工共 212 工業数学 IV
第 13 回
留数と実積分への応用 (1)

極と零点の復習 (1)

孤立特異点の分類:

- 除去可能な特異点 : 主要部の係数がすべて零
- 極: 主要部が零でない有限級数
- 真性特異点: 上記以外
- 応用上重要な孤立特異点は極.

極と零点の復習 (2)

- α が $f(z)$ の孤立特異点で，$f(z)$ の α におけるローラン展開の主要部が零でない有限級数であるとき，すなわち，ある $k \geq 1$ に対し $c_{-k} \neq 0$ で, $\forall l > k$, $c_{-l} = 0$ となっているとき, α を $f(z)$ の k 位の極という.

極と零点の復習 (3)

- $f(z) = \dfrac{1}{z+1} + 1$ において．$z = -1$ は $f(z)$ の 1 位の極.
- $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2} + \dfrac{1}{z-1} + 1$ において．$z = 1$ は $f(z)$ の 2 位の極.
- $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^3} + \dfrac{1}{(z-2)^2} + \dfrac{1}{z-2} + 1$ において．$z = 2$ は $f(z)$ の 3 位の極.

極と零点の復習 (4)

- 関数 $f(z)$ に対し, $f(\alpha)=0$ をみたす $\alpha\in\mathbb{C}$ のことを $f(z)$ の零点という. α が $f(z)$ の零点で, α の近傍で定義された正則関数 $\varphi(z)$ に対し, $\varphi(\alpha)\neq 0$ かつ $f(z)=(z-\alpha)^k\varphi(z)$ と書けるとき, α を f の k 位の零点という.

演習 13-1

正しいと思うものを選べ.

演習 13-1 解答 (1)

1. $f(z) = \begin{cases} 1, & z = 0, \\ z, & z \neq 0, \end{cases}$,

   $z = 0$ は $\boxed{\text{除去可能特異点である}}$

2. $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $z = 0$ は $\boxed{\text{極である}}$.

演習 13-1 解答 (2)

3. $f(z) = e^{1/z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$,

   $z = 0$ は $\boxed{\text{真性特異点である}}$.

4. $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(= \frac{1}{1-z}\right)$ ($|z| < 1$ のとき),

   $z = 0$ は $\boxed{\text{特異点でない}}$.

演習 13-2

正しいと思うものを選べ.

演習 13-2 解答 (1)

1. $f(z) = z$ に対し, $z = 0$ は $f(z)$ の $\boxed{1\text{位の零点である}}$.

2. $f(z) = z^2 + z^3$ に対し, $z = 0$ は $f(z)$ の $\boxed{2\text{位の零点である}}$.
$(f(z) = z^2(1 + z)$ で $\varphi(z) = 1 + z$ とすると $\varphi(0) \neq 0)$.

演習 13-2 解答 (2)

1. $f(z) = z^2 - 2z + 1$ に対し, $z = 1$ は $f(z)$ の $\boxed{\text{2 位の零点である}}$. $(f(z) = (z-1)^2)$

2. $f(z) = z^2 - 2z + 1$ に対し, $z = -1$ は $f(z)$ の $\boxed{\text{零点でない}}$. $(f(-1) = 4)$.

留数 (1) (p.254)

定義 7.1 α が $f(z)$ の孤立特異点で, C は α を内部に含む単一閉曲線で, $f(z)$ は C の内部の α 以外の点で正則であるとする. このとき, $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C f(z)dz$ を $f(z)$ の α における留数といい, $\mathrm{Res}\,(f,\alpha)$, $\mathrm{Res}\,(f(z),\alpha)$, $\mathrm{Res}\,(\alpha)$, $\mathrm{Res}\,f(\alpha)$ などと書く.

- $f(z)$ の $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-\alpha| < R\}$ における ローラン展開が $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$ で与えられているものとする

- $n \neq -1$ であれば $(z-\alpha)^n$ は原始関数 $\frac{(z-\alpha)^{n+1}}{n+1}$ を持つから, 定理 5.10 (p.171) より, $\int_C (z-\alpha)^n dz = 0$ である.

- 一方, $(z-\alpha)^{-1}$ は α の近傍全体では原始関数を持たず, 例 5.3(pp.160∼161) か演習 11-1 より, $\int_C (z-\alpha)^{-1} dz = 2\pi i$ である.

