工業数学 IV 第 13 回
留数

ローラン展開と孤立特異点 (復習)

- $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$ とし, 関数 $f(z)$ は円環領域 $D = \{z : R_1 < |z - \alpha| < R_2\}$ で正則であるものとする.

- (前回の定理 6.2) このとき, $f(z)$ は D において

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n$$

という形に一意的に展開され,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-\alpha|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}} d\zeta$$

となる ($R_1 < r < R_2$).

- 前ページの級数を D における α を中心とするローラン級数, 前ページの形の $f(z)$ の展開を $f(z)$ の D におけるローラン展開と呼ぶ.
- ローラン展開の負のべきの部分 $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-\alpha)^n$ を主要部と呼ぶ.

- 関数 $f(z)$ が α において正則でないとき, α を $f(z)$ の特異点という.
- $f(z)$ が α で正則でなく, α のある除外近傍で正則であるとき, α を $f(z)$ の孤立特異点という.

- α は $f(z)$ の孤立特異点で, $f(z)$ は α の R 除外近傍 $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - \alpha| < R\}$ において正則で, $f(z)$ が α の R 除外近傍 でローラン展開されているものとする

- 孤立特異点は, ローラン展開を使い, 次の3種類に分類される:
  - 除去可能な特異点 : ローラン展開の主要部の係数がすべて零である特異点
  - 極: ローラン展開の主要部が零でない有限級数である特異点
  - 真性特異点: 上記以外

- 孤立特異点の中で応用上重要なのは極
- (前回の定理6.4) $f(z)$ が $\{z : 0 < |z-\alpha| < R\}$ で正則であるとき, α が k 位の極であるための必要十分条件は, α の近傍で正則で零でない関数 $\varphi(z)$ が存在し, $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-\alpha)^k}$ と書けることである.

- 除去可能特異点は, その点における関数値を定義し直せば正則関数が得られるので, その取り扱いは簡単
- 真性特異点が応用であらわれることは稀

留数 (1) (p.254)

定義 7.1 α が $f(z)$ の孤立特異点で, C は α を内部に含む正の向きがついた単一閉曲線で, $f(z)$ は C の内部の α 以外の点で正則であるとする. このとき, $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C f(z)dz$ を $f(z)$ の α における留数と呼ぶ.

- 留数を表すには, 以下のように, 色々な記号が用いられる:

$$\begin{array}{cc} \operatorname{Res}(f,\alpha), & \operatorname{Res}(f(z),\alpha), \\ \operatorname{Res}(\alpha), & \operatorname{Res} f(\alpha) \\ \operatorname{Res}[f;\alpha], & \operatorname{Res}[f:\alpha] \end{array}$$

- 後で述べるように，実は $f(z)$ の留数は $f(z)$ の α におけるローラン展開の -1 次の項の係数になっていることが証明できる.
- 留数を用いた計算は, 定積分を求めるための技法として有用であるだけでなく, 微分方程式の求解などにも用いられることがあり, 応用上重要.

- 以下の議論は次のことを前提とする:
  - α は $f(z)$ の孤立特異点
  - $f(z)$ は α の R 除外近傍 $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-\alpha| < R\}$ において正則
  - $f(z)$ が α の R 除外近傍 でローラン展開されている
  - 正の向きがついた単一閉曲線 C は α の R 除外近傍に含まれる

- $f(z)$ の $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-\alpha| < R\}$ における
ローラン展開が

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n$$

で与えられているものとする

- $n \neq -1$ であれば $(z-\alpha)^n$ は原始関数

$$\frac{(z-\alpha)^{n+1}}{n+1}$$

を持つから, 定理 5.10 (p.171) より,

$$\int_C (z-\alpha)^n dz = 0$$

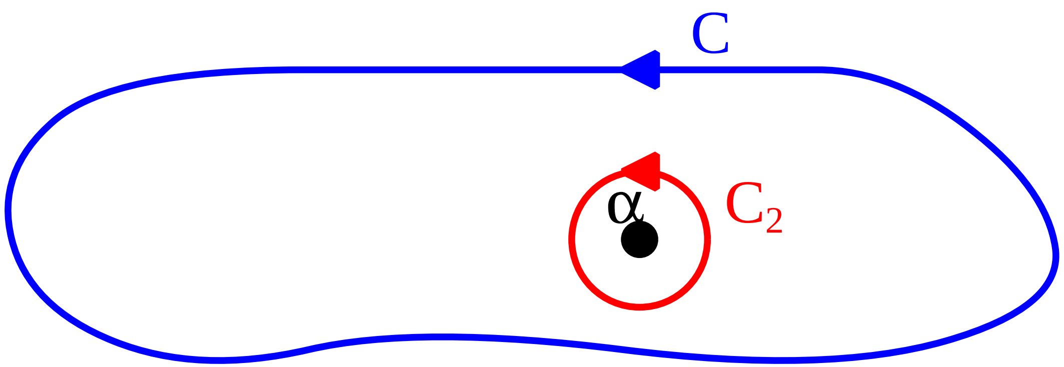
である.

