電 210 電気数学 IV
第 12 回
関数の整級数展開

- 今回の講義の主題は関数の近似
- 抽象的な「関数」は性質がよくわからない
$\rightarrow$ わかっているもので近似したい
- 素性が良くわかっている関数: 多項式, 有理式, 三角関数$\cdots$

- 近似に使う関数が…
  - ▷ 多項式: テイラー展開
  - ▷ 有理式: ローラン展開
  - ▷ 三角関数: フーリエ展開
- この講義で取り扱うのはテイラー展開とローラン展開, フーリエ展開は扱わない (電気数学 III)

- 問題となるのは次の事項:
  - ▷ どんな場合に近似ができるか
  - ▷ どうやって近似するのか
  - ▷ 近似に使う項を増やしたとき, 近似関数がもとの関数に収束するか

上記について以下で検討してゆく

- 教科書第4章では整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ を考えた.
- 教科書第6章では, α を中心とする整級数, すなわち $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n$ を考える.
- 展開の中心が原点から α に変わるだけで, 収束に関する性質は同じ.

テイラー展開 (1)

定義　複素平面内の点 α と集合 A に対し, α と A の距離 $d(\alpha, A)$ を次のように定義する:

$$d(\alpha, A) = \inf\{|\alpha - x| : x \in A\}$$

以下では, 記号 $\displaystyle\int_{|z-\alpha|=r}$ によって, α を中心とする半径 r の円に沿った積分を表す (円には正の向きを付ける).

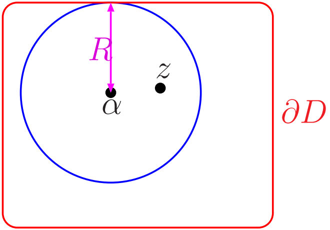
テイラー展開 (2) (p.220)

定理 6.1 (1) 　関数 $f(z)$ が領域 D で正則であるとき, $\alpha \in D$ に対し, $R = d(\alpha, \partial D)$ としたとき, 開円板 $U_R(a) = \{z : |z - \alpha| < R\}$ において $f(z)$ は α を中心とする整級数へと一意的に展開される.

テイラー展開 (3) (p.220)

定理 6.1 (2) この整級数を $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$ とすると, c_n は次式で与えられる (ただし r は $0 < r < R$ であればどのように取ってもよい):

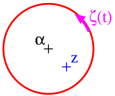
$$c_n = \frac{f^{(n)}}{n!}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-\alpha|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}} d\zeta$$



R を境界 ∂D にぶつからない
範囲で目一杯大きく取る

- 定理 6.1 の証明は (この講義では) 前回の定理 5.25 の証明の際にほぼ終わっている

以下に若干記法を変えて再掲するが, 右のような状況を思い出しておくこと (積分路は α を中心とする円, $\zeta(t)$ は円周上を動き, z は円の内部)



$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - \alpha}\frac{1}{1 - \frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}} = \frac{1}{\zeta - \alpha}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\right)^n\right)$$

は $|z-\alpha| < |\zeta - \alpha|$ なので C 上で一様収束し, よって

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-\alpha|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-\alpha}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\right)^n\right)d\zeta$$

は項別に積分できるから, 収束する整級数となる. よって無限回微分可能 (ここまで再掲). これを次のように書き直す.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{|\zeta-\alpha|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}d\zeta\right)(z-\alpha)^n$$

- 系 5.5 で z を α に変えると
  $f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{|\zeta-\alpha|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}d\zeta$

- よって, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n$ となっている

- $c_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$ とすれば定理 6.1 の形になる

- 一意性については, 整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$ は収束半径の内部では項別に微分できるので, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$ とおくと, $f^{(k)}(\alpha) = k!c_k$ となることからわかる.

テイラー展開 (3) (p.220)

定義　定理6.1の整級数展開を関数 $f(z)$ の α を中心とするテイラー級数展開あるいはテイラー展開という:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$$

テイラー展開 (4) (p.222)

定義 $\alpha = 0$ としたときのテイラー展開をマクローリン級数展開あるいはマクローリン展開という (系 6.1).

定理 6.1 と同じ記号のもとで,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

としたとき,

$$c_n = \frac{f^{(n)}}{n!}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$$

(ただし $0 < r < R$) である.