- 以上によって, $\int_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n = 2\pi i c_{-1}$ である. すなわち, $\mathrm{Res}\,(f,\alpha) = c_{-1}$ である.

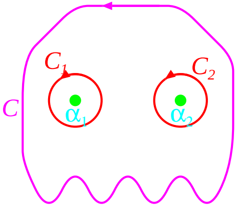
- 以上の事実は重要なので, 改めて命題の形で述べておく.

$\boxed{\text{命題}}$ α が $f(z)$ の孤立特異点で, $f(z)$ が $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - \alpha| < R\}$ で正則で, D における $f(z)$ のローラン展開が $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n$ で与えられているとき $\mathrm{Res}\,(f, \alpha) = c_{-1}$ である.

留数 (2) (p.255)

定理 7.1 C を単一閉曲線とし, $f(z)$ は C の内部に有限個の孤立特異点 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ を持ち, f は C およびその内部を含む領域から $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ を除いた点で正則であるものとする. このとき, 次式が成り立つ: $\displaystyle\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}\,(f, \alpha_k)$

証明　定理 5.21(p.189) を使い, 積分路を C から $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ を囲む円 $C_1, \ldots, C_m$(正の向きをつける) に取り換えればよい. それぞれの円は, 互いに交わらず, C とも交わらないように取る (図は 2 個の孤立特異点 α_1, α_2 の場合).



留数 (3) (p.257)

定理 7.2 点 α が $f(z)$ の 1 位の極であれば, $\mathrm{Res}\,(f,\alpha) = \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z)$ である. また, 点 α が $f(z)$ の k 位の極であれば,

$$\mathrm{Res}\,(f,\alpha) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to\alpha}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}((z-\alpha)^k f(z))$$

である.

証明　α が $f(z)$ の k 位の極であれば, $f(z)$ のローラン展開は $f(z)=\sum_{n=-k}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$ である. よって, $(z-\alpha)^k f(z) = c_{-k}+c_{-k+1}(z-\alpha)+\cdots+c_{-1}(z-\alpha)^{k-1}+\cdots+c_0(z-\alpha)^k+\cdots$ であり, これを $k-1$ 回微分すると $(z-\alpha)$ の $k-2$ 次以下の項は消えるから, $\dfrac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left((z-\alpha)^k f(z)\right) = c_{-1}(k-1)!+c_0\dfrac{k!}{2!}(z-\alpha)+\cdots$ となる. さらに $z\to\alpha$ とすると右辺の $z-\alpha$ の 1 次以上の項は消えるから,

$$\lim_{z\to\alpha}\left(\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left((z-\alpha)^k f(z)\right)\right) = c_{-1}(k-1)!$$

となる.

演習 13-3

空欄を埋め, 正しいと思う方を選択せよ.

演習 13-3 解答

$\mathrm{Res}\,(f,\alpha) = \boxed{0}$, $z=1$ は $f(z)$ の $\boxed{3}$ 位の極,

$$\frac{1}{\boxed{2}!}\lim_{z\to 1}\left(\frac{d^{\boxed{2}}}{dz^{\boxed{2}}}(z-1)^{\boxed{3}}(z-1)^{-3}\right) = \boxed{0}$$

$\mathrm{Res}\,(f,\alpha) = \boxed{0}$, 一致 $\boxed{\text{する}}$.

演習 13-4

空欄を埋めよ.

演習 13-4 解答

$g_1(-1) = \boxed{1/2} \neq 0$, $z = -1$ は $f(z)$ の $\boxed{1}$ 位の極

$g_2(1) = \boxed{1/2} \neq 0$, $z = 1$ は $f(z)$ の $\boxed{1}$ 位の極

$\mathrm{Res}\,(f, -1) = \boxed{1/2}$, $\mathrm{Res}\,(f, 1) = \boxed{1/2}$,

$\int_C f(z)dz = \boxed{2\pi i}$

演習 13-5

空欄を埋めよ.

演習 13-5 解答

z^2 の係数は $\boxed{A+B+C}$,

z の係数は $\boxed{B-C}$, 定数項は $\boxed{-A}$;

$\boxed{A+B+C} = 0$, $\boxed{B-C} = 0$, $\boxed{-A} = 1$,

$A = \boxed{-1}$, $B = \boxed{1/2}$, $C = \boxed{1/2}$

$\displaystyle\int_C f(z)dz = \boxed{0}$ となる.

