電 210 電気数学 IV
第 13 回
留数と実積分への応用 (1)

- 今回および次回の講義では, 教科書第 7 章以外に, これまでの講義でやり残した事項についても説明してゆく
- 講義に記載されていない事項も取り扱う

留数 (1) (p.254)

定義 7.1 α が $f(z)$ の孤立特異点で，C は α を内部に含む単一閉曲線で，$f(z)$ は C の内部の α 以外の点で正則であるとする．このとき，$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C f(z)dz$ を $f(z)$ の α における**留数**といい，$\mathrm{Res}\,(f,\alpha)$，$\mathrm{Res}\,(f(z),\alpha)$，$\mathrm{Res}\,(\alpha)$，$\mathrm{Res}\,f(\alpha)$ などと書く．

- $f(z)$ の $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-\alpha| < R\}$ における ローラン展開が $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$ で与えられているものとする

- $n \neq -1$ であれば $(z-\alpha)^n$ は原始関数 $\frac{(z-\alpha)^{n+1}}{n+1}$ を持つから, 定理 5.10 (p.171) より, $\int_C (z-\alpha)^n dz = 0$ である.

- 一方, $(z-\alpha)^{-1}$ は α の近傍全体では原始関数を持たず, 例 5.3(pp.160∼161) か演習 11-1 より, $\int_C (z-\alpha)^{-1}dz = 2\pi i$ である.

- 以上によって, $\int_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n = 2\pi i c_{-1}$ である. すなわち, $\mathrm{Res}\,(f,\alpha) = c_{-1}$ である.

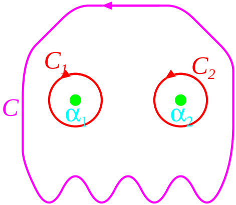
- 以上の事実は重要なので, 改めて命題の形で述べておく.

命題 α が $f(z)$ の孤立特異点で, $f(z)$ が $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - \alpha| < R\}$ で正則で, D における $f(z)$ のローラン展開が $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n$ で与えられているとき $\mathrm{Res}\,(f, \alpha) = c_{-1}$ である.

留数 (2) (p.255)

定理 7.1 C を単一閉曲線とし, $f(z)$ は C の内部に有限個の孤立特異点 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ を持ち, f は C およびその内部を含む領域から $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ を除いた点で正則であるものとする. このとき, 次式が成り立つ:
$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}\,(f, \alpha_k)$$

証明　定理 5.21(p.189) を使い, 積分路を C から $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ を囲む円 $C_1, \ldots, C_m$(正の向きをつける) に取り換えればよい. それぞれの円は, 互いに交わらず, C とも交わらないように取る (図は 2 個の孤立特異点 α_1, α_2 の場合).



留数 (3) (p.257)

定理 7.2 点 α が $f(z)$ の 1 位の極であれば, $\mathrm{Res}\,(f,\alpha) = \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z)$ である. また, 点 α が $f(z)$ の k 位の極であれば,

$$\mathrm{Res}\,(f,\alpha) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to\alpha}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}((z-\alpha)^k f(z))$$

である.

証明　α が $f(z)$ の k 位の極であれば, $f(z)$ のローラン展開は $f(z)=\sum_{n=-k}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$ である. よって, $(z-\alpha)^k f(z)=c_{-k}+c_{-k+1}(z-\alpha)+\cdots+c_{-1}(z-\alpha)^{k-1}+\cdots+c_0(z-\alpha)^k+\cdots$ であり, これを $k-1$ 回微分すると $(z-\alpha)$ の $k-2$ 次以下の項は消えるから, $\dfrac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left((z-\alpha)^k f(z)\right)=c_{-1}(k-1)!+c_0\dfrac{k!}{2!}(z-\alpha)+\cdots$ となる. さらに $z\to\alpha$ とすると右辺の $z-\alpha$ の 1 次以上の項は消えるから,

$$\lim_{z\to\alpha}\left(\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left((z-\alpha)^k f(z)\right)\right)=c_{-1}(k-1)!$$

となる.

演習 13-1

空欄を埋め, 正しいと思う方を選択せよ.

