工業数学 IV 第 12 回
関数の整級数展開

- 今回の講義の主題は, 関数を, 性質がよくわかっている他の関数系を使って表現すること
- 性質が良くわかっている関数系:
多項式, 有理式, 三角関数, $\cdots$

- 表現に使う関数が…
  - ▷ 多項式: テイラー展開
  - ▷ 負のべきを含む多項式: ローラン展開
  - ▷ 三角関数: フーリエ展開
- 今回の講義で取り扱うのはテイラー展開とローラン展開,

- 関数の他の関数系を使った表現は, 有限の項のみを用いる場合には, 近似であることが多い
    - ▷ どうやってその表現を計算するか
    - ▷ 他の関数系を使った表現が, 項を無限に増やした場合, もとの関数に収束するか否か

が問題となる

- 複素解析におけるテイラー展開は無限級数 (整級数) を用いた関数の表現で, 対象は正則な関数
- 微分積分学で出て来たテイラー展開と本質的には同じものだが, 微分積分学ではテイラー展開を有限項で打ち切った多項式が興味の対象となることが多いのに対し, 複素解析では無限級数が興味の対象

- ローラン展開はテイラー展開を拡張したもの
  - ▷ テイラー展開: z の正の冪の (無限) 級数
  - ▷ ローラン展開: z の正および負の冪の (無限) 級数
- 正則でない関数を整級数を使って表現する場合には, ローラン展開が必要になる

- 教科書第 4 章では整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ を考えた.
- 教科書第 6 章では, α を中心とする整級数, すなわち $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n$ を考える.
- 展開の中心が原点から α に変わるだけで, 収束に関する性質は同じ.

テイラー展開 (1)

定義　複素平面内の点 α と集合 A に対し, α と A の距離 $d(\alpha, A)$ を次のように定義する:

$$d(\alpha, A) = \inf\{|\alpha - x| : x \in A\}$$

- 以下では, 積分に関する記号

$$\int_{|z-\alpha|=r}$$

の意味は $\cdots$

  - ▷ α を中心とする半径 r の円に沿った積分
  - ▷ 円には正の向き
  - ▷ 円をちょうど 1 周する

テイラー展開 (2) (p.220)

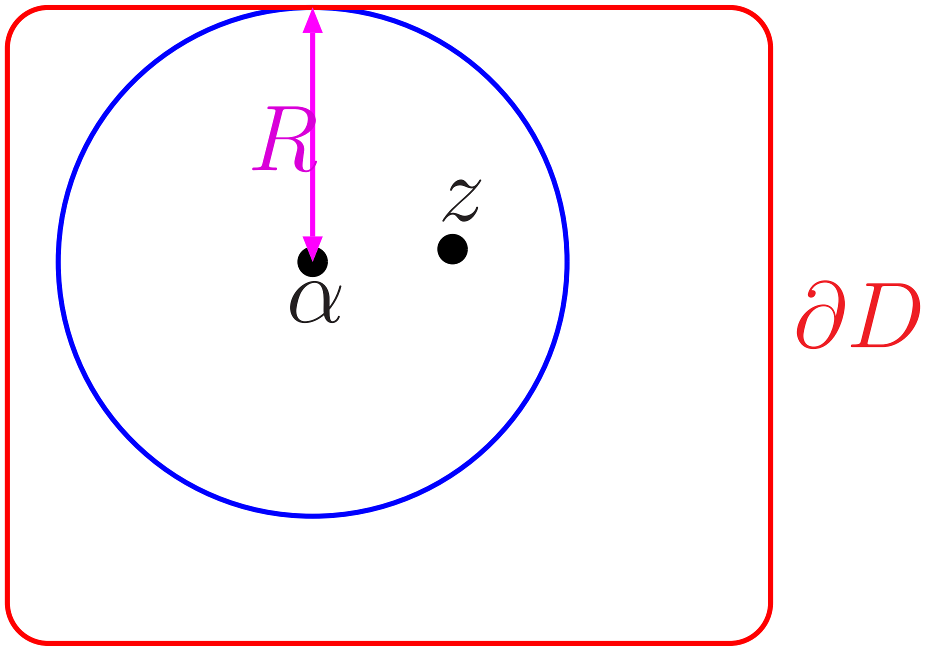
定理 6.1 (1)　関数 $f(z)$ が領域 D で正則であるとき, $\alpha \in D$ に対し, $R = d(\alpha, \partial D)$ としたとき, 開円板 $U_R(\alpha) = \{z : |z - \alpha| < R\}$ において $f(z)$ は α を中心とする整級数へと一意的に展開される.

(次ページに続く)

テイラー展開 (3) (p.220)

定理 6.1 (2) この整級数を $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$ とすると, c_n は次式で与えられる (ただし r は $0 < r < R$ であればどのように取ってもよい):

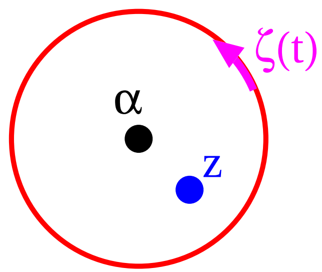
$$c_n = \frac{f^{(n)}}{n!}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-\alpha|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}} d\zeta$$



R を境界 ∂D にぶつからない範囲で取る

- 定理 6.1 の証明は (この講義では) 前回の定理 5.25 の証明の際にほぼ終わっている
- コーシーの積分公式を思い出す

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-\alpha|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$



$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - \alpha}\frac{1}{1 - \frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}} = \frac{1}{\zeta - \alpha}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\right)^n\right)$$

は $|z-\alpha| < |\zeta - \alpha|$ なので C 上で一様収束し, よって

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-\alpha|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-\alpha}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\right)^n\right)d\zeta$$

は項別に積分できるから, 収束する整級数となる. よって無限回微分可能 (ここまで再掲). これを次のように書き直す.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{|\zeta-\alpha|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}d\zeta\right)(z-\alpha)^n$$

- 系 5.5 で z を α に変えると
$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{|\zeta-\alpha|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}d\zeta$$
- よって, $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n$ となっている
- $c_n = \dfrac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$ とすれば定理 6.1 の形になる
- 一意性については, 整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$ は収束円の内部では項別に微分できるので, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$ とおくと, $f^{(k)}(\alpha) = k!c_k$ となることからわかる.

テイラー展開 (3) (p.220)

定義　定理 6.1 の整級数展開を関数 $f(z)$ の α を中心とするテイラー級数展開あるいはテイラー展開という:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$$

テイラー展開 (4) (p.222)

定義　$\alpha = 0$ としたときのテイラー展開をマクローリン級数展開あるいはマクローリン展開という (系 6.1).

定理 6.1 と同じ記号のもとで,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

としたとき,

$$c_n = \frac{f^{(n)}}{n!}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta$$

(ただし $0 < r < R$) である.