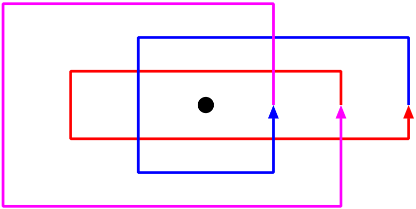
代数学の基本定理 (p.213)

定理 5.29 $f(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0$ としたとき (ただし $n \geq 1, c_n \neq 0$), 複素係数の代数方程式 $f(z) = 0$ は複素数の範囲に少なくともひとつ解を持つ.

系 複素係数の多項式 $f(z) = 0$ は複素数の範囲で 1 次の多項式の積で書き表せる.

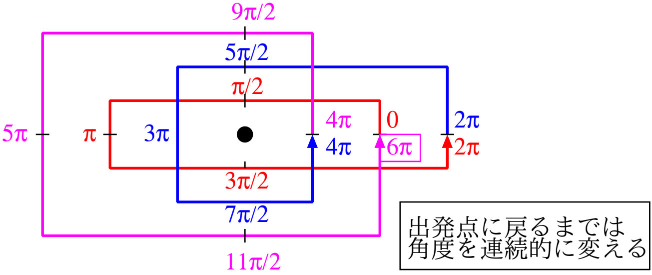
- 上記の系は定理 5.29 と多項式の除算を繰り返し適用することにより得られる.
- 定理 5.29 は応用上重要ではあるが, 定理を使うために証明を理解する必用はないので, この講義では証明を述べない. 証明に興味がある者は教科書 pp. 212〜215 を参照せよ.

回転数



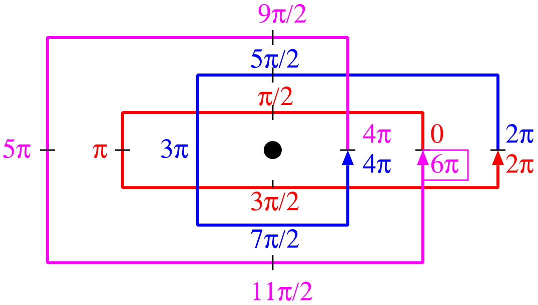
ある点を何回も回る閉曲線を考える

- この点を閉曲線が何周したかを数えたいが…
- 偏角の主値を使うと, 値域が $(-\pi, \pi]$ になっている関係でうまくいかない
- 主値を使うのをやめて, 角度が (弧長などをパラメータとして) 連続的に変化するようにすれば, 曲線がもとに戻ったときの角度から回った回数がわかる



角度をこのように連続的に変えれば, 始点の「角度」と終点の「角度」の差を 2π で割ると回転の回数が出る

曲線 $C : z = z(t)$ $(a \leq t \leq b)$ が与えられているとき, 曲線 C 上にない点 $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し, $\theta(a) = \mathrm{Arg}\,(z(a)-\alpha)$, $\theta(t) = \mathrm{Arg}\,(z(t)-\alpha)+2n(t)\pi$ とし, $\theta(t)$ が t とともに連続的に変わるように調整する


9π/2
5π/2
π/2
5π
π
3π
4π
0
2π
4π
6π
2π
3π/2
7π/2
11π/2

$\theta(t)$ が t とともに連続的に変わるように調整されているとき, 閉曲線 (始点と終点が同じ) については, $(\theta(b) - \theta(a))/(2\pi)$ を計算すれば, その閉曲線が始点から動き始めて始点に戻るまでに点 α のまわりを何周したかがわかる.

定義 以上の記法のもとで, $\dfrac{\theta(b)-\theta(a)}{2\pi}$ を, 曲線 C の点 α に関する回転数と呼び, $n(C,\alpha)$ と書く.

- 以下の議論では, $\theta(t)$ が滑らかな関数となっていることを仮定する (「区分的に滑らか」でも構わないが, その場合には積分の区間を適当に分割する必要が生じる).
- この仮定のもとで, 次の定理が成り立つ.

$\boxed{\text{定理}}$ 閉曲線 C の回転数は, $n(C,\alpha) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{1}{z-\alpha}dz$ により与えられる.

- 証明は難しくないが略す.
- $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{1}{z-\alpha}dz$ によって回転数を定義する流儀もある.

回転数を導入することの利点:

- ジョルダンの曲線定理 (定理 5.1, p.157) に関する面倒な議論が不要になる
- コーシーの積分公式 (系 5.3, p.201) を, 単一閉曲線とは限らない, 一般的な閉曲線について述べることができ, かつ曲線の向きをいちいち気にする必要もなくなる.