- 一方, $(z-\alpha)^{-1}$ は α の近傍全体では原始関数を持たない. さらに,

$$\int_C (z-\alpha)^{-1} dz = 2\pi i$$

である (計算は次ページ).

- α は孤立特異点で C は正の向きがついた単一閉曲線だから, 曲線 C を, α を中心とする半径 r の円 C_2 で置き換えても, 積分の値は変わらない (ただし r はこの円が曲線の内部に入るように取る).



- $\displaystyle\int_{C} \frac{1}{z-\alpha} dz = \int_{C_2} \frac{1}{z-\alpha} dz.$
- C_2 は,

$$C_2 : z = \alpha + re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

と書ける.

- z が C_2 上を動くとき,
  - ▷ $z - \alpha = re^{it}$
  - ▷ $\displaystyle\frac{1}{z-\alpha} = \frac{1}{r} e^{-it}$
  - ▷ $\displaystyle\frac{dz}{dt} = ire^{it}$

- よって,

$$
\begin{aligned}
\int_{C_2} \frac{1}{z-\alpha} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} e^{-it} i r e^{it} dt \\
&= \int_0^{2\pi} i dt \\
&= 2\pi i
\end{aligned}
$$

- 以上によって,

$$\int_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n = 2\pi i c_{-1}$$

である．すなわち, $\mathrm{Res}\,(f,\alpha) = c_{-1}$ である．

無限和と積分の順序交換は, ローラン級数が収束しているから可能

- 以上の事実は重要なので, 改めて命題の形で述べておく．

命題 α が $f(z)$ の孤立特異点で, $f(z)$ が $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - \alpha| < R\}$ で正則で, D における $f(z)$ のローラン展開が

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - \alpha)^n$$

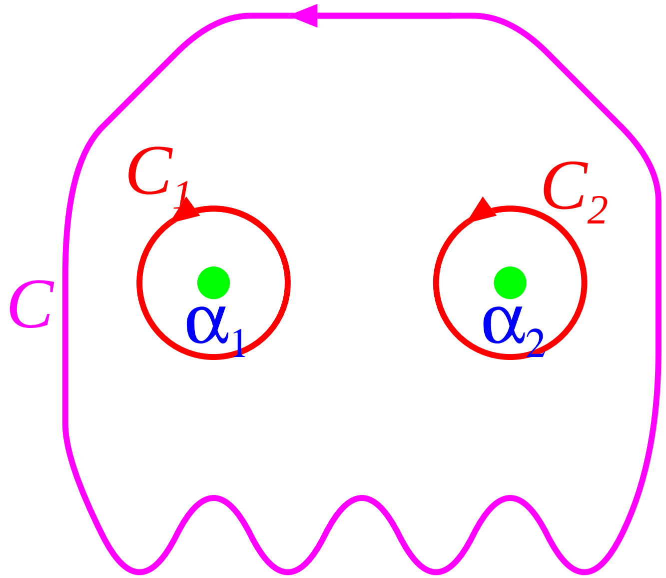
で与えられているとき

$$\mathrm{Res}\,(f, \alpha) = c_{-1}.$$

留数 (2) (p.255)

定理 7.1 C を単一閉曲線とし, $f(z)$ は C の内部に有限個の孤立特異点 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ を持ち, f は C およびその内部を含む領域から $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ を除いた点で正則であるものとする. このとき, 次式が成り立つ: $\displaystyle\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}\,(f, \alpha_k)$

証明　定理 5.21(p.189) を使い, 積分路を C から $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ を囲む円 $C_1, \ldots, C_m$(正の向きをつける) に取り換えればよい. それぞれの円は, 互いに交わらず, C とも交わらないように取る (図は 2 個の孤立特異点 α_1, α_2 の場合).