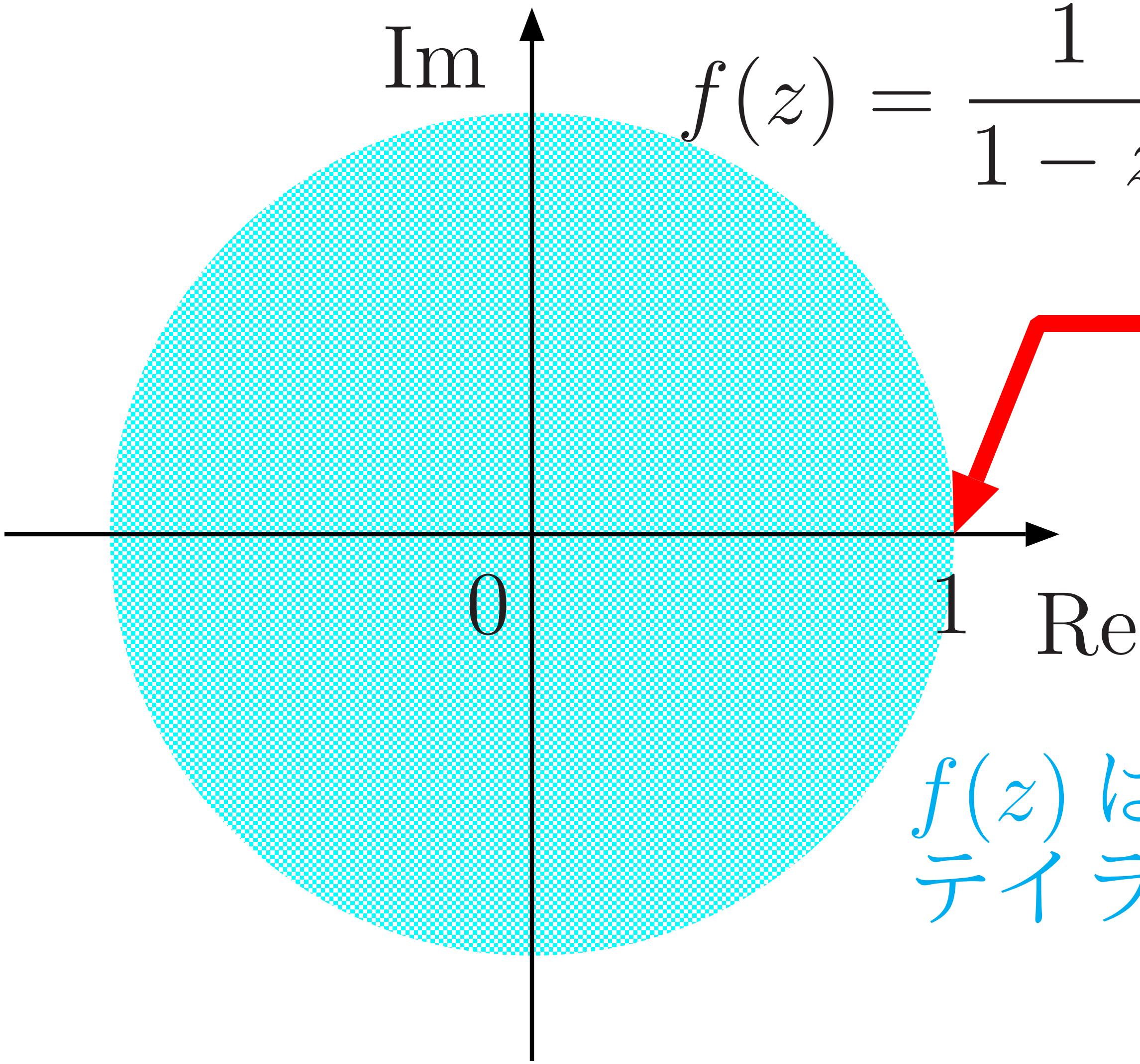
注意

- 開円板 $U_R(\alpha) = \{z : |z - \alpha| < R\}$ において $f(z)$ とそのテイラー展開は「同じ関数の (別の) 表現」であるが…
- $U_R(\alpha)$ の外部ではテイラー展開が収束することは保証されない
- 正則な複素関数とそのテイラー展開は局所的に (ある円の内部で) 一致する

例: $f(z) = 1/(1-z)$ のマクローリン展開

- $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ は, $z = 1$ 以外で正則である
- マクローリン展開の中心は原点だから, $U_R(0) = \{z : |z| < R\}$ を $f(z)$ が正則でない点 ($z = 1$) を含まないようになるべく大きく取ると, $U_1(0) = \{z : |z| < 1\}$(単位円) が得られる

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$



$f(z)$ は
$z = 1$ において
微分不能

$f(z)$ は単位円の内部で
テイラー展開できる

- 良く知られた式:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots$$

  は実はマクローリン展開になっている

- これを確認する

- $f(z) = (1-z)^{-1}$ だから···
- $\dfrac{d}{dz}f(z) = (-1)(1-z)^{-2}(-1) = (1-z)^{-2}$
- 帰納法により, 任意の正の整数 k に対して

$$\frac{d^k}{dz^k}f(z) = k!(1-z)^{-(k+1)}$$

となることを示す. $k=1$ の場合にはこの式は正しい.

- $k = n$ のとき，$\dfrac{d^n}{dz^n} f(z) = n!(1-z)^{-(n+1)}$ となっていると仮定し，$k = n + 1$ に対して同様の式が成り立つことを示す．上記を仮定すると，

$$\begin{aligned}
\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} f(z) &= \frac{d}{dz}\left(n!(1-z)^{-(n+1)}\right) \\
&= -(n+1)n!(1-z)^{-(n+2)}(-1) \\
&= (n+1)!(1-z)^{-(n+2)}.
\end{aligned}$$

- $f(z)$ のマクローリン展開 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ において, $c_n = \frac{f^{(n)}}{n!}(0)$ であったが…
- $f^{(n)}(0) = \frac{d^n}{dz^n} f(z) \Big|_{z=0} = n!$ だから…
- $\forall n, c_n = 1$

- よって $f(z)$ の マクローリン展開は

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$$

- 上記の等号の左辺は $z = 1$ 以外で有限の値を取るのに対し, 右辺は単位円の内部のみで定義されることに注意

指数関数と三角関数のテイラー展開

- 指数関数や三角関数は複素解析では整級数(マクローリン展開) を用いて定義され, 収束半径は無限大であったので, それをテイラー展開すると, 同一の表現が得られることが期待される
- これを確認する

指数関数	e^z	$=$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$
三角関数	$\cos z$	$=$	$\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} z^{2m}$
	$\sin z$	$=$	$\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{2m+1}$