演習 12-1

空欄を埋めよ.

演習 12-1 解答 (1)

$$\frac{1}{0!}\operatorname{Log} z\Big|_{z=1} = \boxed{0},$$

$$(\operatorname{Log} z)' = \boxed{z^{-1}},\ \frac{1}{1!}(\operatorname{Log} z)'\Big|_{z=1} = \boxed{1},$$

$$(\operatorname{Log} z)'' = \boxed{-z^{-2}},\ \frac{1}{2!}(\operatorname{Log} z)''\Big|_{z=1} = \boxed{-\frac{1}{2}},$$

$$(\operatorname{Log} z)''' = \boxed{2z^{-3}},\ \frac{1}{3!}(\operatorname{Log} z)'''\Big|_{z=1} = \boxed{\frac{1}{3}},$$

演習 12-1 解答 (2)

$\mathrm{Log}\, z = \boxed{0} + \boxed{1}(z-1) + \boxed{\left(-\frac{1}{2}\right)}(z-1)^2 + \boxed{\frac{1}{3}}(z-1)^3 + \cdots$, $A = \boxed{1}$,

$\mathrm{Log}\, z = \boxed{(z-1) - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3 + \cdots}$,

一致$\boxed{\text{する}}$

演習 12-1 解答 (3)

$$B = \boxed{0},\ c_n = \boxed{\frac{(-1)^{n-1}}{n}},$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\boxed{(-1)^{n-1}(n+1)}}{\boxed{(-1)^n n}} \right| = \boxed{1}$$

ローラン展開 (1)

- テーラー展開は正則な関数の展開
- 正則でない関数を級数に展開するには, 別の工夫が必要
- たとえば $1/z$ は原点で正則でない; このような関数の展開には, べきを負の項にまで拡張するのが有効

ローラン展開 (2)

- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$ という形の級数を α を中心とするローラン級数という

- 正則関数の整級数展開では級数は α を含むある円の内部で収束したが, α において正則でない関数の級数展開では, 収束円から α を除く必要がある

ローラン展開 (3) (p.226)

定理 6.2 $0 \le R_1 < R_2 \le \infty$ とし, 関数 $f(z)$ は円環領域 $D = \{z : R_1 < |z - \alpha| < R_2\}$ で正則であるものとする．このとき, $f(z)$ は D において $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$ という形に一意的に展開され, $c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\zeta-\alpha|=r} \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}} d\zeta$ となる $(R_1 < r < R_2)$.

ローラン展開 (4) (p.226)

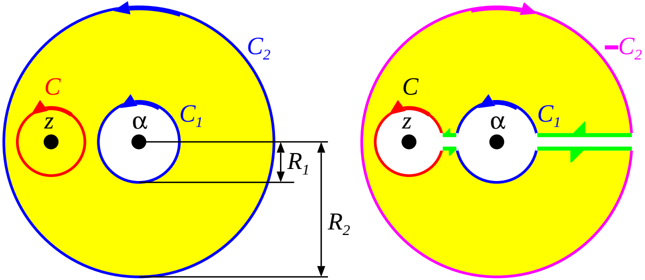
- 定理 6.2 の証明は少し後で述べる.
- 定理 6.2 の級数を D における α を中心とするローラン級数, 定理 6.2 の展開を $f(z)$ の D におけるローラン展開という.
- ローラン展開の負のべきの部分 $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-\alpha)^n$ を主要部という.

- $n < 0$ のとき, $(z-\alpha)^n$ は $z \to \alpha$ とすれば発散することに注意する (主要部はこういった項を集めたもの)

- ローラン展開の主要部は形式的には無限級数だが有限個の項を除き係数が零のこともある

- ローラン展開は D の取り方にも依存する; 定理 6.2 は「α と D を固定すればローラン展開は一意」という意味

定理 6.2 の証明: $z \in D$ を固定し, z を囲む円 C を定義域の内部に取る. α を中心とする半径 R_1 および R_2 の円を C_1, C_2 とする. すべての円には正の向きをつける. $g(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ とすると, $g(\zeta)$ は α と z 以外で正則である. そこで, C_2 の向きを反転した上で積分路に向きが逆の直線を追加し, 図の右のような積分路を考える.