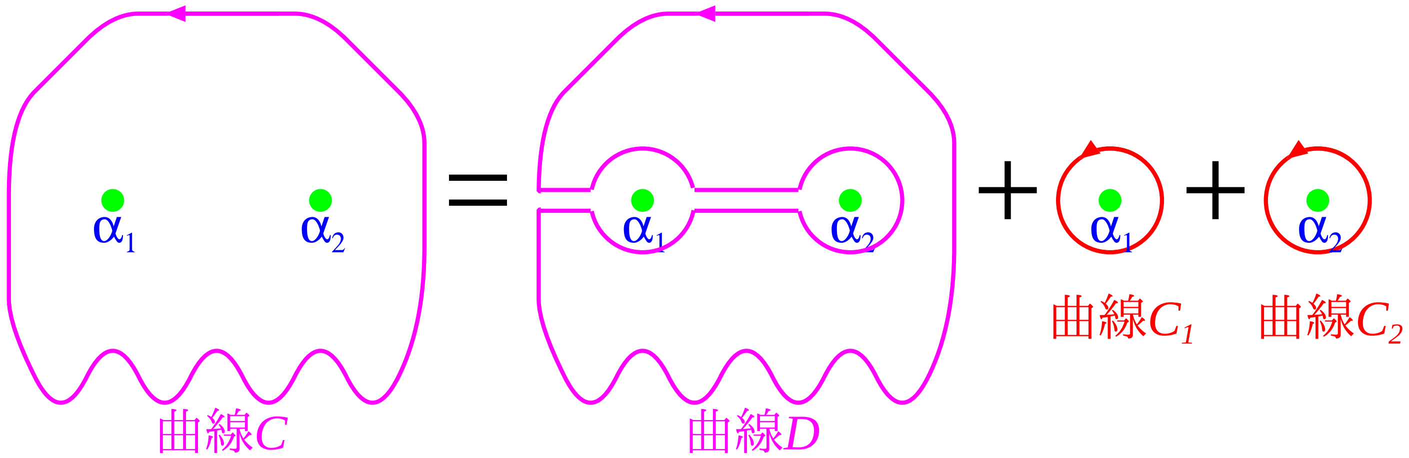


- 先の図の例 (孤立特異点が 2 個) に関し, 証明を詳しく見る.
- 証明すべきことは,

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz \\ &= 2\pi i \left(\mathrm{Res}\,(f, \alpha_1) + \mathrm{Res}\,(f, \alpha_2)\right)\end{aligned}$$

となること.

- こうなる理由は, 以下のように曲線 C を分割すればわかる.



- α_1, α_2 は孤立特異点だから, 上の図のように曲線 D を取ると, $\displaystyle\int_D f(z)dz = 0$. よって,

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$
$$= 2\pi i \mathrm{Res}\,(f, \alpha_1) + 2\pi i \mathrm{Res}\,(f, \alpha_2).$$

- k 個の孤立特異点 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ がある場合は $\cdots$
  - ▷ k 番目の孤立特異点だけを囲う円 C_k を取る (他の円と交わらないよう半径を十分小さくする)
  - ▷ 関数 f が $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 以外で正則であるという性質を使えば,

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \sum_{k=1}^{m} \int_{C_k} f(z)dz \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}(f, \alpha_k).\end{aligned}$$

留数 (3) (p.257)

定理 7.2(1) 点 α が $f(z)$ の 1 位の極であれば,

$$\mathrm{Res}\,(f, \alpha) = \lim_{z \to \alpha} (z - \alpha) f(z)$$

である.

定理 7.2(2)　点 α が $f(z)$ の k 位の極であれば,

$$\mathrm{Res}\,(f,\alpha) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to\alpha}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}((z-\alpha)^k f(z))$$

である.

証明 (1/2)

- α が $f(z)$ の k 位の極であれば, $f(z)$ のローラン展開は

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n.$$

  負のべきが $-k$ までであることに注意.

- よって,

$$(z-\alpha)^k f(z) = c_{-k} + c_{-k+1}(z-\alpha) + \cdots + c_{-1}(z-\alpha)^{k-1} + c_0 (z-\alpha)^k + \cdots$$

証明 (2/2)

- $(z-\alpha)^k f(z)$ を $k-1$ 回微分すると $(z-\alpha)$ の $k-2$ 次以下の項は消える:

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left((z-\alpha)^k f(z)\right) = c_{-1}(k-1)! + c_0\frac{k!}{2!}(z-\alpha) + \cdots$$

- 上式で $z \to \alpha$ とすると右辺の $z-\alpha$ の 1 次以上の項は消え, $\lim_{z\to\alpha}\left(\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left((z-\alpha)^k f(z)\right)\right) = c_{-1}(k-1)!$ だから,

$$c_{-1} = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to\alpha}\left(\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left((z-\alpha)^k f(z)\right)\right)$$

計算例

§$f(z) = 1/(z^2+1)$ の $z = i$ における留数

- $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ とする．$f(z)$ の $z = i$ における留数を求めたい．

- $f(z) = \dfrac{1}{(z+i)(z-i)}$ と書け，これを $f(z) = \dfrac{1}{z-i}\dfrac{1}{z+i}$ と書き直すと，$\dfrac{1}{z+i}$ は $z = i$ のある近傍で正則．よって $z = i$ は 1 位の極である．

- 定理 7.2(1) によると,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, i) &= \lim_{z \to i}(z-i)f(z) \\ &= \lim_{z \to i}(z-i)\frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i} \end{aligned}$$

- (別の導出法) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1} = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{z-i} - \dfrac{1}{z+i}\right)$ となることが, 計算により確認できる. $\dfrac{1}{z+i}$ は $z = i$ のある近傍で正則だから, $\dfrac{1}{2i}\dfrac{1}{z-i}$ が $f(z)$ のローラン展開の主要部になっている. 主要部の -1 次の項の係数は $\dfrac{1}{2i}$ なので, $\mathrm{Res}\,(f, i) = \dfrac{1}{2i}$.