§ 指数関数 e^z

- 指数関数 e^z を $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ のようにテイラー展開すると, $c_n = \dfrac{f^{(n)}}{n!}(0)$ であるが…
- $\dfrac{d^n}{dz^n} e^z = e^z$ なので, $\forall n, c_n = \dfrac{f^{(n)}}{n!}(0) = 1$
- $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ (もとの整級数と同じ)

§ 正弦関数 $\sin z$

- 正弦関数 $\sin z$ を $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ のようにテイラー展開すると, $c_n = \dfrac{f^{(n)}}{n!}(0)$ であるが⋯
- $\dfrac{d}{dz}\sin z = \cos z$, $\dfrac{d^2}{dz^2}\sin z = -\sin z$, $\dfrac{d^3}{dz^3}\sin z = -\cos z$, $\dfrac{d^4}{dz^4}\sin z = \sin z$ で, 4 回微分するともとに戻るから⋯

- $n = 2m + 1$ (m は非負の整数) に対し,

$$
\begin{aligned}
c_{2m+1} &= \frac{f^{(2m+1)}}{(2m+1)!}(0) \\
&= (-1)^m \frac{\cos 0}{(2m+1)!} = (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}
\end{aligned}
$$

- $n = 2m$ (m は非負の整数) に対し,

$$
c_{2m} = \frac{f^{(2m)}}{(2m)!}(0) = (-1)^m \frac{\sin 0}{(2m)!} = 0
$$

- まとめると

$$\sin z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{2m+1}$$

となり, もとの整級数と同じものが得られる

§ 余弦関数 $\cos z$

- 余弦関数 $\cos z$ を $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ のようにテイラー展開すると, $c_n = \dfrac{f^{(n)}}{n!}(0)$ であるが…
- $\dfrac{d}{dz}\cos z = -\sin z$, $\dfrac{d^2}{dz^2}\cos z = -\cos z$, $\dfrac{d^3}{dz^3}\cos z = sinz$, $\dfrac{d^4}{dz^4}\cos z = \cos z$ で, 4 回微分するともとに戻るから…

- $n = 2m$ (m は非負の整数) に対し,

$$c_{2m} = \frac{f^{(2m)}}{(2m)!}(0) = (-1)^m \frac{\cos 0}{(2m)!} = (-1)^m \frac{1}{(2m)!}$$

- $n = 2m + 1$ (m は非負の整数) に対し,

$$c_{2m+1} = \frac{f^{(2m+1)}}{(2m+1)!}(0) = (-1)^{m+1} \frac{\sin 0}{(2m+1)!} = 0$$

- まとめると

$$\cos z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} z^{2m}$$

となり, もとの整級数と同じものが得られる

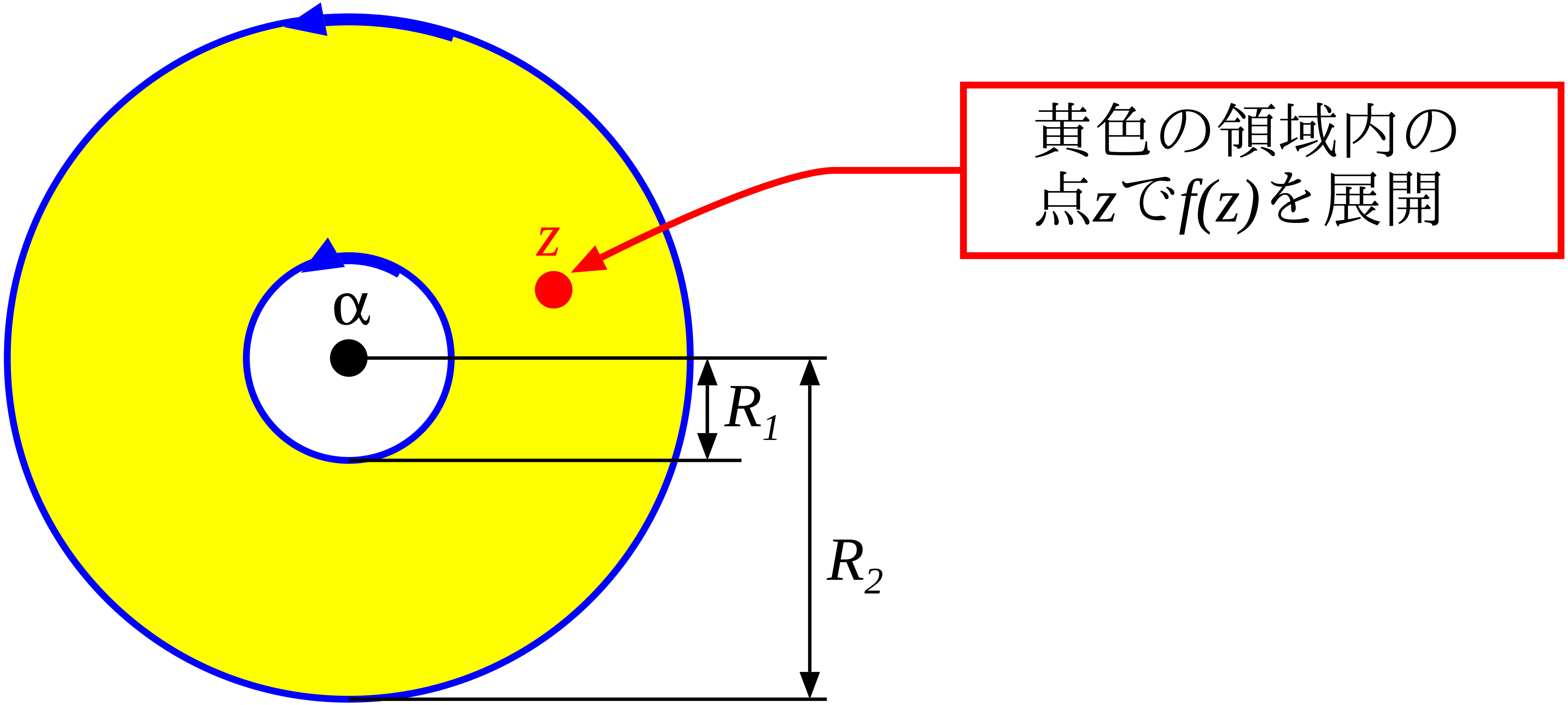
ローラン展開 (1)

- テーラー展開は正則な関数の展開
- 複素平面全体では正則ではない関数を級数に展開するには, 別の工夫が必要
- たとえば $f(z) = 1/z$ は原点で正則でない; このような関数の展開には, べきを負の項にまで拡張するのが有効

ローラン展開 (2)

- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$ という形の級数を α を中心とするローラン級数という
- 正則関数の整級数展開では級数は α を含むある円の内部で収束したが, α において正則でない関数の級数展開では, 収束円から α を除く必要がある

- ローラン展開は, 円環状の領域で定義される.