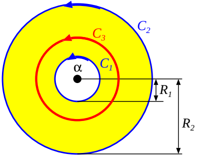

C₂
C
z
α
C₁
R₁
R₂
−C₂
C
z
α
C₁

$g(\zeta)$ はこの領域で正則だから, $\int_{C+C_1-C_2} g(\zeta)d\zeta = 0$ である．一方, $f(z)$ は円 C の内部で正則だから, 系 5.3 により, $\int_C g(\zeta)d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = f(z)$ である． よって, $f(z) = \int_{C_2} g(\zeta)d\zeta - \int_{C_1} g(\zeta)d\zeta$ である．
まず $\int_{C_2} g(\zeta)d\zeta$ を評価する． $\int_{C_2} g(\zeta)d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-\alpha}\frac{1}{1-\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\right)^n d\zeta$ であり, C_2 上で $|z-\alpha| < |\zeta-\alpha|$ だから, これは項別積分できる．したがって, $\int_{C_2} g(\zeta)d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}d\zeta\right)(z-\alpha)^n$ となる．そこで, 正の自然数 n に対し, $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}d\zeta$ とおくと, $\int_{C_2} g(\zeta)d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$ である．

次に $\int_{C_1} g(\zeta)d\zeta$ を評価する． $\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{(\zeta-\alpha)-(z-\alpha)}$ であり，これを先と同様に収束する等比級数で書き直したいのだが，C_1 上では $|\zeta-\alpha| < |z-\alpha|$ なので，これを $\frac{1}{\zeta-z} = -\frac{1}{z-\alpha}\frac{1}{1-\frac{\zeta-\alpha}{z-\alpha}} = -\frac{1}{z-\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\zeta-\alpha}{z-\alpha}\right)^{k-1}$ と書く (k を 1 から始めたのは後で計算結果をまとめるための便宜である)． さて，$\int_{C_1} g(\zeta)d\zeta = -\int_{C_1}\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)}{z-\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\zeta-\alpha}{z-\alpha}\right)^{k-1}d\zeta$ であり，C_1 上で $|\zeta-\alpha| < |z-\alpha|$ だから，これは項別積分できる． したがって，$\int_{C_1} g(\zeta)d\zeta = -\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} f(\zeta)(\zeta-\alpha)^{k-1}d\zeta\right)(z-\alpha)^{-k}$ となる． $k=-n$ とおき，$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} f(\zeta)(\zeta-\alpha)^{-n-1}d\zeta$ とすると，$\int_{C_1} g(\zeta)d\zeta = -\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-\alpha)^n$ と書ける．

$f(z) = \int_{C_2} g(\zeta)d\zeta - \int_{C_1} g(\zeta)d\zeta$ にこれらを適用すると, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$ と書ける.

c_n を求めるための積分路は $n \geq$ のとき C_2, $n < 0$ のとき C_1 であるが, 非積分関数 $f(\zeta)(\zeta-\alpha)^{-(n+1)}$ は α 以外で正則だから, 半径が R_1 以上 R_2 以下の円 C_3 に積分路を取り直し,



$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_3} f(\zeta)(\zeta-\alpha)^{-(n+1)}d\zeta$ とすることができる. 以上により, 一意性を除き, 定理 6.2 の証明が終わった.

一意性の証明は次のようにする. まず, $n \neq -1$ であれば $\int_{C_3}(\zeta-\alpha)^n d\zeta = 0$ であることを示す. $n \neq -1$ なら $\frac{d}{d\zeta}\frac{(\zeta-\alpha)^{n+1}}{n+1} = (\zeta-\alpha)^n$ であるから, $(\zeta-\alpha)^n$ は原始関数を持ち, よって定理 5.10 により $\int_{C_3}(\zeta-\alpha)^n d\zeta = 0$ である. $n = -1$ のときは, $(\zeta-\alpha)^{-1} = \frac{d}{d\zeta}\mathrm{Log}\,(\zeta-\alpha)$ であるが, $\mathrm{Log}\,(\zeta-\alpha)$ は α の近傍における連続関数ではないから, $\int_{C_3}(\zeta-\alpha)^n d\zeta$ は零にならない. この場合は, 例 5.12(あるいは演習 11-1) により, $\int_{C_3}(\zeta-\alpha)^{-1} d\zeta = 2\pi i$ となる. さて, 級数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$ が $R_1 < |z-\alpha| < R_2$ なる領域で $f(z)$ 収束するなら, この領域内のコンパクト集合で一様収束する.