§$f(z) = \dfrac{z^2+z+1}{(z-1)^3}$ の $z=1$ における留数

- $f(z) = \dfrac{z^2+z+1}{(z-1)^3}$ とする．$f(z)$ の $z=1$ における留数を求めたい．
- $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^3}(z^2+z+1)$ で，$\phi(z) = z^2+z+1$ は正則．よって $z=1$ は $f(z)$ の 3 位の極である．

- 定理 7.2(2) によると,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, 1) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \to 1} \frac{d^2}{dz^2} (z-1)^3 f(z) \\
&= \frac{1}{2!} \lim_{z \to 1} \frac{d^2}{dz^2} (z^2 + z + 1) = 1
\end{aligned}
$$

- (別の導出法)

$$f(z) = \frac{z^2+z+1}{(z-1)^3} = \frac{1}{z-1} + \frac{3}{(z-1)^2} + \frac{3}{(z-1)^3}$$

となることが, 計算により確認できる. 上式は $f(z)$ のローラン展開で, 主要部の -1 次の項の係数は 1 なので, $\mathrm{Res}\,(f,1)=1$.

- 別の導出法で述べた方法は部分分数展開と呼ばれる． 部分分数展開が可能であることはローラン展開によって保証されているが, 今回の講義ではこれ以上深入りしない．
- おそらく定理 7.2 の方法で計算した方が簡単であるが, 部分分数展開を用いた計算には, 解くべき問題を連立一次方程式に帰着できるという利点がある．

代数学の基本定理 (p.213)

定理 5.29 $f(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0$ としたとき (ただし $n \geq 1, c_n \neq 0$), 複素係数の代数方程式 $f(z) = 0$ は複素数の範囲に少なくともひとつ解を持つ.

系 複素係数の多項式 $f(z)$ は複素数の範囲で 1 次の多項式の積で書き表せる (重複を許容)

- 代数学の基本定理の証明には, 次のリュービルの定理を使う.

定理 5.28(リュービルの定理)

有界な整関数は定数に限られる.

証明 整関数とは複素平面全体で正則な関数であった． この関数を $f(z)$ とし, その上界のひとつを M とする． $f(z)$ は整関数だから, 曲線 $C : z = z_0 + Re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ を取る． 定理 6.1 より,

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-\alpha|=R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2}d\zeta$$

だから,

$$\begin{aligned} |f'(z_0)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(z_0 + Re^{it})}{R^2}iRe^{it}\right|dt \\ &\leq \frac{M}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{R}dt = \frac{M}{R}. \end{aligned}$$

z_0 と R は任意だから, $f'(z_0)$ は $\mathbb{C}$ 全体で零． よって f は定数.

代数学の基本定理の証明 (1/2)

- $f(z) = c_n z^n + \cdots + c_n$ とする. $f(z) = 0$ が解を持たないと仮定して矛盾を導く.
- $f(z) = 0$ が解を持たないなら, $\dfrac{1}{f(z)}$ は正則.
- $K_0 = 2n \max\left\{\left|\frac{c_k}{c_n}\right| : 0 \leq k \leq n\right\}$ とする.
- $|f(z)| = |c_n z^n| \left|1 + \dfrac{c_{n-1}}{c_n z} + \cdots + \dfrac{c_0}{c_n}\right|$ であるが,
  $|z| \geq K_0$ とすれば, $|f(z)| \geq \dfrac{1}{2}|c_n||z^n|$.
- ゆえに, $z = Re^{i\theta}$ としたとき, $R \geq K_0$ なら, $\dfrac{1}{f(z)} \leq \dfrac{2}{|c_n||R^n|}$.

代数学の基本定理の証明 (2/2)

- $\dfrac{1}{f(z)}$ は $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq K_0\}$ で有限の最大値を取る.
- したがって, $\frac{1}{f(z)}$ は複素平面全体で有界だから, リュービルの定理により, 定数.
- よって, $f(z)$ も定数. これは, $f(z)$ が 1 次以上の多項式であるという仮定に反する.
- 以上によって矛盾が導かれたので, $f(z) = 0$ が解を持つことが示された.

系の証明

- $f(z) = 0$ のある解を α_1 とする．$f(z)$ を $z - \alpha_1$ で割った商を $P_1(z)$, 余りを r とすると，$f(z) = (z - \alpha_1)P_1(z) + r$ であるが，両辺の z に α を代入すると，$r = 0$ となることがわかる．また，$P_1(z)$ の次数は $f(z)$ の次数より 1 小さい．
- 帰納的に，$f(z) = (z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_{k-1})P_{k-1}(z)$ と書けているものとする．$P_{k-1}(z)$ が定数でなければ，α_k を $P_{k-1}(z) = 0$ のひとつの解とすると，$P_{k-1}(z) = (z - \alpha_k)P_k(z)$ と書ける．また，$P_k(z)$ の次数は $P_{k-1}(z)$ の次数より 1 小さい．
- 以上の計算を n 回繰り返すと，P_n は零次，すなわち定数となる．また，$f(z)$ は n 個の 1 次の多項式の積で表現される．

ローラン展開の応用: z 変換

- 離散時間信号を取り扱う分野では, 連続時間信号に対して用いられるラプラス変換の離散時間版である z 変換と呼ばれる変換がよく用いられる
- z 変換は 1950 年頃に工学分野で提案された手法だが, ローラン展開の応用と解釈できる.