- 円環上の領域を取るのは, 正則でない点を避けるため
- 正則でない点の「避け方」には色々なパターンがある

ローラン展開 (3) (p.226)

定理 6.2 $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$ とし, 関数 $f(z)$ は円環領域 $D = \{z : R_1 < |z - \alpha| < R_2\}$ で正則であるものとする. このとき, $f(z)$ は D において $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - \alpha)^n$ という形に一意的に展開され, $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|\zeta - \alpha| = r} \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} d\zeta$ となる $(R_1 < r < R_2)$.

ローラン展開 (4) (p.226)

- 定理 6.2 の証明は少し後で述べる.
- 定理 6.2 の級数を D における α を中心とするローラン級数, 定理 6.2 の展開を $f(z)$ の D におけるローラン展開という.
- ローラン展開の負のべきの部分 $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-\alpha)^n$ を主要部という.

- $n < 0$ のとき, $(z-\alpha)^n$ は $z \to \alpha$ とすれば発散することに注意する (主要部はこういった項を集めたもの)
- ローラン展開の主要部は形式的には無限級数だが有限個の項を除き係数が零のこともある
- ローラン展開は D の取り方にも依存する; 定理 6.2 は「α と D を固定すればローラン展開は一意」という意味

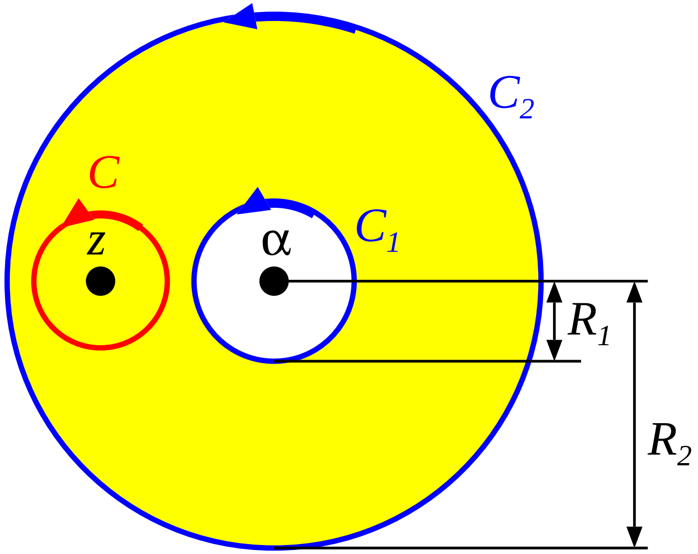
定理 6.2 の証明:

- $z \in D$ を固定する
- z を囲む円 C を定義域の内部に取る.
- α を中心とする半径 R_1 および R_2 の円を C_1, C_2 とする.
- すべての円には正の向きをつける.
- 以下のように $g(\zeta)$ を定義する

$$g(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \tag{$\star$}$$

$g(\zeta)$ は α と z 以外で正則

- C_2 の向きを反転
- さらに, 以下の図の右のように積分路を構成する



- $g(\zeta)$ は上図右の領域で正則だから, $\int_{C+C_1-C_2} g(\zeta)d\zeta = 0$
- $f(z)$ は円 C の内部で正則だから, $\int_C g(\zeta)d\zeta = f(z)$
- よって, $f(z) = \int_{C_2} g(\zeta)d\zeta - \int_{C_1} g(\zeta)d\zeta$.

$\underline{\int_{C_2} g(\zeta)d\zeta\text{ の評価}}$　$\int_{C_2} g(\zeta)d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$, C_2 上で $|z-\alpha| < |\zeta-\alpha|$ だから

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-\alpha}\frac{1}{1-\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\right)^n d\zeta$$

- 上の最後の式は項別積分可能, 項別積分すると

$$\int_{C_2} g(\zeta)d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n$$
$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}d\zeta$$

$\underline{\int_{C_1} g(\zeta)d\zeta \text{ の評価}}$　C_1 上では $|\zeta - \alpha| < |z - \alpha|$ だから

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - \alpha) - (z - \alpha)} = -\frac{1}{z - \alpha}\frac{1}{1 - \frac{\zeta - \alpha}{z - \alpha}} = -\frac{1}{z - \alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\zeta - \alpha}{z - \alpha}\right)^{k-1}$$

よって

$$\int_{C_1} g(\zeta)d\zeta = -\int_{C_1} \frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)}{z - \alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\zeta - \alpha}{z - \alpha}\right)^{k-1} d\zeta$$

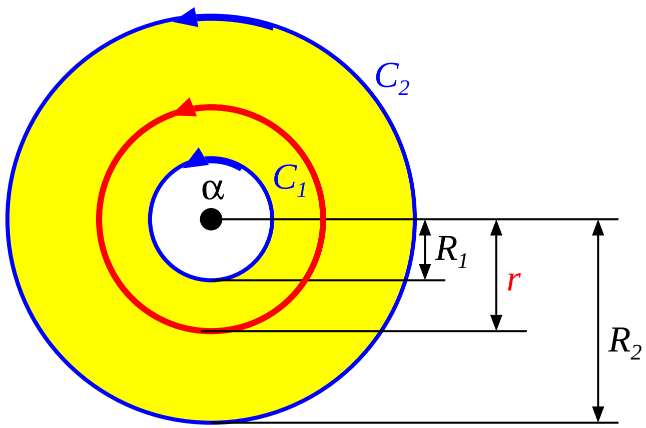
- 上式は項別積分可能, $k = -n$ とおき, 項別積分して

$$\int_{C_1} g(\zeta)d\zeta = -\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z - \alpha)^n$$
$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} f(\zeta)(\zeta - \alpha)^{-n-1}d\zeta$$

- 任意の n に対し, $f(\zeta)(\zeta-\alpha)^{-n-1}$ は以下の円環領域で正則
- よって, $R_1 \leq r \leq R_2$ になら

$$\int_{C_1} f(\zeta)(\zeta-\alpha)^{-n-1} = \int_{C_2} f(\zeta)(\zeta-\alpha)^{-n-1} = \int_{|\zeta-\alpha|=r} f(\zeta)(\zeta-\alpha)^{-n-1}$$

- したがって, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\zeta-\alpha|=r} f(\zeta)(\zeta-\alpha)^{-n-1}d\zeta$
- これで一意性を除き証明終了



