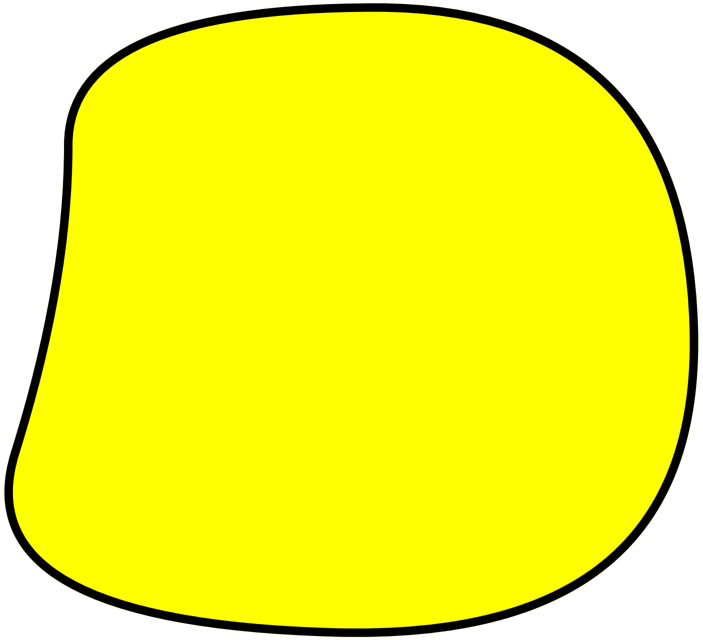
工業数学 IV
第 11 回
コーシーの積分定理とコーシーの積分公式

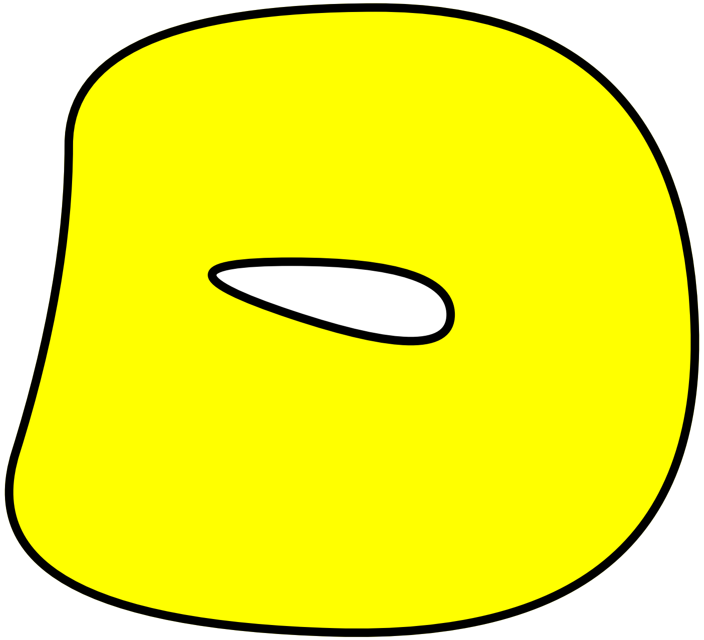
コーシーの積分定理 (1)

- コーシーの積分定理は,
  複素積分の最重要定理のひとつ
- 今回の講義では定理の意味と応用を主に述べる
- 証明は講義の最後に回す (教科書 pp. 193〜198 を参照してもよい)

- この定理では, 領域 D の内部の閉曲線に沿った関数の複素積分と, 関数の正則性の関係を問題にするのだが $\cdots$
- 最初に問題になるのは, 領域 D の形状
- 領域 D に「穴があいているかどうか」が問題になる
- これは, 直感的には, 明らかに感じられる概念で $\cdots$