- 工学分野では信号とシステムは重要なので, 信号とシステムについて準備した上で, z 変換の概要を紹介する

信号とシステム

- 情報を伝達するための量を**信号**と呼ぶ.
- 通信に用いられる電磁波や有線ネットワークを伝播する電圧波形は信号の一種.
- 信号の直感的なイメージは時間とともに変動する波形で, この場合の独立変数は時間.

- 静止画像を信号と解釈した場合, 独立変数は画像の横軸および縦軸.
- 我々が住む物理的世界における量の大部分は連続量であり, このような量を直接処理する場合, 独立変数は連続となる. 独立変数が連続値を取る信号をアナログ信号と呼ぶ.

- コンピュータに情報を取り込んで処理する場合, 連続量を忠実に記録することはストレージの容量という観点で現実的でないので, 信号の標本を取得し, それを処理する．標本を取得するにあたり, 独立変数は離散的な値を取るようになる．独立変数が離散値を取る信号を離散時間信号あるいはディジタル信号と呼ぶ.

- 厳密には, 離散時間信号という言葉とディジタル信号という言葉は使い分けられることがあるが, この講義ではその区別には深入りせず, ディジタル信号という言葉を用いる.

- ディジタル信号では, 独立変数がサンプリング周期と呼ばれる数値の整数倍であることが多い. また, サンプリング周期を明示せず, 独立変数を整数に取ることが一般的である. この講義でもこれを採用する.

- システムという言葉は…
  - ▷ 何らかのまとまりをもつ体系を漠然と呼ぶとき用いる
  - ▷ 工学的には, 特定の目的のために構成された装置・機器・ソフトウェア (あるいはそれを数学的にモデル化したもの) を指すことが多い.

- 工学では, システムを用いて信号を処理して別の信号を得る, というフローが頻出する.
- システムに印加する信号を**入力信号**, システムから得られる信号を**出力信号**と呼ぶ.

- システムは自然物のことも人工物のこともあるが (それらが混在していることもある), 人工物としてのシステムは特定の目的のために構成されることが一般的
- システムの解析·設計という観点で工学的に取り扱いやすいシステムは線形時不変システム.

- 線形とは, その入出力関係に関して重ね合わせの原理が成り立つことを言う.
- 時不変とは, 入力に対する応答が入力が印加された時刻からの経過時間のみで定まり時刻に直接的には依存しないことを言う.
- 入力, 出力ともにスカラーであることもベクトルであることもあるが, この講義ではいずれもスカラーである場合のみを考える.

§ 連続時間線形時不変システムの入出力関係

- 連続時間線形時不変システムに単位インパルス (ディラックのデルタ関数) を印加することで得られる出力波形のことを**インパルス応答**と呼ぶ.
- 入力信号を $x(t)$, 出力信号を $y(t)$ とする. ただし $t \in \mathbb{R}$ とする.

- システムのインパルス応答が $h(t)$ であるとき，システムの入力 $x(t)$ に対する応答 $y(t)$ は以下の積分 (畳み込みあるいは畳み込み積分と呼ばれる) で表されることが知られている．

$$y(t) = \int h(t-s)x(s)ds$$

§ 離散時間線形時不変システムの入出力関係

- 信号の独立変数を $\mathbb{Z}$(整数) に取る
- 離散時間線形時不変システムに単位インパルス (時刻 0 で値が 1, その他の時刻で値が 0 の波形) を印加することで得られる出力波形のことを**インパルス応答**と呼ぶ.
- 入力信号を $x(n)$, 出力信号を $y(n)$ とする. ただし $n \in \mathbb{Z}$ とする.

- システムのインパルス応答が $h(n)$ であるとき，システムの入力 $x(n)$ に対する応答 $y(n)$ は以下の和 (畳み込みあるいは畳み込み和と呼ばれる) で表されることが知られている．

$$y(n) = \sum_{k} h(n-k)x(k)$$

§ 連続時間信号とラプラス変換

- 連続時間信号をあらかじめ
$$X(s) = \int x(t)e^{-st}dt$$
のように変換しておき, 変換された信号を用いてシステムの解析・設計をおこなうことが一般的.
- 上記の (積分) 変換を**ラプラス変換**と呼ぶ.

- システムのインパルス応答 $h(t)$ をラプラス変換したもの ($H(s)$ と書く) を，システムの伝達関数と呼ぶ.
- ラプラス変換を用いると，システムの入出力関係は

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

のように積で表現できる ($X(s)$ と $Y(s)$ はそれぞれ $x(t)$ と $y(t)$ をラプラス変換したもの).