一意性の証明

- 級数
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n (z-\alpha)^n$$
が $R_1 < |z-\alpha| < R_2$ なる領域で $f(z)$ に収束しているものとする．ローラン展開の一意性を示すには, 各 n に対し, c'_n が先ほど求めた c_n に一致することを示せばよい.
- この領域の任意のコンパクト集合において, 上記の級数は $f(z)$ に一様収束し, したがって $k \in \mathbb{Z}$ に対し, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n (z-\alpha)^n (z-\alpha)^k$ は $f(z)(z-\alpha)^k$ に一様収束する．したがって項別積分可能.
- $n \neq -1$ なら $\frac{d}{d\zeta}\frac{(\zeta-\alpha)^{n+1}}{n+1} = (\zeta-\alpha)^n$ だから $(\zeta-\alpha)^n$ は原始関数を持ち, よって定理 5.10 により $\int_{C_3} (\zeta-\alpha)^n d\zeta = 0$
- $n = -1$ のときは, $\int_{C_3} (\zeta-\alpha)^{-1} d\zeta = 2\pi i$ (直接計算すれば求められる)

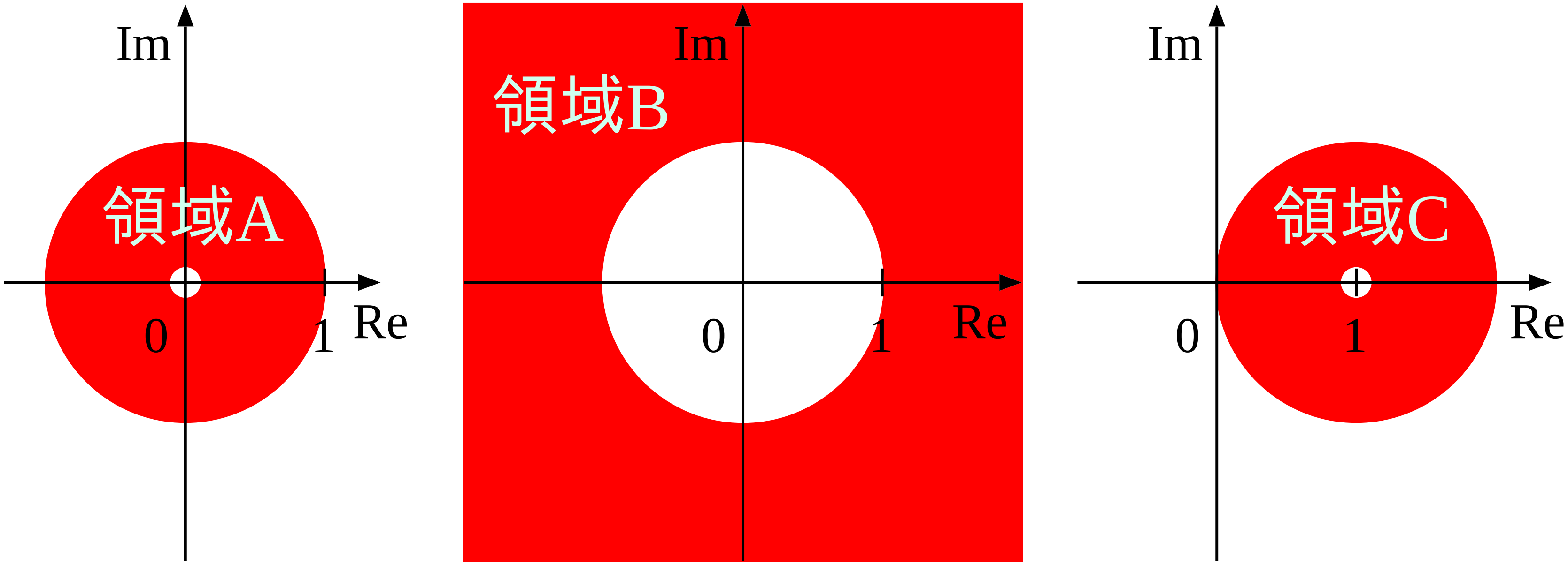
- $f(z)(z-\alpha)^k = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n (z-\alpha)^n (z-\alpha)^k$ の両辺を積分する.
  - ▷ 左辺を積分すると $2\pi i c_{-k-1}$.
  - ▷ 右辺を項別積分すると, $n=-k-1$ の項以外はすべて消え, 結果的に右辺の積分は $2\pi i c'_{-k-1}$.
  - ▷ したがって, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $c_{-k-1} = c'_{-k-1}$ だから, ローラン展開は一意的.

(証明終)

- ローラン展開の一意性は α と集合 $D = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - \alpha| < R_2\}$ を固定した上で証明されていた.
- α や D を変えればローラン展開も変わる.
- 多くの場合, ローラン展開を手計算で求める技法は技巧的.

§ ローラン展開の例 (領域を変えた場合)

$f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ を以下の領域でローラン展開



- $f(z)$ は $z = 0,\ z = 1$ を除き正則
- 領域 A ($\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$) と
  領域 B ($\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$) では $z = 0$ を中心
  とするローラン展開を求める
- 領域 C ($\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 1\}$) では $z = 1$
  を中心とするローラン展開を求める

領域 A ($z = 0$ が中心)

- $f(z) = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-z}$ と書き直す
- $|z| < 1$ だから $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$
- 上記に $-\frac{1}{z}$ を掛けると $\cdots$

$$\text{ローラン展開:}\quad f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1}$$

領域 B ($z = 0$ が中心)

- $f(z) = \frac{1}{z}\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$ と書き直す.
- $|z| > 1$ だから, $\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$
- 上記に $\frac{1}{z^2}$ を掛けると $\cdots$

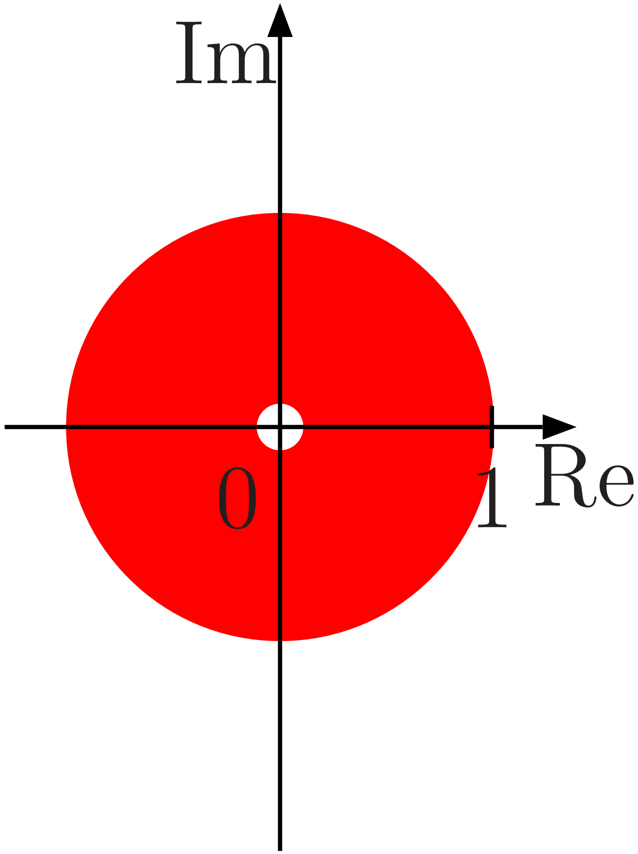
$$\text{ローラン展開:} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-2}$$