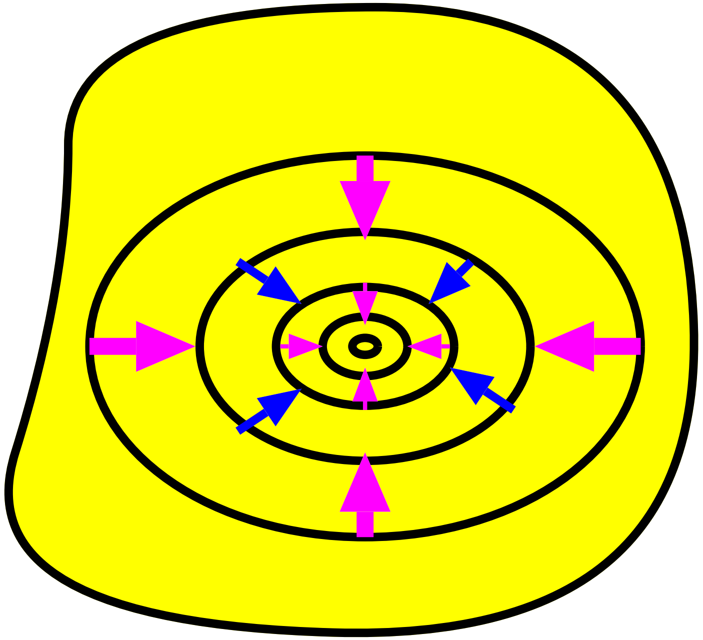


穴がない

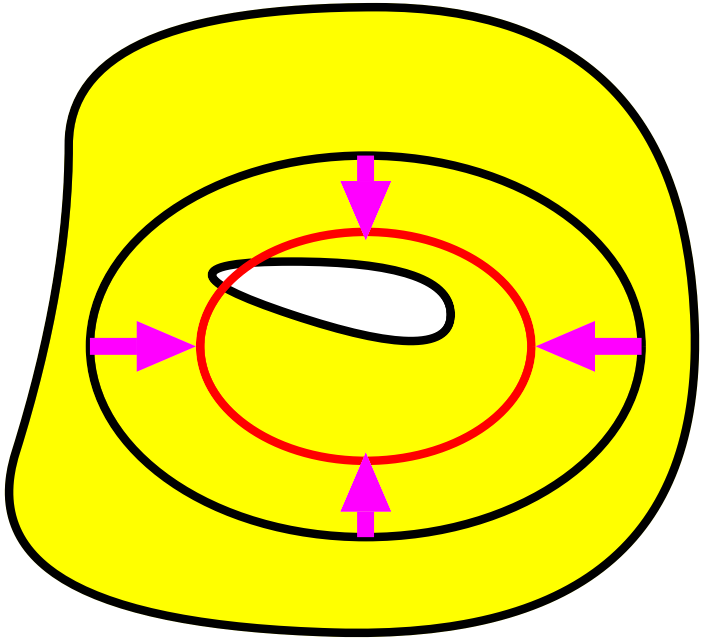


穴がある

- 穴があいていない領域を単連結という
- 「穴があいているか否か」は，「見れば明らか」であるように感じられるかもしれないが $\cdots$
- 数学の言葉で正確に定義するのは面倒
- この講義では，「閉曲線を 1 点に縮めることが可能か否か」で穴の有無を定義する



穴がない



穴がある

D 内の閉曲線を縮めたとき, D に穴がなければどこまでも縮められるが, 穴があると引っかかる

- 「引っかかる」とは, 数学的には $\cdots$
  縮小の過程で曲線の一部が領域 D の外部に出ると表現できる

コーシーの積分定理 (2) (p.183)

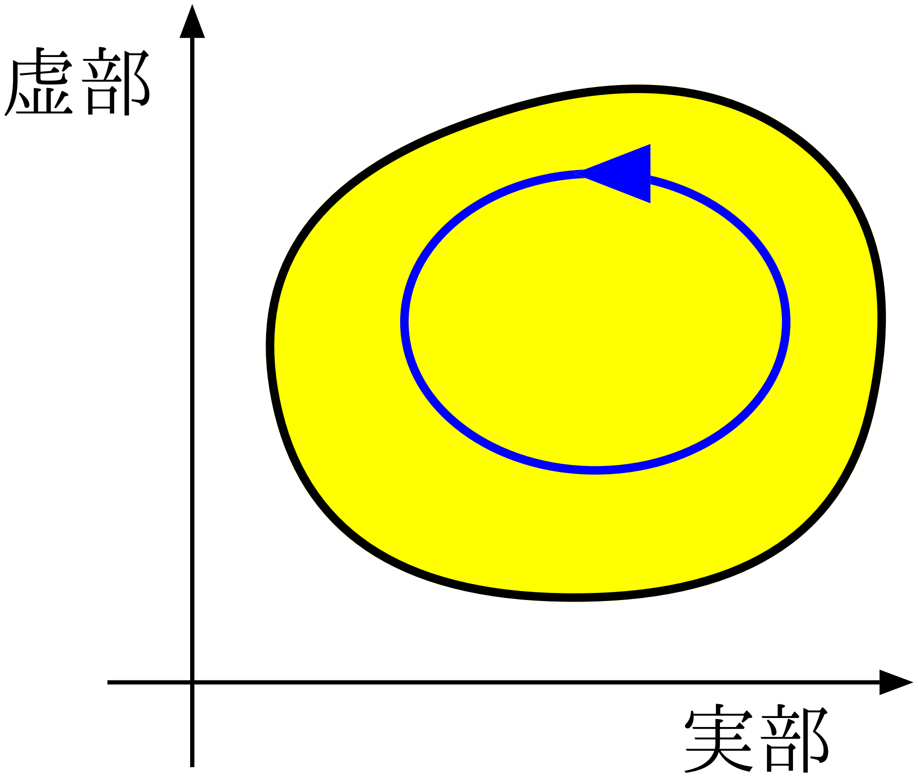
$\boxed{\text{定義}}$ D 内のすべての閉曲線が連続関数による変形を用いて D 内で一点にまで縮小できるとき, D を単連結という.