- 積は畳み込み積分より簡単なので, 信号を時間領域で直接取り扱うより, ラプラス変換してから変換された領域で取り扱うことの方が一般的.
- z 変換はラプラス変換の離散時間版で, ラプラス変換とよく似た性質を持つ.

z 変換の定義

- 信号 $x = (x(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ を無限長の信号とする.
- 信号 x の両側 z 変換とは, 次式によって定まる形式的冪級数である:

$$\mathcal{Z}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n) z^{-n}.$$

- 「形式的」という形容詞が付くのは，この時点では整級数が収束するか否かが明らかでないため．

- リアルタイム信号処理では, 時刻零以前ではすべての信号の値は恒等的に零であると仮定することが多い. このような場合は, 以下の片側 z 変換が用いられる.

$$\mathcal{Z}[x] = \sum_{n \in \mathbb{N}} x(n) z^{-n}.$$

- 応用では両側 z 変換と片側 z 変換はどちらも用いられる．概念的には, 片側 z 変換はリアルタイム信号処理, 両側 z 変換は非リアルタイム信号処理に対応する．この講義では, 特に断らない限り, 両側 z 変換と片側 z 変換の双方で成り立つ性質について述べる.
- 以下では, 両側 z 変換, 片側 z 変換ともに, 信号を z 変換する作用素を $\mathcal{Z}[\cdot]$ と書く

§ なぜ z 変換するのか

- 信号 $x = (x(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ を時間軸に関して 1 ステップ遅らせることを考え時刻 n における信号値を $x(n)$ と解釈した場合, x を 1 ステップ遅らせた信号 (x_D と書く) は, $x_D = (x(n-1))_{n\in\mathbb{Z}}$ である (時間の単位をステップと呼んでいることに注意).

- $\mathcal{Z}[x] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n) z^{-n}$ であるが, 一方,

$$\mathcal{Z}[x_D] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n-1) z^{-n}$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n) z^{-n+1} = z^{-1}\mathcal{Z}[x]$$

- z 変換後の世界では, z^{-1} を乗ずれば信号は 1 ステップ遅れ, z を乗ずれば信号は 1 ステップ進む.

- z 変換後の領域では時間に関する遅延, 進みの演算がそれぞれ z^{-1}, z を乗じることで置き換えられるため…
- 入出力差分方程式で表現された離散時間線形時不変システムを, 連続時間のラプラス変換と同様に, 伝達関数で表現することができる.

- 以下のような入出力差分方程式が与えられているものとする $(K, L \in \mathbb{N})$.

$$\sum_{k=0}^{K} a_k y(n-k) = \sum_{l=0}^{L} b_l x(n-l)$$

- 初期値の項を無視して両辺を z 変換すると:

$$\left(\sum_{k=0}^{K} a_k z^{-k}\right) Y(z) = \left(\sum_{l=0}^{L} b_l z^{-l}\right) X(z)$$

- $H(z) = \dfrac{\sum_{l=0}^{L} b_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^{K} a_k z^{-k}}$ をこの入出力差分方程式に対応する伝達関数と呼ぶ.
- 上記の分子および分母から z^{-L} と z^{-K} をくくり出すと, 以下のようにも書ける:

$$H(z) = \frac{z^{-L} \sum_{l=0}^{L} b_l z^{L-l}}{z^{-K} \sum_{k=0}^{K} a_k z^{K-k}} = z^{K-L} \frac{\sum_{l=0}^{L} b_l z^{L-l}}{\sum_{k=0}^{K} a_k z^{K-k}}$$

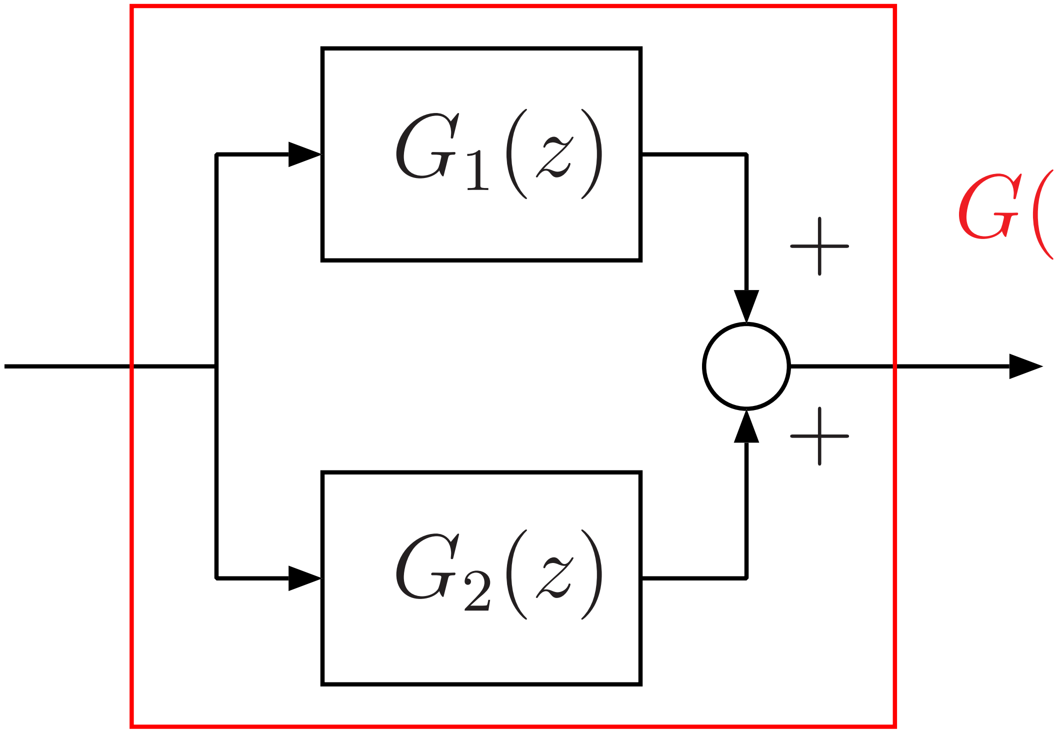
- 伝達関数を用いれば, 先ほどの入出力差分方程式は, 初期値の項を無視すると, 以下のように表現できる:

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

ただし $X(z)$ と $Y(z)$ はそれぞれ入力 x と出力 y の z 変換.

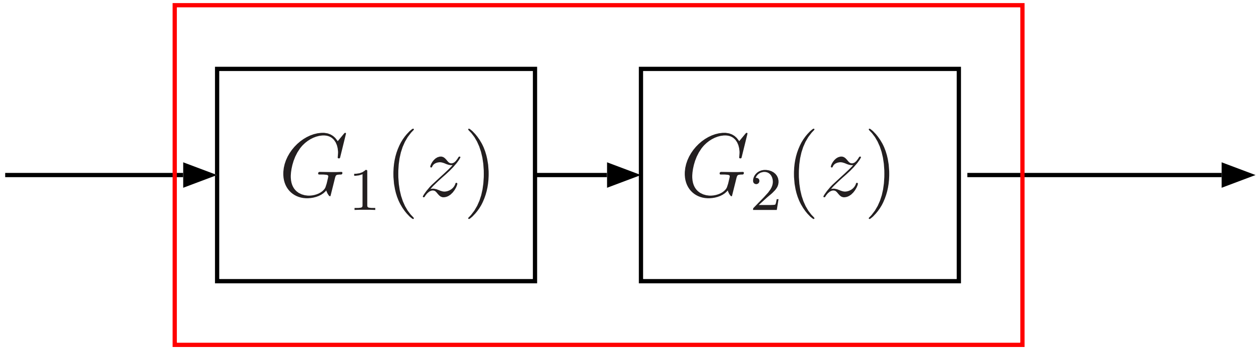
- このような表現を用いることで…
  - ▷ 線形時不変差分方程式が簡単に解ける
  - ▷ システムの縦列接続, 並列接続, フィードバック結合が簡単に表現できる

並列接続



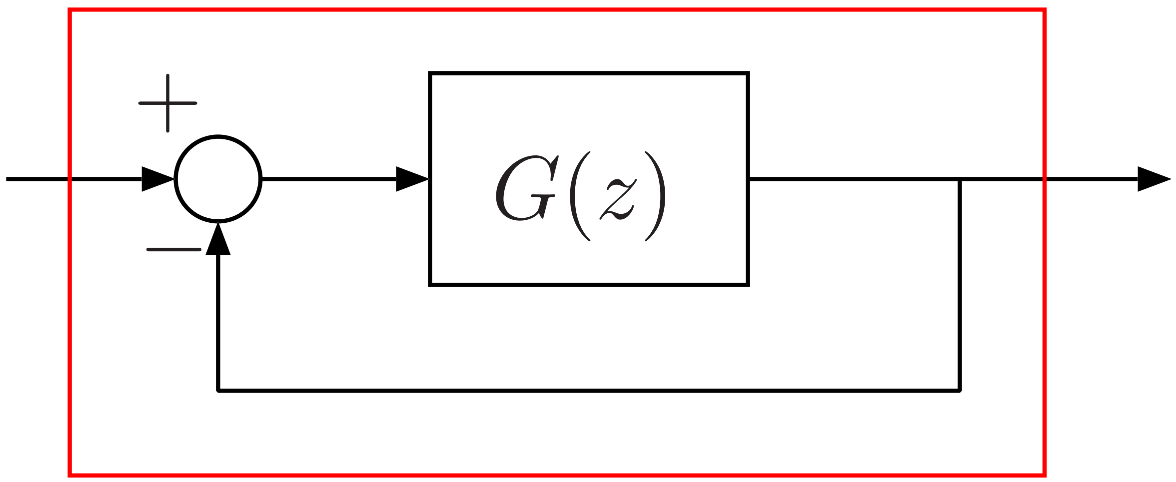
$$G(z) = G_1(z) + G_2(z)$$

直列接続



$$G(z) = G_1(z)G_2(z)$$

フィードバック接続



$$G(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)}$$

§z 変換とローラン展開の関係

$\boxed{\textbf{定理 6.2(再掲)}}$ $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$ とし, 関数 $f(z)$ は円環領域 $D = \{z : R_1 < |z - \alpha| < R_2\}$ で正則であるものとする. このとき, $f(z)$ は D において $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - \alpha)^n$ という形に一意的に展開され, $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|\zeta - \alpha| = r} \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} d\zeta$ となる $(R_1 < r < R_2)$.