領域 C ($z=1$ が中心)

- $f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+(z-1)}\frac{1}{z-1}$ と書き直す
- $|z-1| < 1$ だから,
  $\frac{1}{1+(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$
- 上記に $\frac{1}{z-1}$ を掛けると $\cdots$

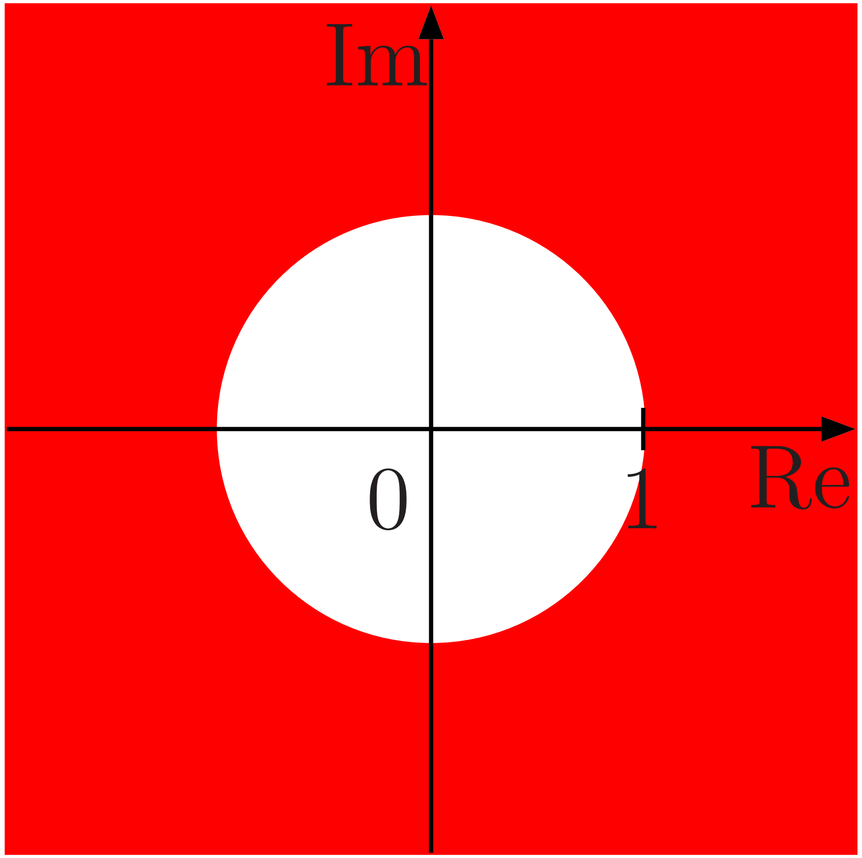
$$\text{ローラン展開:}\quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{n-1}$$

領域	中心	ローラン展開
A	$z=0$	$f(z) = -\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1}$
B	$z=0$	$f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-2}$
C	$z=1$	$f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{n-1}$



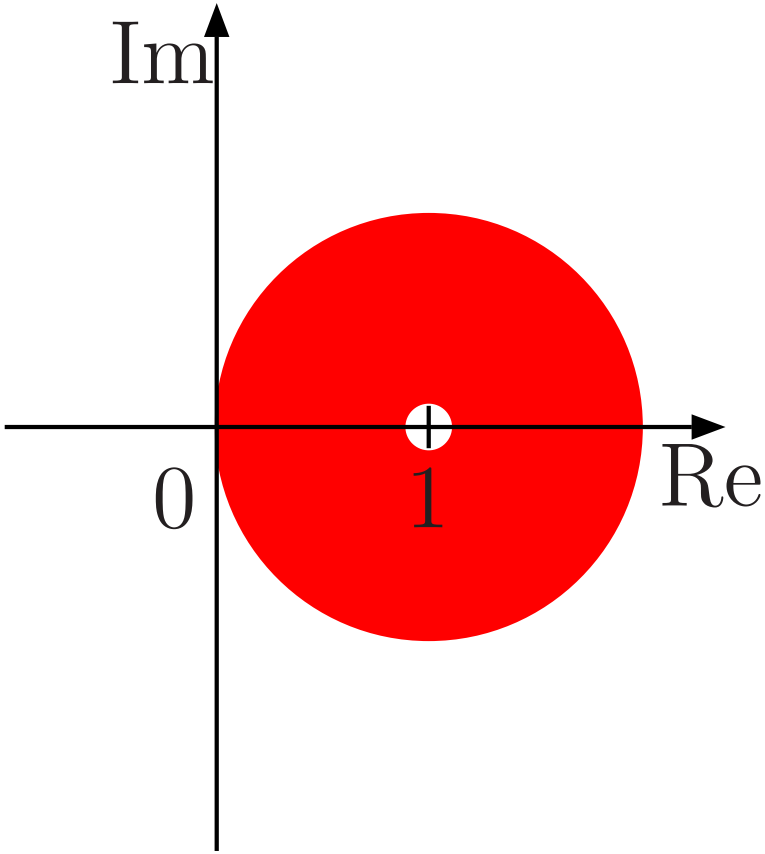
領域 A

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1}$$



領域 B

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-2}$$



領域 C

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{n-1}$$

- 関数のローラン展開は, 展開の中心と展開する領域を定めれば一意的に定まる
- 関数のローラン展開は, 展開の中心や展開する領域が変われば, 変わる

孤立特異点 (1) (p.232)

定義 6.1　関数 $f(z)$ が α において正則でないとき, α を $f(z)$ の特異点という. $f(z)$ が α で正則でなく, α のある除外近傍で正則であるとき, α を $f(z)$ の孤立特異点という.

$\boxed{\textbf{定義 2.12(p.60)}}$ 点 α を中心とする半径 δ の開円板を α の δ 近傍という. α の δ 近傍を $U_\delta(\alpha)$ で表す.

$\boxed{\textbf{定義}}$ 点 α を中心とする半径 δ の開円板から α を除いたものを α の除外 δ 近傍という. δ を明示する必要がないときは単に除外近傍という.