このとき, このコンパクト集合において, 勝手に取った自然数 k に対し, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n(z-\alpha)^k$ は $f(z)(z-\alpha)^k$ に一様収束するから, 両辺は項別に積分できる. よって, $\int_{C_3} f(\zeta)(\zeta-\alpha)^k d\zeta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{C_3}(\zeta-\alpha)^{n+k}d\zeta$ であるが, $\int_{C_3}(\zeta-\alpha)^{n+k}d\zeta$ は $k \neq -n-1$ なら零で, $k=-n-1$ のとき $2\pi i$ だから, $\int_{C_3} f(\zeta)(\zeta-\alpha)^k d\zeta = 2\pi i c_{k-1}$ である. すなわち, c_k は $f(z)$ から一意的に決まる. (証明終)

- 先にも述べたが, ローラン展開の一意性は α と集合 $D = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - \alpha| < R_2\}$ を固定した上で証明されていたことに注意する. α や D を変えればローラン展開も変わる. これについては, 演習で実例を見る.

- 多くの場合, ローラン展開を手計算で求める技法は技巧的である.

演習 12-2

空欄を埋めよ.

演習 12-2 解答 (1)

(A) $$\frac{1}{1-z} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} z^n}, \ f(z) = \boxed{-\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1}}$$

$$\left(= -\frac{1}{z} - 1 - z - \cdots\right)$$

(B) $$\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}}, \ f(z) = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-2}}$$

演習 12-2 解答 (2)

(C) $$\frac{1}{1+(z-1)} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n},$$

$$f(z) = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{n-1}}$$

解答の書き方は以上と若干異なっていてもよい (たとえば z^{-1} を $\frac{1}{z}$ と書くなど)

孤立特異点 (1) (p.232)

定義 6.1　関数 $f(z)$ が α において正則でないとき, α を $f(z)$ の特異点という. $f(z)$ が α で正則でなく, α のある除外近傍で正則であるとき, α を $f(z)$ の孤立特異点という.

$\boxed{\textbf{定義 2.12(p.60)}}$　点 α を中心とする半径 δ の開円板を α の δ 近傍という. α の δ 近傍を $U_\delta(\alpha)$ で表す.

$\boxed{\text{定義}}$　点 α を中心とする半径 δ の開円板から α を除いたものを α の除外 δ 近傍という. δ を明示する必要がないときは単に除外近傍という.

教科書の定義 6.1 の「近傍」という用語の使い方は正確ではないので注意.

以下の議論では, α が $f(z)$ の孤立特異点で, $f(z)$ が α の R 除外近傍 $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-\alpha| < R\}$ において正則であり, この近傍において $f(z)$ がローラン級数に展開されているものとする． 以下の議論はこの近傍の取り方に依存しているので注意すること．一般的な $\{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z-\alpha| < R_2\}$ におけるローラン展開にはあてはまらないことがある．

α が $f(z)$ の孤立特異点で, $f(z)$ が α の R 除外近傍 $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-\alpha| < R\}$ において正則であり, この近傍において $f(z)$ がローラン級数に展開されているとき, 孤立特異点は, ローラン展開の主要部 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n$ を使って次のように分類される (教科書の言い回しは不正確なので注意; 以下では訂正してある)

孤立特異点 (2)

孤立特異点の分類:

- 除去可能な特異点：主要部の係数がすべて零 (定義 6.2, p.233)
- 極: 主要部が零でない有限級数: (定義 6.3, p.236)
- 真性特異点: 上記以外 (定義 6.4, p.239)

孤立特異点 (3) (p. 233)

定義 6.2 α が $f(z)$ の孤立特異点で, そのローラン展開の主要部の係数がすべて零であるとき, α を除去可能な特異点という.

- この場合は, $0 < |z-\alpha| < R$ のとき, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n$ と書ける

孤立特異点 (4) (p. 233)

- 無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$ は $z=\alpha$ でも意味を持ち, その値は c_0.
- したがって, $f(\alpha)=c_0$ と定義し直せば, $f(z)$ は解析関数になる (これが除去可能特異点という名前の由来)

孤立特異点 (5)

定理 α が $f(z)$ の孤立特異点で, $f(z)$ が $\{z : 0 < |z-\alpha| < R\}$ で正則かつ有界なら, α は $f(z)$ の除去可能特異点である.