- 教科書の定義 5.12 ではジョルダンの閉曲線定理に基づいて単連結であることを定義しているが, 言っていることは同じ
- わかりやすい方で考えるとよい
- 教科書と説明の順序を変え, まず領域が単連結な場合の定理について述べる (定理 5.17, 定理 5.18).

コーシーの積分定理 (3) (p.184)

定理 5.17 　領域 D が単連結で, $f(z)$ が D において正則ならば, D 内の任意の閉曲線 C に対し, 以下が成り立つ.

$$\int_C f(z)dz = 0$$



$$\int_C f(z)dz = 0$$

- コーシーの積分定理には色々な述べ方がある
- 定理 5.17 はそのひとつ
- 定理 5.17 では, 曲線の向きは正負どちらでもよい (結果が零なので符号を反転しても零)
- 定理 5.17 の証明は講義の最後にまわし, 今回の講義ではその帰結を述べる

- 次ページで述べる定理では, 前回述べた定理 5.14 と定理 5.17 を組み合わせる
- 定理 5.14 の復習: 領域 D 上の連続関数 $f(z)$ について以下は同値である.

  (1) $f(z)$ は D で不定積分を持つ

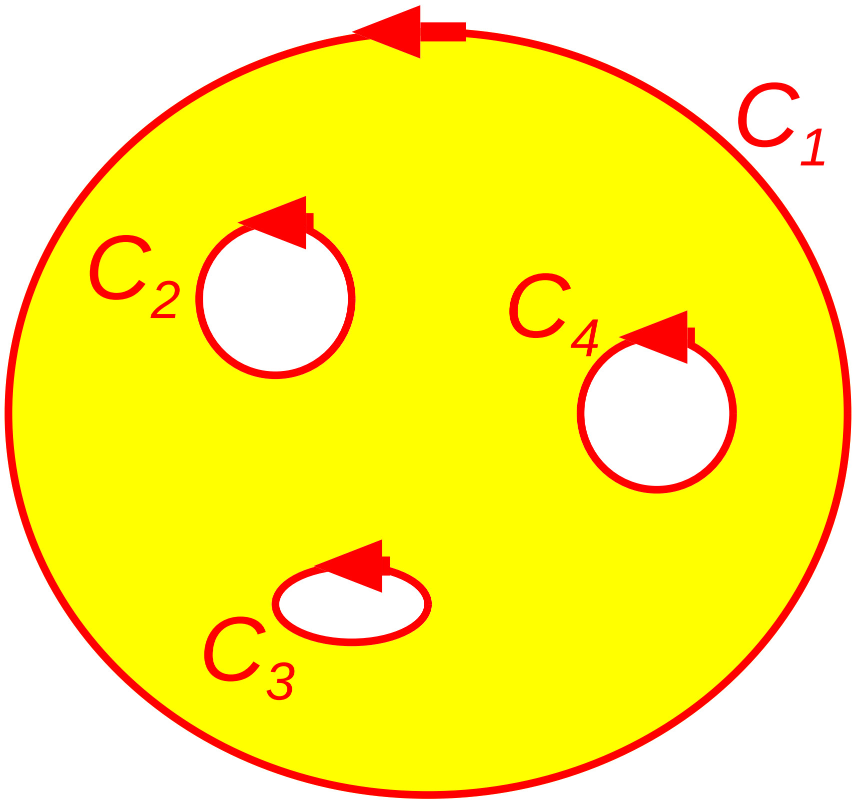
  (2) $f(z)$ は D で原始関数を持つ

  (3) C が閉曲線なら $\int_C f(z)dz = 0$

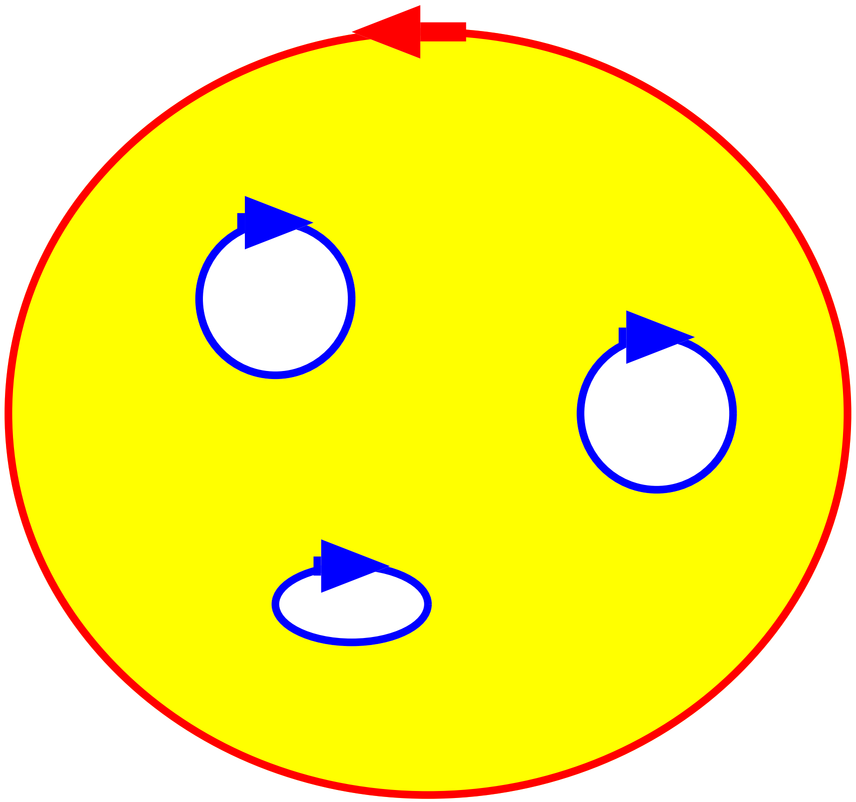
コーシーの積分定理 (4) (p.184)

定理 5.18　領域 D が単連結で, $f(z)$ が D において正則ならば, $f(z)$ の原始関数が存在する.

- 次に, 必ずしも単連結とは限らない領域 D を考える.
- 領域 D の境界 ∂D が有限個の区分的に滑らかな曲線から成るものとする
- 境界には正の向き (内部を左に見て進む) をつける (曲線の正の向きと異なることがあるので注意)

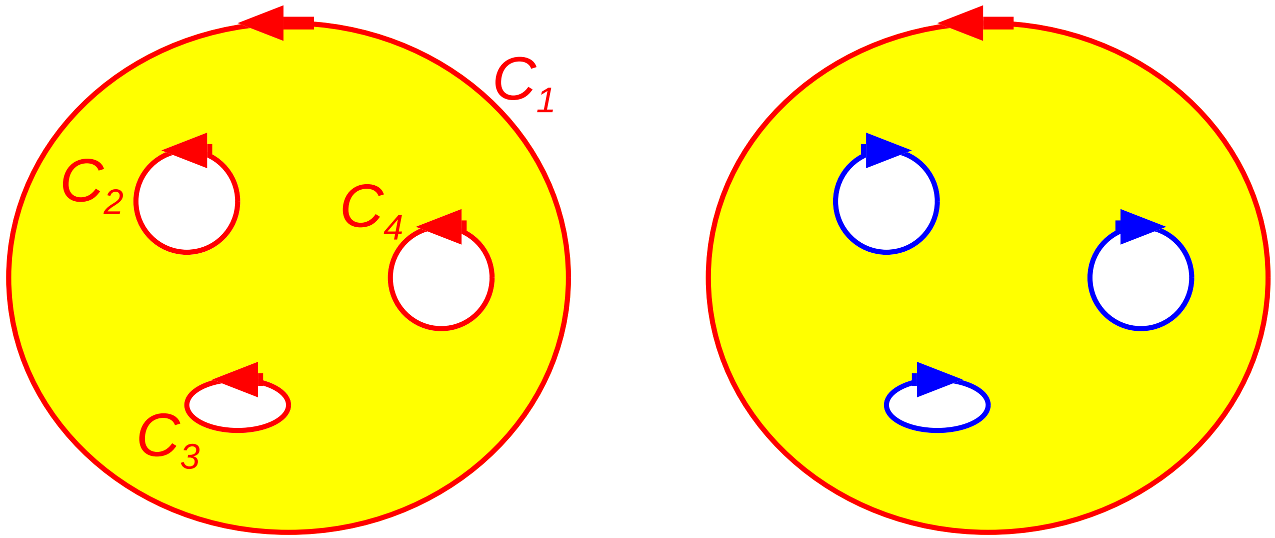


曲線の正の向き



境界の正の向き

領域の境界の「正の向き」の規則が「領域の内部を左に見て進む」だったのに対し, 曲線の「正の向き」の規則が「曲線の内部 (有界な方) を左に見て進む」だったから, 「領域の内部」と「曲線の内部」が一致しないときは, 正の向きも一致しない.