定理 (コーシーの積分公式, 一般形) $f(z)$ が領域 D で正則で, 閉曲線 C が $\alpha \notin D$ なら $n(C,\alpha)=0$ という条件を満たすとき, $\forall z \in D\setminus C$,

$$n(C,z)f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

詳細は杉浦, 解析入門 II, 東京大学出版会, 1985. 回転の数と向きに関する情報がすべて左辺の $n(C,z)$ という項に集約されていることに注意.

- 回転数に関連した応用上重要な原理に,「偏角の原理」というものがあるが, 教科書では 251 ページで名前が紹介されているのみで, 議論されていない; 以下でこれについて述べる

- 以下では, ふたたび C は正に向き付けられた単一閉曲線であると仮定し, $C : z = z(t)$ $(a \leq t \leq b)$ とパラメータ表示されているものとする.

- 関数 $f(z)$ は z の有理関数で, 曲線 C 上には極および零点を持たず, C の内部に, 重複度も含めて, Z 個の零点と, P 個の極を持つものとする.
- 以上の準備のもとで, 次の定理が成り立つ.

定理 (偏角の原理) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = Z - P$ となる. さらに, $f(z(t))$ の偏角を t に関して連続に変化するように調整したものを $\theta(z(t))$ とすると, $\displaystyle \frac{\theta(z(b)) - \theta(z(a))}{2\pi} = Z - P$ となる.

- 偏角の原理の証明は略す.
- 偏角の原理は, 古典制御におけるナイキストの安定判別法などに応用される. 興味がある学生は制御工学あるいはシステム工学を選択するとよい.

演習 13-6

空欄を埋め, 正しいと思われるものを選択せよ.

演習 13-6 解答 (1)

$e^{iz} = e^{-y}(\boxed{\cos x + i\sin x})$, $e^{-iz} = e^{y}(\boxed{\cos x - i\sin x})$,

$\cos z = (\boxed{\dfrac{e^{y} + e^{-y}}{2}})\cos x + i(\boxed{\dfrac{e^{-y} - e^{y}}{2}})\sin x$,

$\cos x = \boxed{0}$ かつ $\dfrac{e^{-y} - e^{y}}{2} = \boxed{0}$,

$x = \boxed{\pi/2 + n\pi, n \in \mathbb{Z}}$, $y = \boxed{0}$

(x については違う書き方でもよい)

演習 13-6 解答 (2)

$z = \pi/2$ において $\cos z = \boxed{0}$, $z = \pi/2$ は $1/\cos z$ の特異点で $\boxed{\text{ある}}$. また, $z = \pi/2$ の十分小さい除外近傍では, $\cos z$ は零に $\boxed{\text{ならない}}$ から, $z = \pi/2$ は $1/\cos z$ の孤立特異点で $\boxed{\text{ある}}$.

演習 13-6 解答 (3)

$$\cos\left(\xi + \tfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\xi = \boxed{-\xi + \frac{1}{3!}\xi^3 - \frac{1}{5!}\xi^5 + \cdots}$$

$$\cos z =$$

$$\boxed{-(z - \pi/2) + \frac{1}{3!}(z - \pi/2)^3 - \frac{1}{5!}(z - \pi/2)^5 + \cdots}$$

(違う書き方でもよい)

演習 13-6 解答 (4)

注意: $g(z) = (1 - \frac{1}{3!}(z-\pi/2)^2 + \cdots)$ とおくと, $g(\pi/2) = 1 \neq 0$ で, $\cos z = -(z-\pi/2)g(z)$ である. $z = \pi/2$ は $\cos z$ の $\boxed{1}$ 位の零点, $z = \pi/2$ は $1/\cos z$ の $\boxed{\boxed{1\text{ 位の}}\text{極}}$,

定理 7.2 が適用 $\boxed{\text{できて留数は}\boxed{-1}\text{となる}}$.

演習 13-6 解答 (5)

理由: 上記注意により, $z = \pi/2$ は $1/\cos z$ の 1 位の極だから,

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\,(1/\cos z, \frac{\pi}{2}) &= \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}(z-\frac{\pi}{2})\frac{1}{-(z-\frac{\pi}{2})g(z)} \\ &= \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-g(z)} = -1\end{aligned}$$