- 以下の議論は次のことを前提とする:
  - α は $f(z)$ の孤立特異点
  - $f(z)$ は α の R 除外近傍 $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - \alpha| < R\}$ において正則
  - $f(z)$ が α の R 除外近傍 でローラン展開されている

- 応用でローラン展開が出て来る場合の多くは, 先ほど述べた, α は $f(z)$ の孤立特異点で, $f(z)$ は α の R 除外近傍 $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-\alpha| < R\}$ において正則, かつこの領域でローラン展開されているというパターン
- 一般的な $\{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z-\alpha| < R_2\}$ におけるローラン展開には, これから述べる議論は適用できない

- 先ほど述べた前提のもとで，孤立特異点は，ローラン展開の主要部

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-\alpha)^n$$

を使って，次の 3 種類に分類される．

孤立特異点の分類

- 除去可能な特異点：ローラン展開の主要部の係数がすべて零 (定義 6.2, p.233)
- 極: ローラン展開の主要部が零でない有限級数 (定義 6.3, p.236)
- 真性特異点: 上記以外 (定義 6.4, p.239)

孤立特異点 (3) (p. 233)

定義 6.2 α が $f(z)$ の孤立特異点で, そのローラン展開の主要部の係数がすべて零であるとき, α を除去可能な特異点という.

- この場合は, $0 < |z - \alpha| < R$ のとき, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - \alpha)^n$ と書ける

孤立特異点 (4) (p. 233)

- 無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$ は $z=\alpha$ でも意味を持ち, その値は c_0.
- したがって, $f(\alpha)=c_0$ と定義し直せば, $f(z)$ は解析関数になる (これが除去可能特異点という名前の由来)

孤立特異点 (5)

定理　α が $f(z)$ の孤立特異点で, $f(z)$ が $\{z : 0 < |z-\alpha| < R\}$ で正則かつ有界なら, α は $f(z)$ の除去可能特異点である.

- 教科書の定理 6.3 は正しく述べられていないので注意. R を固定してしまうと定理 6.3 は成立しない.
- 必要十分条件の形のリーマンの定理は, たとえば 杉浦, 解析入門 II, 定理 4.3(pp.272~273) で述べられており, 上記はこれの一部.

証明　$n \leq -1$ のとき $c_n = 0$ となることを示す．$f(z)$ のこの領域における上限を M とし，この領域の内部に $C_3 : \zeta(t) = \alpha + re^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ を取る．α は孤立特異点だから，r はいくらでも小さくできる．定理 6.2 より，$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_3} f(\zeta)(\zeta - \alpha)^{-(n+1)}d\zeta$ である．$\left|\int_{C_3} f(\zeta)(\zeta-\alpha)^{-(n+1)}d\zeta\right| \leq \int_0^{2\pi} Mr^{-n} = 2\pi r^{-n}M$ である．$n \leq -1$ だから，この積分は r を小さくすることでいくらでも小さくすることができ，したがって $c_n = 0$ $(n \leq -1)$ であり，よって α は除去可能特異点である．

孤立特異点 (6) (p.236)

定義 6.3 α が孤立特異点で, $f(z)$ の α におけるローラン展開の主要部が零でない有限級数であるとき, すなわち, ある $k \geq 1$ に対し $c_{-k} \neq 0$ で, $\forall l > k$, $c_{-l} = 0$ となっているとき, α を $f(z)$ の k **位の極**という. 1 位の極を**単純な極**という.

孤立特異点 (7) (p.236)

- α が k 位の極の場合の $f(z)$ のローラン展開は次の通り (ただし $c_{-k} \neq 0$ とする):

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-\alpha)^k} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n$$

孤立特異点 (8) (p.236)

例 1) $f(z) = \dfrac{1}{z+1} + 1$ において．$z = -1$ は $f(z)$ の 1 位の極.

例 2) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2} + \dfrac{1}{z-1} + 1$ において．$z = 1$ は $f(z)$ の 2 位の極.

例 3) $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^3} + \dfrac{1}{(z-2)^2} + \dfrac{1}{z-2} + 1$ において．$z = 2$ は $f(z)$ の 3 位の極.

孤立特異点 (9) (p.236)

定理 6.4 $f(z)$ が $\{z : 0 < |z-\alpha| < R\}$ で正則であるとき, α が k 位の極であるための必要十分条件は, α の近傍で正則で零でない関数 $\varphi(z)$ が存在し, $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-\alpha)^k}$ と書けることである.

証明: α が k 位の極であれば, $(z-\alpha)^k f(z) = c_{-k} + c_{-k+1}(z-\alpha) + \cdots$ の右辺は収束する整級数だから, ある正則な関数 $\varphi(z)$ になる．また, $\lim_{z\to\alpha}\varphi(z) = c_{-k} \neq 0$ だから, $\varphi(z)$ は α のある近傍で零にならない．逆に, $(z-\alpha)^k f(z) = \varphi(z)$ かつ α の近傍で $\varphi(z) \neq 0$ であるときには, $\varphi(z)$ を α のまわりでテイラー展開してから両辺を $(z-\alpha)^k$ で割るとローラン展開が得られる．

孤立特異点 (10) (p.237)

定理 6.5 $f(z)$ が $\{z : 0 < |z - \alpha| < R\}$ で正則であるとき, α が k 位の極であるための必要十分条件は,

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = \infty$$

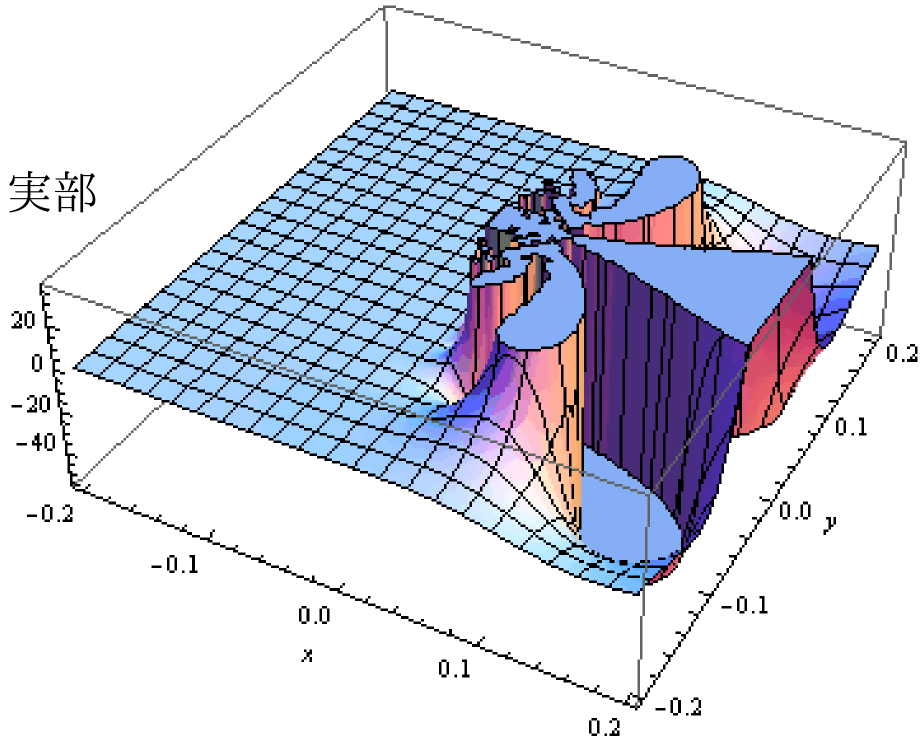
となることである.