- 定理 6.3 は教科書に述べられた形では成立しない.
- 必要十分条件の形のリーマンの定理は, たとえば 杉浦, 解析入門 II, 定理 4.3(pp.272∼273) で述べられており, 上記はこれの一部.

証明　$n \leq -1$ のとき $c_n = 0$ となることを示す. $f(z)$ のこの領域における上限を M とし, この領域の内部に $C_3 : \zeta(t) = \alpha + re^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ を取る. α は孤立特異点だから, r はいくらでも小さくできる. 定理 6.2 より, $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_3} f(\zeta)(\zeta - \alpha)^{-(n+1)}d\zeta$ である. $\left|\int_{C_3} f(\zeta)(\zeta - \alpha)^{-(n+1)}d\zeta\right| \leq \int_0^{2\pi} Mr^{-n} = 2\pi r^{-n}M$ である. $n \leq -1$ だから, この積分は r を小さくすることでいくらでも小さくすることができ, したがって $c_n = 0$ $(n \leq -1)$ であり, よって α は除去可能特異点である.

孤立特異点 (6) (p.236)

定義 6.3 α が孤立特異点で, $f(z)$ の α におけるローラン展開の主要部が零でない有限級数であるとき, すなわち, ある $k \geq 1$ に対し $c_{-k} \neq 0$ で, $\forall l > k$, $c_{-l} = 0$ となっているとき, α を $f(z)$ の k 位の極という. 1 位の極を単純な極という.

孤立特異点 (7) (p.236)

- α が k 位の極の場合の $f(z)$ のローラン展開は次の通り:

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-\alpha)^k} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n$$

孤立特異点 (8) (p.236)

定理 6.4 $f(z)$ が $\{z : 0 < |z - \alpha| < R\}$ で正則であるとき, α が k 位の極であるための必要十分条件は, α の近傍で正則で零でない関数 $\varphi(z)$ が存在し, $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-\alpha)^k}$ と書けることである.

証明: α が k 位の極であれば, $(z-\alpha)^k f(z) = c_{-k} + c_{-k+1}(z-\alpha) + \cdots$ の右辺は収束する整級数だから, ある正則な関数 $\varphi(z)$ になる. また, $\lim_{z\to\alpha}\varphi(z) = c_{-k} \neq 0$ だから, $\varphi(z)$ は α のある近傍で零にならない. 逆に, $(z-\alpha)^k f(z) = \varphi(z)$ かつ α の近傍で $\varphi(z) \neq 0$ であるときには, $\varphi(z)$ を α のまわりてテイラー展開してから両辺を $(z-\alpha)^k$ で割るとローラン展開が得られる.

孤立特異点 (9) (p.237)

定理 6.5 $f(z)$ が $\{z : 0 < |z - \alpha| < R\}$ で正則であるとき, α が k 位の極であるための必要十分条件は,

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = \infty$$

となることである.

証明: α が k 位の極であれば, 定理 6.4 により, $\lim_{z\to\alpha} f(z) = \lim_{z\to\alpha} \frac{\varphi(z)}{(z-\alpha)^k} = \infty$. 逆に, $\lim_{z\to\alpha} f(z) = \infty$ であれば, α のある除外近傍において $f(z) \neq 0$ であるから, $\frac{1}{f(z)}$ はこの除外近傍で有界であり, したがって α は $\frac{1}{f(z)}$ の除去可能特異点である (上記の定理 6.3 に相当する定理を使った). さて, $\frac{1}{f(z)}$ のローラン展開の最初の零でない項を c_k とすると $(k \geq 0)$, $\frac{1}{f(z)} = c_k(z-\alpha)^k + c_{k+1}(z-\alpha)^{k+1} + \cdots$ となるが, $\varphi(z) = c_k + c_{k+1}(z-\alpha) + \cdots$ とおくと, $\frac{1}{f(z)} = (z-\alpha)^k \varphi(z)$ と書け, $\varphi(z)$ は解析的で, $\varphi(\alpha) = c_k \neq 0$ だから α のある近傍で零でない. よって, $\psi(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$ とおくと, $\psi(z)$ は正則で α のある近傍で零でなく, $f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-\alpha)^k}$ と書ける. よって, 定理 6.4 により, α は k 位の極である.