演習 13-1 解答

$\mathrm{Res}\,(f,\alpha) = \boxed{0}$, $z=1$ は $f(z)$ の $\boxed{3}$ 位の極,

$$\frac{1}{\boxed{2}!}\lim_{z\to 1}\left(\frac{d^{\boxed{2}}}{dz^{\boxed{2}}}(z-1)^{\boxed{3}}(z-1)^{-3}\right) = \boxed{0}$$

$\mathrm{Res}\,(f,\alpha) = \boxed{0}$, 一致$\boxed{\text{する}}$.

演習 13-2

空欄を埋めよ.

演習 13-2 解答

$g_1(-1) = \boxed{1/2} \neq 0$, $z = -1$ は $f(z)$ の $\boxed{1}$ 位の極

$g_2(1) = \boxed{1/2} \neq 0$, $z = 1$ は $f(z)$ の $\boxed{1}$ 位の極

$\mathrm{Res}\,(f, -1) = \boxed{1/2}$, $\mathrm{Res}\,(f, 1) = \boxed{1/2}$,

$\int_C f(z)dz = \boxed{2\pi i}$

演習 13-3

空欄を埋めよ.

演習 13-3 解答

z^2 の係数は $\boxed{A+B+C}$,
z の係数は $\boxed{B-C}$, 定数項は $\boxed{-A}$;
$\boxed{A+B+C}=0$, $\boxed{B-C}=0$, $\boxed{-A}=1$,
$A=\boxed{-1}$, $B=\boxed{1/2}$, $C=\boxed{1/2}$
$\displaystyle\int_C f(z)dz=\boxed{0}$ となる.

コーシーの積分定理の証明

コーシーの積分定理 (定理 5.16) は定理 5.17 から導かれるので, 定理 5.17 を証明すればよい.

定理 5.17　領域 D が単連結で, $f(z)$ が D において正則ならば, D 内の任意の閉曲線 C に対し, 以下が成り立つ.

$$\int_C f(z)dz = 0$$

証明の手順　　最初のステップを除き, 証明の手順は教科書 pp. 193〜198 と異なる: 定理 5.17 の仮定のもとで…

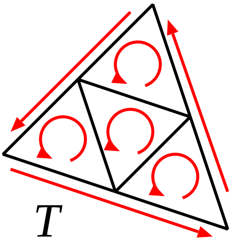
(1) 積分路が三角形の場合に定理 5.17 を証明する

(2) D 内の折れ線に沿った $f(z)$ の積分が折れ線の取り方に依存しないことを示す

(3) 上記を利用して $f(z)$ の原始関数を定義する

(4) よって, 定理 5.10 により, 定理 5.17 が示される.

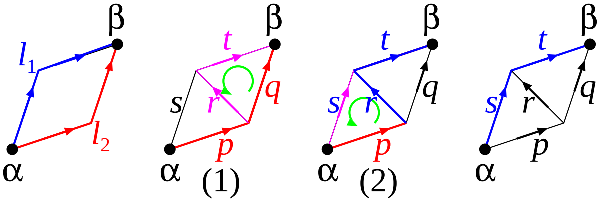
(1) D が単連結で f が D において正則なら f の D 内の三角形に沿った積分が零であることを示す．三角形を T, その外周の長さを L とし, 正の向きを付ける．$\int_T f(z)dz \neq 0$ と仮定して矛盾を導く．T の各辺を 2 等分して 4 個の三角形を作り, 正の向きを付ける．分割された三角形の中でこれに沿った f の積分の絶対値が最大のものを T_1 とすと $\left|\int_{T_1} f(z)dz\right| \geq \left|\int_T f(z)dz\right|/4$ が成り立つ．以下同様に, T_n をの各辺を 2 等分した三角形の中でこれに沿った f の積分の絶対値が最大のものを T_{n+1} とする．この手順 1 回ごとに辺の長さは 1/2 になるから, すべての T_n の共通部分は一点である．この点を α とする．


