となるので, その各項の係数を比較して, 連立一次方程式を立て, 解く.

個別に部分分数展開の係数を計算する

- $(z-\alpha_1)^{\rho_1}G(z) = c_{1,\rho_1} + \cdots + c_{1,1}(z-\alpha_1)^{\rho_1-1} + (z-\alpha_1)^{\rho_1}G_2(z)$ で, $G_2(z)$ は $z=\alpha_1$ で解析的だから,

$$
\begin{aligned}
c_{1,\rho_1} &= \lim_{z\to\alpha_1} (z-\alpha_1)^{\rho_1}G(z) \\
c_{1,\rho_1-1} &= \lim_{z\to\alpha_1} \frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left((z-\alpha_1)^{\rho_1}G(z)\right) \\
c_{1,\rho_1-2} &= \lim_{z\to\alpha_1} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left((z-\alpha_1)^{\rho_1}G(z)\right) \\
&\cdots \\
c_{1,1} &= \lim_{z\to\alpha_1} \frac{1}{(\rho_1-1)!}\frac{d^{\rho_1-1}}{dz^{\rho_1-1}}\left((z-\alpha_1)^{\rho_1}G(z)\right)
\end{aligned}
$$

- 以下同様に, 各 k に対し,

$$
\begin{aligned}
c_{k,\rho_k} &= \lim_{z\to\alpha_k} (z-\alpha_k)^{\rho_k} G(z) \\
c_{k,\rho_k-1} &= \lim_{z\to\alpha_k} \frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left((z-\alpha_k)^{\rho_k} G(z)\right) \\
c_{k,\rho_k-2} &= \lim_{z\to\alpha_k} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left((z-\alpha_k)^{\rho_k} G(z)\right) \\
&\cdots \\
c_{k,1} &= \lim_{z\to\alpha_k} \frac{1}{(\rho_k-1)!}\frac{d^{\rho_k-1}}{dz^{\rho_k-1}}\left((z-\alpha_k)^{\rho_k} G(z)\right)
\end{aligned}
$$

計算例

$$\frac{1}{z(z-1)(z+1)}$$

の部分分数展開を求める.

§ 連立一次方程式に帰着させる場合

1. $\dfrac{1}{z(z-1)(z+1)} = c_1\dfrac{1}{z} + c_2\dfrac{1}{z-1} + c_3\dfrac{1}{z+1}$ とおく.
2. 両辺に $z(z-1)(z+1)$ を掛けると,

$$1 = c_1(z-1)(z+1) + c_2z(z+1) + c_3z(z-1)$$

となるが, これは次のように書ける.

$$1 = c_1(z^2-1) + c_2(z^2+z) + c_3(z^2-z)$$

3. 左辺と右辺を比較すると, z^2 と z の係数は零, 定数項は 1 となる筈である. よって, 次式が立つ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. 上記の連立方程式を解くと, $c_1 = -1$, $c_2 = \dfrac{1}{2}$, $c_3 = \dfrac{1}{2}$ となる.
5. $-\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{z+1} = \dfrac{1}{z(z-1)(z+1)}$ となることは直接計算することで確認できる.

§ 個別に部分分数展開の係数を計算する

1. $\dfrac{1}{z(z-1)(z+1)} = c_1\dfrac{1}{z} + c_2\dfrac{1}{z-1} + c_3\dfrac{1}{z+1}$ とおく.
2. $z=0$, $z=1$, $z=-1$ はすべて単根なので, 留数の計算法により,

$$c_1 = \lim_{z\to 0}\frac{z}{z(z-1)(z+1)} = -1$$
$$c_2 = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z(z-1)(z+1)} = \frac{1}{2}$$
$$c_3 = \lim_{z\to -1}\frac{z+1}{z(z-1)(z+1)} = \frac{1}{2}$$

3. $-\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{z+1} = \dfrac{1}{z(z-1)(z+1)}$ となることは直接計算することで確認できる.

微分方程式の求解の例

- ラプラス変換, 部分分数展開と留数計算を使って常微分方程式を解く
- 以下の微分方程式を解きたい.

$$\frac{d^2x}{dt^2}+5\frac{dx}{dt}+6x(t)=e^{-t},\quad x(0)=0,x'(0)=0$$

- 関数をラプラス変換する作用素を $\mathcal{L}[\cdot]$ とする.
- $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ とすると,

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = s^2X(s) - sx(0) - x'(0)$$

- $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し, $\mathcal{L}\left[e^{\alpha t}\right] = \dfrac{1}{s-\alpha}$ である.

- これらを使うと, 解くべき微分方程式は,

$$(s^2+5s+6)X(s)=\frac{1}{s+1}$$

$(s^2+5s+6)=(s+2)(s+3)$ だから,

$$X(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}.$$

$X(s)$ の逆ラプラス変換が微分方程式の解

- $X(s)$ を逆ラプラス変換するために部分分数展開を使う
- 以下のようにおくと $\cdots$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \\
&\quad = c_1 \frac{1}{s+1} + c_2 \frac{1}{s+2} + c_3 \frac{1}{s+3}
\end{aligned}
$$

- 極の位数はすべて 1 だから計算は簡単

$$c_1 = \lim_{s\to -1} \frac{(s+1)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1}{2}$$

$$c_2 = \lim_{s\to -2} \frac{(s+2)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = -1$$

$$c_3 = \lim_{s\to -3} \frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1}{2}$$

- したがって,

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}$$

- 簡単に微分方程式が解ける!

- 微分方程式の強制項が $\sin\omega t$ や $\cos\omega t$ のときには,

$$\sin\omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}, \quad \cos\omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$$

を使えばよい (計算の量は増える)

複素解析に関する全般的なコメント

- 電気電子系では複素数自体は回路理論でよく使うが…
- 学生から見ると, 複素関数の微分積分を何に使うかは, 微分方程式 (工業数学 II) やフーリエ解析 (工業数学 III) ほど明らかではないものと思われる.

- しかし, 今回の講義で見たように, 微分方程式論やフーリエ解析を使いこなすためには, 色々なところで複素解析が必要になる.
- また, 信号処理関連の分野では複素解析が必要になる.
- 一見して何の役に立つのかわかりにくいからと言って敬遠しない方がよい.