孤立特異点 (10)

定義　除去可能特異点でも極でもない孤立特異点を**真性特異点**という.

- α が真性特異点であるとは, ローラン展開の主要部 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-\alpha)^n$ において, $c_n \neq 0$ となる n が無限にあるということである.
- 教科書の定義6.4は誤り. すべての c_n $(n<0)$ が非零である必要はない.
- この講義では真性特異点についてはこれ以上取り扱わない.

演習 12-3

正しいと思うものを選べ.

演習 12-3 解答 (1)

1. $$f(z) = \begin{cases} 1, & z = 0, \\ z, & z \neq 0, \end{cases},$$

   $z = 0$ は $\boxed{\text{除去可能特異点である}}$

2. $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $z = 0$ は $\boxed{\text{極である}}$.

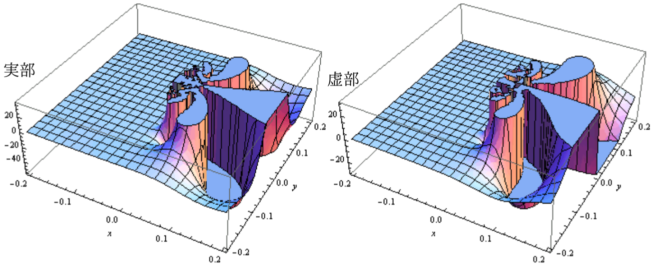
演習 12-3 解答 (2)

3. $f(z) = e^{1/z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}$,

   $z = 0$ は $\boxed{\text{真性特異点である}}$.

4. $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n \ \left(= \frac{1}{1-z}\right)$ ($|z| < 1$ のとき),

   $z = 0$ は $\boxed{\text{特異点でない}}$.



Exp[1/(x+i y)] の挙動

$\exp[1/z]$ の原点 (真性特異点) の近傍での挙動. 関数の値の変動の幅が大きすぎるため, グラフは上下が切れている

零点

定義 関数 $f(z)$ に対し, $f(\alpha) = 0$ をみたす $\alpha \in \mathbb{C}$ のことを $f(z)$ の**零点**という. α が $f(z)$ の零点で, α の近傍で定義された正則関数 $\varphi(z)$ に対し, $\varphi(\alpha) \neq 0$ かつ $f(z) = (z-\alpha)^k \varphi(z)$ と書けるとき, α を f の **k 位の**零点という.

- $f(z) = z^3$ において, $z = 0$ は $f(z)$ の 3 位の零点である (上記の定義で $\varphi(z) = 1$ とする)
- $f(z) = z^2 \cos z$ において, $z = 0$ は $f(z)$ の 2 位の零点である ($\cos 0 = 1 \neq 0$ だから)

演習 12-4

正しいと思うものを選べ.

演習 12-4 解答 (1)

1. $f(z) = z$ に対し, $z = 0$ は $f(z)$ の $\boxed{1\text{ 位の零点である}}$.

2. $f(z) = z^2 + z^3$ に対し, $z = 0$ は $f(z)$ の $\boxed{2\text{ 位の零点である}}$.
   ($f(z) = z^2(1 + z)$ で $\varphi(z) = 1 + z$ とすると $\varphi(0) \neq 0$).

演習 12-4 解答 (2)

1. $f(z) = z^2 - 2z + 1$ に対し, $z = 1$ は $f(z)$ の $\boxed{\text{2 位の零点である}}$. $(f(z) = (z-1)^2)$

2. $f(z) = z^2 - 2z + 1$ に対し, $z = -1$ は $f(z)$ の $\boxed{\text{零点でない}}$. $(f(-1) = 4)$.

$z \to \infty$ としたときの孤立特異点, 零点について議論することもある. $f(1/z)$ の $z \to 0$ としたときの挙動を調べればよいので, 難しくはないのだが, この講義では立ち入らない. 詳しくは, たとえば野口潤次郎, 複素解析概論, 第 6 版, 裳華房, 2007 を参照せよ.