T

まず, $\left|\int_{T_n} f(z)dz\right| \geq \left|\int_T f(z)dz\right|/4^n$ であることに注意する. 次に, $f(z)$ は α で正則だから, いくらでも小さい ε に対し, α の除外近傍を, この除外近傍において $f(z) - f(\alpha) - f'(\alpha)(z-\alpha) = r(z,\alpha)$, $\|r(z,\alpha)\| < \varepsilon|z-\alpha|$ となるように取ることができる. n を T_n がこの近傍に含まれるように十分大きく取る. T_n の外周の長さを L_n とすると, $L_n = 2^{-n}L$ である. また, z と α はともに T_n の内部あるいは外周に含まれるから, $|z-\alpha| \leq L_n/2 = 2^{-(n+1)}L$ である. $\int_{T_n} f(z)dz = \int_{T_n}(f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha) + r(z,\alpha))\,dz$ であるが, $f(\alpha)+f'(\alpha)(z-\alpha)$ は原始関数 $f(\alpha)z+(1/2)f'(\alpha)(z-\alpha)^2$ を持つから, 定理 5.10 により, $\int_{T_n}(f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha))\,dz = 0$ である.

よって, $\left|\int_{T_n} r(z,\alpha)dz\right| \le \varepsilon 2^{-(n+1)} L \int_{T_n} d\zeta = (\varepsilon/2)4^{-n}L^2$ だから, 先の結果とまとめると $\left|\int_{T_n} f(z)dz\right| \le (\varepsilon/2)4^{-n}L^2$ である. 一方, 先ほど $\left|\int_{T_n} f(z)dz\right| \ge \left|\int_T f(z)dz\right|/4^n$ となることを見た. ε は必要に応じていくらでも小さく取れるから, $\left|\int_T f(z)dz\right| \ne 0$ であれば矛盾が発生する. したがって $\left|\int_T f(z)dz\right| = 0$ でなければならない.

(2) 定義域 D は連結開集合だったから, D の内部の 2 点は D 内の曲線で結べるが, 実はこの曲線を折れ線にすることもできる (これを厳密に示すには, D 内の一点 α から D 内の曲線を伝って到達できる点の集合と折れ線を伝って到達できる集合が同一であることを見ればよい). さて, α, β を D の内部の 2 点, l_1, l_2 が α と β を結ぶ D 内の折れ線とし (α から β に向かうように向きを付ける), $\int_{l_1} f(z)dz = \int_{l_2} f(z)dz$ であることを見る. 厳密には折れ線に含まれる点の数に関する数学的帰納法で証明するが, 考え方は α と β のあいだに点が 1 個しかない場合でも同じなので, この場合について, 次ページに l_2 に沿った積分が l_1 に沿った積分に置き換わる様子を示す.



l_2 に沿った積分が l_1 に沿った積分に置き換わる様子: (1) q に沿った積分は r に沿った積分と t に沿った積分の和に等しい, (2) p に沿った積分と r に沿った積分の合計は s に沿った積分と等しい

(3) $xi_0 \in D$ を固定する. z を D の内点とし, ξ_0 と z を結ぶ折れ線 $L(\xi_0, z)$ を取り, $F(z) = \int_{L(\xi_0,z)} f(\xi)d\xi$ と定義する. (2) で見たように, この積分は折れ線の取り方に依存しない. $F(z)$ が微分可能で $F'(z) = f(z)$ であることが示せれば, 定理の証明は完成する. h を十分小さく取れば, z と $z+h$ を結ぶ直線 $S(z, z+h)$ が D に含まれるように取れる. そこで, ξ_0 と $z+h$ を結ぶ折れ線として, $L(\xi_0, z)$ と $S(z, z+h)$ を継ぎ足したもの $(L(\xi_0, z) + S(z, z+h))$ を取る. すると, $|F(z+h) - F(z) - f(z)h| = \left|\int_{S(z,z+h)}(f(\xi) - f(z))d\xi\right| \leq \int_{S(z,z+h)} |f(\xi) - f(z)|d\xi$ で, h を小さく取れば $S(z, z+h)$ 上で $|f(\xi) - f(z)|$ はいくらでも小さくできるから, $\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z)$ である. すなわち, $F(z)$ は微分可能で, $F'(z) = f(z)$ である. (証明終)

代数学の基本定理 (p.213)

定理 5.29 $f(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0$ としたとき (ただし $n \geq 1, c_n \neq 0$), 複素係数の代数方程式 $f(z) = 0$ は複素数の範囲に少なくともひとつ解を持つ.

