電 210 電気数学 IV
第 12 回
関数の整級数展開

演習 12-1 解答 (1)

$\frac{1}{0!}\,\mathrm{Log}\,z|_{z=1} = \boxed{0}$,

$(\mathrm{Log}\,z)' = \boxed{z^{-1}}$, $\frac{1}{1!}(\mathrm{Log}\,z)'\Big|_{z=1} = \boxed{1}$,

$(\mathrm{Log}\,z)'' = \boxed{-z^{-2}}$, $\frac{1}{2!}\,(\mathrm{Log}\,z)''|_{z=1} = \boxed{-\frac{1}{2}}$,

$(\mathrm{Log}\,z)''' = \boxed{2z^{-3}}$, $\frac{1}{3!}\,(\mathrm{Log}\,z)'''|_{z=1} = \boxed{\frac{1}{3}}$,

演習 12-1 解答 (2)

$\mathrm{Log}\,z = \boxed{0} + \boxed{1}(z-1) + \boxed{\left(-\frac{1}{2}\right)}(z-1)^2 + \boxed{\frac{1}{3}}(z-1)^3 + \cdots$, $A = \boxed{1}$,

$\mathrm{Log}\,z = \boxed{(z-1) - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3 + \cdots}$,

一致$\boxed{\text{する}}$

演習 12-1 解答 (3)

$B = \boxed{0}$, $c_n = \boxed{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}$,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\boxed{\frac{\boxed{(-1)^{n-1}(n+1)}}{\boxed{(-1)^n n}}}\right| = \boxed{1}$$

演習 12-2 解答 (1)

(A) $\frac{1}{1-z} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} z^n}$, $f(z) = \boxed{-\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1}}$

$(= -\frac{1}{z} - 1 - z - \cdots)$

(B) $\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}}$, $f(z) = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-2}}$

演習 12-2 解答 (2)

(C) $\frac{1}{1+(z-1)} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n}$,

$f(z) = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{n-1}}$

解答の書き方は以上と若干異なっていてもよい (たとえば z^{-1} を $\frac{1}{z}$ と書くなど)

演習 12-3 解答 (1)

1. $f(z) = \begin{cases} 1, & z = 0, \\ z, & z \neq 0, \end{cases}$,

   $z = 0$ は$\boxed{\text{除去可能特異点である}}$

2. $f(z) = \frac{1}{z}$, $z = 0$ は$\boxed{\text{極である}}$.

演習 12-3 解答 (2)

3. $f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}$,

   $z = 0$ は$\boxed{\text{真性特異点である}}$.

4. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ $(= \frac{1}{1-z})$ ($|z| < 1$ のとき),

   $z = 0$ は$\boxed{\text{特異点でない}}$.

演習 12-4 解答 (1)

1. $f(z) = z$ に対し, $z = 0$ は $f(z)$ の $\boxed{\text{1 位の零点である}}$.

2. $f(z) = z^2 + z^3$ に対し, $z = 0$ は $f(z)$ の $\boxed{\text{2 位の零点である}}$.
   ($f(z) = z^2(1+z)$ で $\varphi(z) = 1 + z$ とすると $\varphi(0) \neq 0$).

演習 12-4 解答 (2)

1. $f(z) = z^2 - 2z + 1$ に対し, $z = 1$ は $f(z)$ の $\boxed{\text{2 位の零点である}}$. ($f(z) = (z-1)^2$)

2. $f(z) = z^2 - 2z + 1$ に対し, $z = -1$ は $f(z)$ の $\boxed{\text{零点でない}}$. ($f(-1) = 4$).