工共 212 工業数学 IV
第 14 回
留数と実積分への応用 (2)

演習 14-1 解答

$f(z) = \frac{1}{\frac{5}{3}+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}}\frac{1}{z} = \frac{2}{z^2+\frac{10}{3}z+1}$ だから

$f(z) = \boxed{\dfrac{2}{(z+3)(z+1/3)}}$,

$f(z)$ の単位円内の極は $z = \boxed{-1/3}$,

$\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{5}{3}+\cos\theta}d\theta = 2\pi \mathrm{Res}\,(f, \boxed{-1/3}) = \boxed{3\pi/2}$

演習 14-2 解答 (1)

$m = \boxed{0}$, $n = \boxed{4}$ である．よって，定理 7.4 の，$n \geq m+2$ という条件は満たされ$\boxed{\text{る}}$.

$Q(z) = \boxed{(z+i)(z-i)(z+2i)(z-2i)}$, $Q(z)$ の零点は$\boxed{-i}$, $\boxed{i}$, $\boxed{-2i}$, $\boxed{2i}$ 上半平面にある零点は$\boxed{i}$, $\boxed{2i}$;

$Q(z)$ は実軸上に零点を持$\boxed{\text{たず}}$, 定理 7.4 の条件は満たされ$\boxed{\text{る}}$.

演習 14-2 解答 (2)

定理 7.2 より，

$\mathrm{Res}\,(P/Q, \boxed{i}) = \boxed{-i/6}$,

$\mathrm{Res}\,(P/Q, \boxed{2i}) = \boxed{i/12}$; $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \boxed{\pi/6}$ となる.

演習 14-3 解答 (1)

$m = \boxed{0}$, $n = \boxed{4}$, $n \geq m+2$ という条件は満たされ$\boxed{\text{る}}$.

$Q(z) = \boxed{(z+2i)^2(z-2i)^2}$,

$Q(z)$ の零点は $\boxed{2i}$, $\boxed{-2i}$

上半平面にある零点は $\boxed{2i}$, 極の位数は$\boxed{2}$

実軸上に零点を持$\boxed{\text{たず}}$,

定理 7.4 の条件は満たされ$\boxed{\text{る}}$

演習 14-3 解答 (2)

$\mathrm{Res}\,(P/Q, \boxed{2i}) = \boxed{-i/32}$:

$(\frac{1}{1!}\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left((z-2i)^2\frac{1}{(z-2i)^2(z+2i)^2}\right) = \lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}(z+2i)^{-2} = \lim_{z\to 2i} -2(z+2i)^{-3} = \frac{-2}{(4i)^3} = -\frac{i}{32})$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \boxed{\pi/16}$ となる.

演習 14-4 解答 (1)

$m = \boxed{1}$, $n = \boxed{2}$, $n \geq m+1$ は満たされ$\boxed{\text{る}}$.

$Q(z) = \boxed{(z+2i)(z-2i)}$, $Q(z)$ の零点は $\boxed{2i}$, $\boxed{-2i}$

上半平面にある零点は $\boxed{2i}$, 極の位数は $\boxed{1}$

$Q(z)$ は実軸上に零点を持$\boxed{\text{たず}}$

定理 7.4 の条件は満たされ$\boxed{\text{る}}$

演習 14-4 解答 (2)

$\mathrm{Res}\,((P(z)/Q(z))e^{i\frac{z}{2}}, \boxed{2i}) = \boxed{1/(2e)}$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (P(x)/Q(x))e^{i\frac{x}{2}}dx = \boxed{\pi i/e}$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (P(x)/Q(x))\cos\frac{x}{2}dx = \boxed{0}$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (P(x)/Q(x))\sin\frac{x}{2}dx = \boxed{\pi/e}$

演習 14-4 解答 (3)

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\,((P(z)/Q(z))e^{i\frac{z}{2}}, 2i) &= \lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{z}{(z+2i)(z-2i)}e^{i\frac{z}{2}} \\ &= \lim_{z\to 2i}\frac{z}{z+2i}e^{i\frac{z}{2}} = \frac{1}{2}e^{-1}\end{aligned}$$

$\frac{x}{x^2+4}\cos\frac{x}{2}$ は奇関数だから，実は $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+4}\cos\frac{x}{2} = 0$ の方は計算しなくてもわかる.