系 複素係数の多項式 $f(z)0$ は複素数の範囲で 1 次の多項式の積で書き表せる.

定理 5.29 の証明は後回しにして, まず定理 5.29 から系が導かれることを見ておく. $g_n(z) = f(z)/c_n$ とする. $g_n(z)$ は最高次の係数が 1 の多項式である. 定理 5.29 より $g_n(z) = 0$ は少なくともひとつの解 α を持つ. $g_n(z)$ を $z - \alpha$ で割った余りを β とすると, $g(z) = (z - \alpha)g_{n-1}(z) + \beta$ となるが ($g_{n-1}(z)$ は $n - 1$ 次の多項式), この両辺に $z = \alpha$ を代入すると $0 = g_n(\alpha) = \beta$ となり, よって $g_n(z)$ は $z - \alpha$ で割り切れる. $g_n(z)$ から $g_{n-1}(z)$ を作るとき次数が 1 下がったから, 同様の手順を $n - 1$ 繰り返すことにより, $g_n(z)$ は 1 次の多項式の積で書き表せる. したがって, その定数倍である $f(z)$ も 1 次の多項式の積で書き表せる.

次に, $|f(z)|$ が $\mathbb{C}$ のどこかで最小値を取ることを示す. $f(0) = c_0$ であり, $M = \max\{|c_i| : 0 \leq i \leq n-1\}$, $R = \max\{1, M(n-1) + 1 + |c_0|\}/|c_n|$ とおいて $|z| \geq R$ とすると,

$$\begin{aligned}|f(z)| &\geq |c_n||z|^n - \left(\sum_{i=0}^{n-1} |c_i||z|^i\right) \geq |c_n||z|^n - (n-1)|z|^{n-1}M \\ &= |z|^{n-1}\left(|c_n||z| - (n-1)M\right) \geq 1 + |c_0|\end{aligned}$$

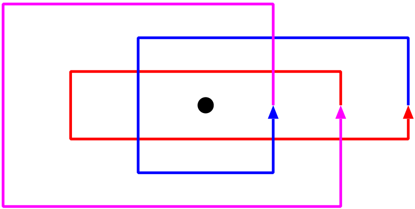
だから, $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ とすると, E はコンパクトだから $|f(z)|$ は E のある点 z_0 で最小値 γ を取る. $|f(0)| = |c_0|$ だから, $\gamma \leq |c_0|$ であり, E の補集合上では $|f(z)| \geq 1 + |c_0|$ だから, γ は $f(z)$ の $\mathbb{C}$ における最小値である.

以上を利用して定理 5.29 を証明する．$\gamma = 0$ なら $f(z_0) = 0$ だから, $f(z) = 0$ は解を持つ．よって, $\gamma \neq 0$ と仮定して矛盾を導く．$\gamma \neq 0$ なら $g(z) = 1/f(z)$ は解析関数である．E はコンパクトだから $|g(z)|$ は E で有界で, E の補集合では $|g(z)| = 1/|f(z)| \leq 1/(1+|c_0|)$ だから, $|g(z)|$ は $\mathbb{C}$ 全体で有界である．$\forall z, |g(z)| < N$ とする．$g(z)$ は解析関数だからテイラー展開でき, これを $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ とすると, 系 6.1(p.222) により, $a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta$ である. 積分路は $\zeta(t) = re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ であり, $|f(z)| < N$ だから, $|a_k| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| \frac{f(re^{it})}{r^{k+1}e^{i(k+1)t}} ire^{it} \right| dt \leq \frac{N}{r^k}$ である. r は任意だから, $\forall k \geq 1, a_k = 0$ であり, よって $g(z)$ は定数, したがって $f(z) = 1/g(z)$ も定数となり, $n \geq 1$ という仮定に矛盾する．

(証明終)

