工共 212 工業数学 IV
第 13 回
留数と実積分への応用 (1)

演習 13-1 解答 (1)

1. $f(z) = \begin{cases} 1, & z = 0, \\ z, & z \neq 0, \end{cases}$,
   $z = 0$ は $\boxed{\text{除去可能特異点である}}$
2. $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $z = 0$ は $\boxed{\text{極である}}$.

演習 13-1 解答 (2)

3. $f(z) = e^{1/z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$,
   $z = 0$ は $\boxed{\text{真性特異点である}}$.
4. $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n \ (= \frac{1}{1-z})$ ($|z| < 1$ のとき),
   $z = 0$ は $\boxed{\text{特異点でない}}$.

演習 13-2 解答 (1)

1. $f(z) = z$ に対し, $z = 0$ は $f(z)$ の $\boxed{\text{1 位の零点である}}$.
2. $f(z) = z^2 + z^3$ に対し, $z = 0$ は $f(z)$ の $\boxed{\text{2 位の零点である}}$.
   ($f(z) = z^2(1+z)$ で $\varphi(z) = 1 + z$ とすると $\varphi(0) \neq 0$).

演習 13-2 解答 (2)

1. $f(z) = z^2 - 2z + 1$ に対し, $z = 1$ は $f(z)$ の $\boxed{\text{2 位の零点である}}$. ($f(z) = (z-1)^2$)
2. $f(z) = z^2 - 2z + 1$ に対し, $z = -1$ は $f(z)$ の $\boxed{\text{零点でない}}$. ($f(-1) = 4$).

演習 13-3 解答

$\mathrm{Res}\,(f, \alpha) = \boxed{0}$, $z = 1$ は $f(z)$ の $\boxed{3}$ 位の極,

$$\frac{1}{\boxed{2}!} \lim_{z \to 1} \left(\frac{d^{\boxed{2}}}{dz^{\boxed{2}}} (z-1)^{\boxed{3}} (z-1)^{-3} \right) = \boxed{0}$$

$\mathrm{Res}\,(f, \alpha) = \boxed{0}$, 一致 $\boxed{\text{する}}$.

演習 13-4 解答

$g_1(-1) = \boxed{1/2} \neq 0$, $z = -1$ は $f(z)$ の $\boxed{1}$ 位の極

$g_2(1) = \boxed{1/2} \neq 0$, $z = 1$ は $f(z)$ の $\boxed{1}$ 位の極

$\mathrm{Res}\,(f, -1) = \boxed{1/2}$, $\mathrm{Res}\,(f, 1) = \boxed{1/2}$,

$\int_C f(z)dz = \boxed{2\pi i}$

演習 13-5 解答

z^2 の係数は $\boxed{A+B+C}$,
z の係数は $\boxed{B-C}$, 定数項は $\boxed{-A}$;
$\boxed{A+B+C} = 0$, $\boxed{B-C} = 0$, $\boxed{-A} = 1$,
$A = \boxed{-1}$, $B = \boxed{1/2}$, $C = \boxed{1/2}$
$\displaystyle\int_C f(z)dz = \boxed{0}$ となる.

演習 13-6 解答 (1)

$e^{iz} = e^{-y}(\boxed{\cos x + i \sin x})$, $e^{-iz} = e^{y}(\boxed{\cos x - i \sin x})$,

$\cos z = (\boxed{\dfrac{e^{y} + e^{-y}}{2}}) \cos x + i(\boxed{\dfrac{e^{-y} - e^{y}}{2}}) \sin x$,

$\cos x = \boxed{0}$ かつ $\dfrac{e^{-y} - e^{y}}{2} = \boxed{0}$,

$x = \boxed{\pi/2 + n\pi, n \in \mathbb{Z}}$, $y = \boxed{0}$

(x については違う書き方でもよい)

演習 13-6 解答 (2)

$z=\pi/2$ において $\cos z = \boxed{0}$, $z=\pi/2$ は $1/\cos z$ の特異点で $\boxed{\text{ある}}$. また, $z=\pi/2$ の十分小さい除外近傍では, $\cos z$ は零に $\boxed{\text{ならない}}$ から, $z=\pi/2$ は $1/\cos z$ の孤立特異点で $\boxed{\text{ある}}$.

演習 13-6 解答 (3)

$$\cos(\xi + \tfrac{\pi}{2}) = -\sin\xi = \boxed{-\xi + \frac{1}{3!}\xi^3 - \frac{1}{5!}\xi^5 + \cdots}$$

$\cos z =$

$$\boxed{-(z-\pi/2) + \frac{1}{3!}(z-\pi/2)^3 - \frac{1}{5!}(z-\pi/2)^5 + \cdots}$$

(違う書き方でもよい)

演習 13-6 解答 (4)

注意: $g(z) = (1 - \frac{1}{3!}(z-\pi/2)^2 + \cdots)$ とおくと, $g(\pi/2) = 1 \neq 0$ で, $\cos z = -(z-\pi/2)g(z)$ である. $z=\pi/2$ は $\cos z$ の $\boxed{1}$ 位の零点, $z=\pi/2$ は $1/\cos z$ の $\boxed{\boxed{1\text{位の}}\text{極}}$,

定理 7.2 が適用 $\boxed{\text{できて留数は}\boxed{-1}\text{となる}}$.

演習 13-6 解答 (5)

理由: 上記注意により, $z=\pi/2$ は $1/\cos z$ の 1 位の極だから,

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\,(1/\cos z, \frac{\pi}{2}) &= \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}(z-\frac{\pi}{2})\frac{1}{-(z-\frac{\pi}{2})g(z)} \\ &= \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-g(z)} = -1\end{aligned}$$