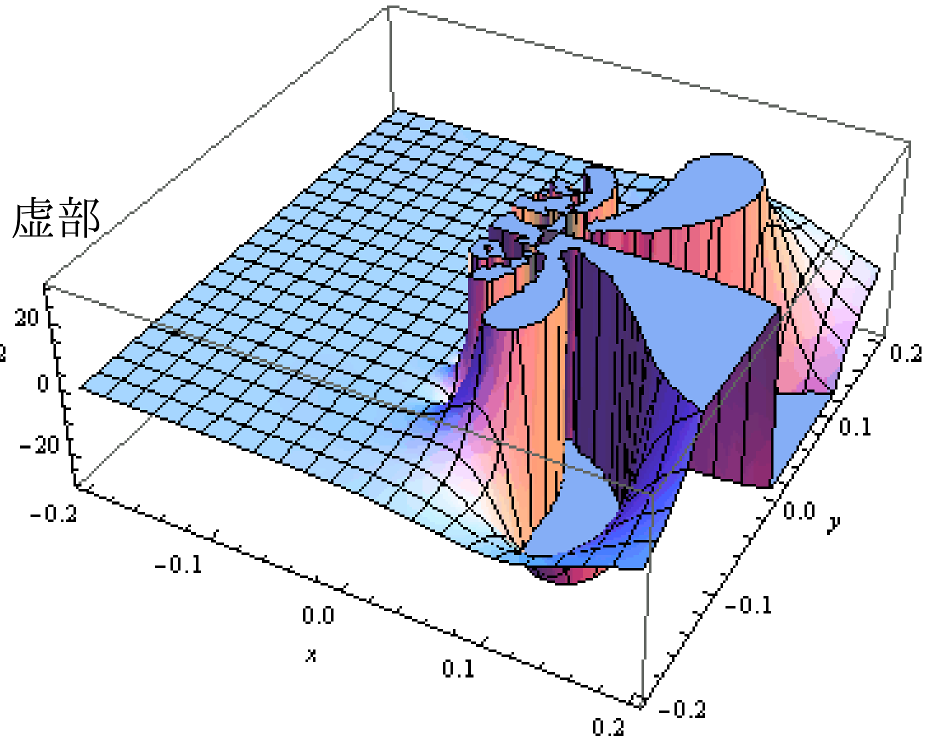
証明: α が k 位の極であれば, 定理 6.4 により, $\lim_{z\to\alpha} f(z) = \lim_{z\to\alpha} \frac{\varphi(z)}{(z-\alpha)^k} = \infty$. 逆に, $\lim_{z\to\alpha} f(z) = \infty$ であれば, α のある除外近傍において $f(z) \neq 0$ であるから, $\frac{1}{f(z)}$ はこの除外近傍で有界であり, したがって α は $\frac{1}{f(z)}$ の除去可能特異点である (上記の定理 6.3 に相当する定理を使った). さて, $\frac{1}{f(z)}$ のローラン展開の最初の零でない項を c_k とすると ($k \geq 0$), $\frac{1}{f(z)} = c_k(z-\alpha)^k + c_{k+1}(z-\alpha)^{k+1} + \cdots$ となるが, $\varphi(z) = c_k + c_{k+1}(z-\alpha) + \cdots$ とおくと, $\frac{1}{f(z)} = (z-\alpha)^k \varphi(z)$ と書け, $\varphi(z)$ は解析的で, $\varphi(\alpha) = c_k \neq 0$ だから α のある近傍で零でない. よって, $\psi(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$ とおくと, $\psi(z)$ は正則で α のある近傍で零でなく, $f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-\alpha)^k}$ と書ける. よって, 定理 6.4 により, α は k 位の極である.

孤立特異点 (11)

定義　除去可能特異点でも極でもない孤立特異点を**真性特異点**という.

- α が真性特異点であるとは, ローラン展開の主要部 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-\alpha)^n$ において, $c_n \neq 0$ となる n が無限にあるということである.
- この講義では真性特異点についてはこれ以上取り扱わない.





Exp[1/(*x*+*i y*)] の挙動

$\exp[1/z]$ の原点 (真性特異点) の近傍での挙動. 関数の値の変動の幅が大きすぎるため, グラフは上下が切れている

零点

定義 関数 $f(z)$ に対し，$f(\alpha) = 0$ をみたす $\alpha \in \mathbb{C}$ のことを $f(z)$ の**零点**という．α が $f(z)$ の零点で, α の近傍で定義された正則関数 $\varphi(z)$ に対し, $\varphi(\alpha) \neq 0$ かつ $f(z) = (z - \alpha)^k \varphi(z)$ と書けるとき, α を f の **k 位の**零点という．

例 1) $f(z) = z^3$ において, $z = 0$ は $f(z)$ の 3 位の零点である (上記の定義で $\varphi(z) = 1$ とする)

例 2) $f(z) = z^2 \cos z$ において, $z = 0$ は $f(z)$ の 2 位の零点である ($\varphi(z) = \cos z$ とする; $\cos 0 = 1 \neq 0$ だから)

- $z \to \infty$ としたときの孤立特異点, 零点について議論することもある.
- 詳しくは, 野口潤次郎, 複素解析概論, 第 6 版, 裳華房, 2007 などを参照

伝達関数と極・零点

- 線形回路網や線形システムの理論では, 有理式によって定義された関数がよく出て来る.
- 次回以降の講義で簡単に述べるが, 1 入力 1 出力線形時不変システムの入出力関係は, 連続時間ではラプラス変換, 離散時間では z 変換を利用することにより, 伝達関数と呼ばれる有理関数によって表現される.

- 歴史的な経緯から, 伝達関数の独立変数を, 連続時間システムでは s, 離散時間システムでは z に取る. これらは複素変数である.
- 当面, 離散時間システムを想定し, 以下のような伝達関数を考える. ただし $b_0 \neq 0$ とする.

$$f(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n}$$

- 次回の講義で述べる代数学の基本定理により, n 次の複素係数の多項式は n 個の 1 次多項式の積 (重複を許す) で表現できることが示される.

- 代数学の基本定理により, m 個の複素数 $\beta_1, \ldots, \beta_m$ と n 個の複素数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ をうまく取れば,

$$f(z) = b_0 \frac{(z-\beta_1)\cdots(z-\beta_m)}{(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_n)}$$

のように表現できる.

- 今まで定義してきた言葉を使うと, $f(z)$ は(重複を許して)m 個の零点と n 個の極を持つ, ということになる.
- 伝達関数の極と零点は, 線形システムの特性を解析する際に, 重要な役割を果たす.