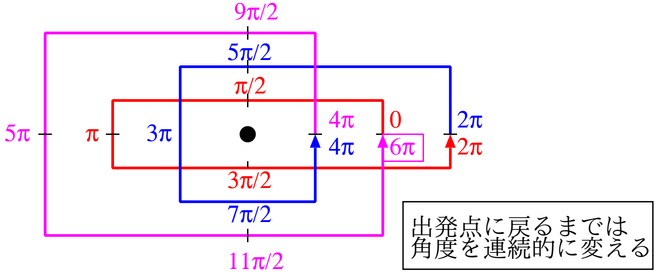
- コーシーの積分定理の証明や代数学の基本定理は演習の対象としないし, 試験にも出さない

回転数



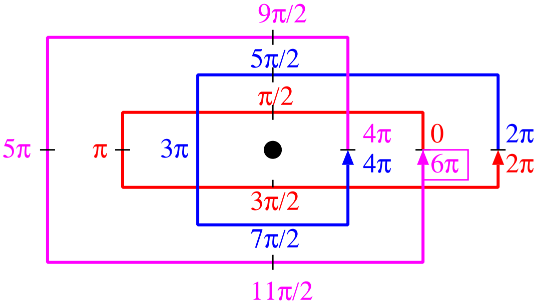
ある点を何回も回る閉曲線を考える

- この点を閉曲線が何周したかを数えたいが…
- 偏角の主値を使うと, 値域が $(-\pi, \pi]$ になっている関係でうまくいかない
- 主値を使うのをやめて, 角度が (弧長などをパラメータとして) 連続的に変化するようにすれば, 曲線がもとに戻ったときの角度から回った回数がわかる



角度をこのように連続的に変えれば, 始点の「角度」と終点の「角度」の差を 2π で割ると回転の回数が出る

曲線 $C : z = z(t)\ (a \leq t \leq b)$ が与えられているとき, 曲線 C 上にない点 $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し, $\theta(a) = \mathrm{Arg}\,(z(a) - \alpha)$, $\theta(t) = \mathrm{Arg}\,(z(t) - \alpha) + 2n(t)\pi$ とし, $n(t)$ を $\theta(t)$ が t とともに連続的に変わるように調整する


9π/2
5π/2
π/2
5π
π
3π
4π
0
2π
4π
6π
2π
3π/2
7π/2
11π/2

$\theta(t)$ が t とともに連続的に変わるように調整されているとき, 閉曲線 (始点と終点が同じ) については, $(\theta(b)-\theta(a))/(2\pi)$ を計算すれば, その閉曲線が始点から動き始めて始点に戻るまでに点 α のまわりを何周したかがわかる.

定義 以上の記法のもとで, $\dfrac{\theta(b)-\theta(a)}{2\pi}$ を, 曲線 C の点 α に関する回転数と呼び, $n(C,\alpha)$ と書く.

- 以下の議論では, $\theta(t)$ が滑らかな関数となっていることを仮定する (「区分的に滑らか」でも構わないが, その場合には積分の区間を適当に分割する必要が生じる).
- この仮定のもとで, 次の定理が成り立つ.

定理 閉曲線 C の回転数は, $n(C,\alpha) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{1}{z-\alpha}dz$ により与えられる.

証明の準備:

- 曲線を $C : z = z(t)\ (a \leq t \leq b)$ とし, $\theta(t)$ が先ほどと同様に定義されているものとする.
- 対数関数の分枝は適当に調整するものとする

証明 $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{z-\alpha}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{1}{z(t)-\alpha}z'(t)dt = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{d}{dt}\log(z(t)-\alpha)dt$ である. $r(t) = |z(t)-\alpha|$ とすると, $z(t)-\alpha = r(t)e^{i\theta(t)}$ と書け, $\log(z(t)-\alpha) = \ln r(t) + i\theta(t)$ なので, $\frac{d}{dt}\log(z(t)-\alpha) = \frac{d}{dt}\ln r(t) + i\frac{d\theta}{dt}$ である. よって, $\int_a^b \frac{d}{dt}\log(z(t)-\alpha)dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\ln r(t)dt + i\int_a^b \frac{d\theta}{dt}dt = (\ln r(b) - \ln r(a)) + i(\theta(b)-\theta(a))$ であるが, C は閉曲線だから $r(b) = r(a)$. よって, $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{z-\alpha}dz = \frac{i(\theta(b)-\theta(a))}{2\pi i} = n(C,\alpha)$ となる.