- z 変換に対応するのは, $\alpha = 0$ (展開の中心が原点) の場合なので, 先ほどの定理で $\alpha = 0$ としたものを改めて書いておく.

定理 6.2($\alpha = 0$ の場合) $0 \le R_1 < R_2 \le \infty$ とし, 関数 $f(z)$ は円環領域 $D = \{z : R_1 < |z| < R_2\}$ で正則であるものとする. このとき, $f(z)$ は D において $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ という形に一意的に展開され, $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|\zeta|=r} \dfrac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$ となる $(R_1 < r < R_2)$.

- $c = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ とする. 関数 $f(z)$ から

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta$$

によって数列 $c = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ を得る手順は, 関数 $f(z)$ を数列 $c = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ に写す作用素と解釈できる. 記号的に, この作用素を (この資料だけの記法であるが) $\mathcal{Y}[f]$ と書く.

- 数列 $c=(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ が与えられているとき,

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

によって (整級数が収束する領域で) 解析関数 $f(z)$ を得る手順は, 数列 $c=(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ を関数 $f(z)$ に写す作用素と解釈できる．記号的に, この作用素を $\mathcal{Y}^{-1}[c]$ と書く.

- 定理 6.2($\alpha = 0$ の場合) は,

  1. 関数 f を $\mathcal{Y}[\cdot]$ によって数列 c に写す
  2. 数列 c を $\mathcal{Y}^{-1}[\cdot]$ によって関数に写すと, もとの関数 f が復元される

  ということを述べている. もとに戻せるのだから, $\mathcal{Y}$ と $\mathcal{Y}^{-1}$ は互いに逆作用素である

- 以上のように, ローラン展開は, $f = \mathcal{Y}^{-1}[\mathcal{Y}[f]]$ という等式と解釈できるが⋯
- 概念的には, 数列 $x = (x(n))_{n \in Zset}$ に対し, これを $x = \mathcal{Y}[\mathcal{Y}^{-1}[x]]$ という形で使うのが z 変換.
- 数列を z 変換する作用素を $\mathcal{Z}[\cdot]$, その逆作用素を $\mathcal{Z}^{-1}[\cdot]$ と書くと, 概念的には, $\mathcal{Z}[\cdot] = \mathcal{Y}^{-1}[\cdot]$, $\mathcal{Z}^{-1}[\cdot] = \mathcal{Y}[\cdot]$.

- 概念的と断った理由は, z の冪の正負の付け方がローラン展開と z 変換では逆になっているから．これは歴史的経緯が原因.
- ローラン展開の c_n の決め方を

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta \qquad (z\ \text{変換用書き換え})$$

のように変更すれば, z 変換と同一になる.

z 変換が収束する領域

- z 変換が収束する領域を求めるには, 無限級数の正の冪の部分と負の冪の部分に対して講義第 06 回で述べた方法で収束半径を計算する.
- 負の冪の項:$R_1 = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x(n)|}$.
- 正の冪の項: $R_2 = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x(-n)|}}$.

- 負の冪の項については, $|z| > R_1$ であれば収束する (z のべきが負なので, 収束半径に関する不等号も反転する)
- 正の冪の項については, $|z| < R_2$ であれば収束する
- よって, z 変換は, $R_1 < |z| < R_2$ の領域で解析関数を定める

- $R_1 < R_2$ であることは必ずしも保証されない. $R_2 \le R_1$ の場合にはその信号の z 変換は定義できない.
- 片側 z 変換では R_2 に関する条件は存在しない. よって, z 変換は, $R_1 < |z|$ の領域で解析関数を定める. したがって, $(z(n))_{n\in\mathbb{N}}$ が指数関数によって上から押さえられる場合には, $|z|$ を十分大きく取れば z 変換は収束する.

- 今述べた意味で, 片側 z 変換は両側 z 変換よりも使いやすい.

逆 z 変換

- 信号 $X(z)$ を逆 z 変換するには, ローラン展開の係数を求めればよい.
- ローラン級数 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$ の係数は,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$$

によって求められる.

- z 変換ではローラン展開と冪の符号が逆に取られていたから…

$$x(n)(=c_{-n})=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}f(\zeta)\zeta^{n-1}d\zeta.$$

- ローラン展開とやっていることは同じなので, 改めて証明する必要はない.

片側 z 変換の例

- 信号 x が, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し, $x(n) = a^n, n \geq 0$ となっているものとする．これは $n \geq 0$ に対して指数関数である．信号は因果的, すなわち $n < 0$ に対し $x(n) = 0$ と仮定する．

- x を Z 変換すると，上述のように $D_x = \{z : |z| > |a|\}$ で，この領域で

$$\mathcal{Z}[x] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a^n}{z^n} = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}}.$$

- 単位ステップ u ($n < 0$ で $u[n] = 0$, $n \geq 0$ で $u[n] = 1$ となる信号) は, 指数関数において $a = 1$ とした場合だから,

$$\mathcal{Z}[u] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}}.$$