一般的には, $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \dfrac{1}{z-\alpha}dz$ によって回転数を定義する. このようにすることには「角度 $\theta(t)$ を t とともに連続的に変える」という議論が不要となるという利点があるが, この講義では, 幾何学的な直観を優先し, $\theta(t)$ を使って回転数を定義した.

回転数を導入することの利点:

- ジョルダンの曲線定理 (定理 5.1, p.157) に関する面倒な議論が不要になる
- コーシーの積分公式 (系 5.3, p.201) を, 単一閉曲線とは限らない, 一般的な閉曲線について述べることができ, かつ曲線の向きをいちいち気にする必要もなくなる.

$\boxed{\text{定理 (コーシーの積分公式, 一般形)}}$ $f(z)$ が領域 D で正則で，閉曲線 C が $\alpha \notin D$ なら $n(C,\alpha)=0$ という条件を満たすとき, $\forall z \in D \setminus C$,

$$n(C,z)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

詳細は杉浦, 解析入門 II, 東京大学出版会, 1985. 回転の数と向きに関する情報がすべて左辺の $n(C,z)$ という項に集約されていることに注意.

- 回転数に関連した応用上重要な原理に,「偏角の原理」というものがあるが, 教科書では 251 ページで名前が紹介されているのみで, 議論されていない; 以下でこれについて述べる

- 以下では, ふたたび C は正に向き付けられた単一閉曲線であると仮定し, $C : z = z(t)$ $(a \leq t \leq b)$ とパラメータ表示されているものとする.

- 関数 $f(z)$ は z の有理関数で, 曲線 C 上には極および零点を持たず, C の内部に, 重複度も含めて, Z 個の零点と, P 個の極を持つものとする.

- 以上の準備のもとで, 次の定理が成り立つ.

定理 (偏角の原理) $$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = Z - P$$

となる．さらに, $f(z(t))$ の偏角を t に関して連続に変化するように調整したものを $\theta(z(t))$ とすると, $\dfrac{\theta(z(b)) - \theta(z(a))}{2\pi} = Z - P$ となる．

証明 (1) $\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \int_a^b \frac{f'(z(t))}{f(z(t))}z'(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\log f(z(t))dt$ で, C が閉曲線だから, $\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = i(\theta(b) - \theta(a))$ である. $f(z)$ の零点を $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, 極を $\beta_1, \ldots, \beta_q$ とする. α_i の重複度を m_i, β_j の重複度を n_j とする ($1 \le i \le p, 1 \le j \le q$, 以下同じ). 零点 α_i を囲み他の零点あるいは極を囲まない正の向きの円を $C_{1,i}$, 極 β_j を囲み他の零点あるいは極を囲まない正の向きの円を $C_{2,j}$ とする. これらの円の半径は, 他の円と重ならないように十分小さく取っておくものとする. このとき, $\frac{f'(z)}{f(z)}$ は C の内部から $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, $\beta_1, \ldots, \beta_q$ を除いた領域で正則だから, 定理 5.21(p.189) により, $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^p \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{1,i}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \sum_{j=1}^q \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{2,j}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ である.

証明 (2)　$C_{1,i}$ における積分を評価する．$f(z) = (z-\alpha_i)^{m_i} g(z)$ で，α_i の近傍で $g(z)$ は零でないから，$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_i(z-\alpha)^{m_i-1}g(z)+(z-\alpha)^{m_i}g'(z)}{(z-\alpha)^{m_i}g(z)} = \frac{m_i}{z-\alpha_i} + \frac{g'(z)}{g(z)}$ で, α_i の近傍で $\frac{g'(z)}{g(z)}$ は正則である. よって, 例 5.12(p.188) および定理 5.17(p.184) より, $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{1,i}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = m_i$ である.
次に，$C_{2,j}$ における積分を評価する．$f(z) = g(z)/(z-\beta)^{n_j}$ で，β_j の近傍で $g(z)$ は零でなく正則だから，$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-n_j(z-\beta)^{-n_j-1}g(z)+(z-\beta)^{-n_j}g'(z)}{(z-\beta)^{-n_j}g(z)} = \frac{-n_j}{z-\beta_j} + \frac{g'(z)}{g(z)}$ で，β_j の近傍で $\frac{g'(z)}{g(z)}$ は正則である．よって，例 5.12(p.188) および定理 5.17(p.184) より, $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{2,j}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -n_j$ である.
これらをすべての極と零点について足し合わせると定理の結論が得られる.

ナイキストの安定判別法

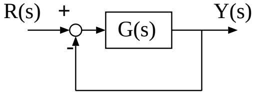
- 常微分方程式 $\frac{dy}{dt} = ay(t) + bu(t)$ を考える.
- 初期値を $y(0)$ とすると, この微分方程式の解は $y(t) = e^{at}y(0) + \int_0^t e^{a(t-s)}bu(s)ds$ と書ける.
- 両辺をラプラス変換すると, $Y(s) = G(s)U(s)$, $G(s) = \frac{1}{s-a}$ となる.

- a の実部が正なら, 小振幅の入力 $u(t)$ が印加されたとき, $y(t)$ が無限大に発散することがある (不安定)
- a の実部が負なら, このようなことはない (安定)
- 「$y(t)$ が無限大に発散」というのは, 物理的には, 装置が壊れることを意味するから, 望ましくない

- 話を一般化して，入力を $u(t)$，出力を $y(t)$ とし，$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b_m u^{(m-1)} + \cdots + b_0 u$ を満たすシステムを考える (物理的なシステムでは $n \geq m$).

- ラプラス変換すると, $Y(s) = G(s)U(s)$, $G(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}$ となる (伝達関数表現)．$G(s)$ の分母多項式を $D(s)$, 分子多項式を $N(s)$ と書く.

- $G(s)$ が右半平面に極を持つと, このシステムは不安定となり, 問題である.
- 以下のフィードバックにより, このシステムを安定とすることが可能か否かを考える.

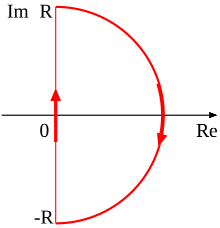


$Y(s) = G(s)(R(s) - Y(s))$ を整理すると, $Y(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} R(s)$ となる.

- $1+G(s)=\frac{D(s)+N(s)}{D(s)}$, $\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{N(s)}{D(s)+N(s)}$ だから, $\frac{G(s)}{1+G(s)}$ の極は $D(s)+N(s)$ の零点すなわち $1+G(s)$ の零点と一致する．よって $1+G(s)$ が右半平面に零点を持たなければ $\frac{G(s)}{1+G(s)}$ は安定.

- $1+G(s)$ が右半平面に極を P 個, 零点を Z 個持つものとする (m 位の極あるいは零点は m 個と数える) 虚軸上には極も零点も持たないものと仮定する), $1+G(s)$ の周波数応答で $\frac{G(s)}{1+G(s)}$ の安定性を判定する問題を考える.

$n \geq m$ だから，$|s|$ が大きいとき，$G(s)$ は定数に近付く．そこで，右の図のような積分路で，$R \to \infty$ とした極限を考える．R を十分大きく取れば，$1 + G(s)$ の極および零点はすべてこの積分路の中に含まれる．積分路が負の向きであることに注意する．



- 偏角の原理 ($\frac{\theta(\infty)-\theta(-\infty)}{2\pi} = P-Z$) より, ω を $-\infty$ から ∞ まで動かしたとき, $1+G(i\omega)$ の軌跡が原点を反時計回りに P 回だけ回れば, $\frac{G(s)}{1+G(s)}$ は安定 (ナイキストの安定判別法).

- ω を $-\infty$ から ∞ まで動かしたとき, $G(i\omega)$ の軌跡が -1 を反時計回りに P 回だけ回れば, $\frac{G(s)}{1+G(s)}$ は安定とも言える (全体を -1 平行移動する)

- ナイキストの安定判別法は, 対象の周波数応答を測れば安定性の判別ができるという意味で, 有用な方法