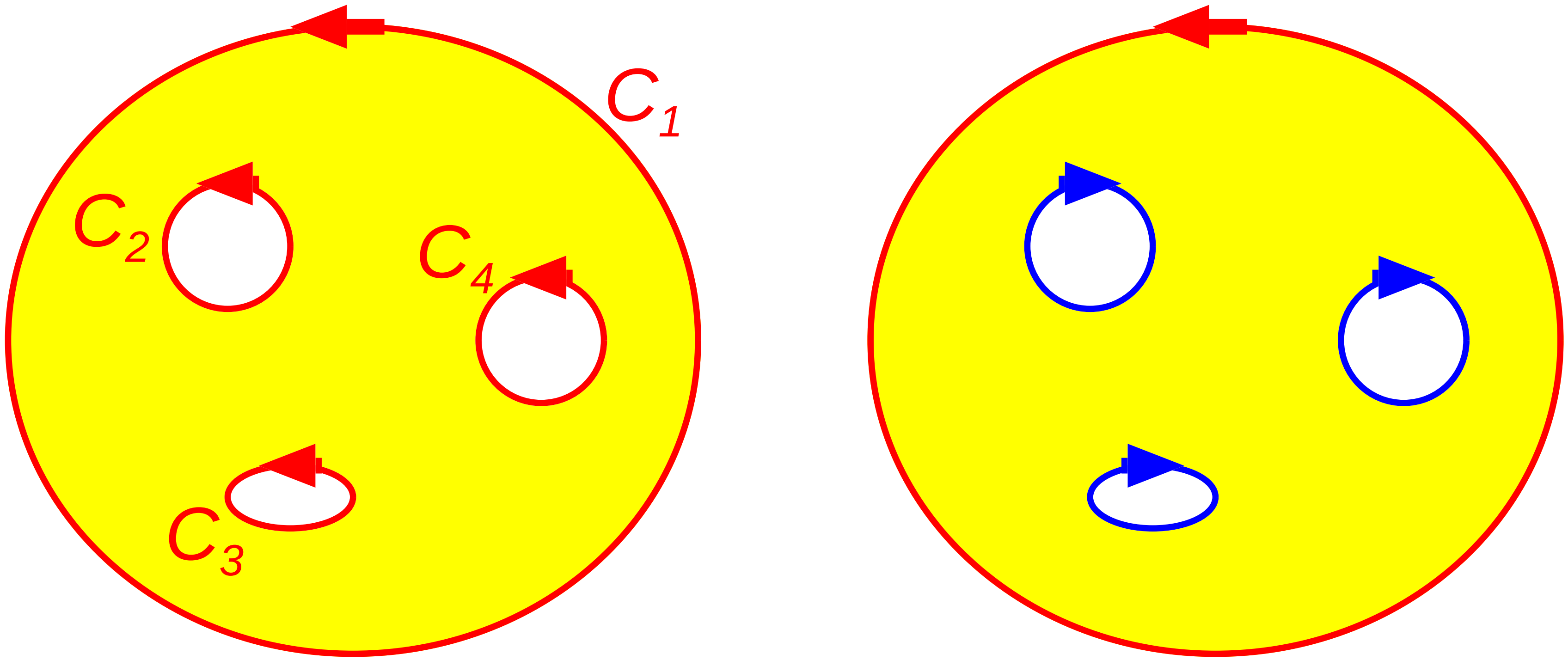
曲線の正の向き　　　　　境界の正の向き

C_1, C_2, C_3, C_4 のすべてに (曲線としての) 正の向きがつけられているものとすると, 外周では境界の向きと曲線 C_1 の向きが一致し, 内周では境界の向きと曲線 C_2, C_3, C_4 の向きが逆なので, 境界は $\partial D = C_1 - C_2 - C_3 - C_4$ と書ける.

コーシーの積分定理 (4) (p.182)

定理 5.16　領域 D の境界 ∂D が有限個の互いに交わらない区分的に滑らかな曲線から成り，境界には正の向きが付けられ，$f(z)$ が $D \cup \partial D$ を含む領域で正則であるとき，$\displaystyle\int_{\partial D} f(z)dz = 0$ が成り立つ．

証明には定理 5.17 を使う (後述)



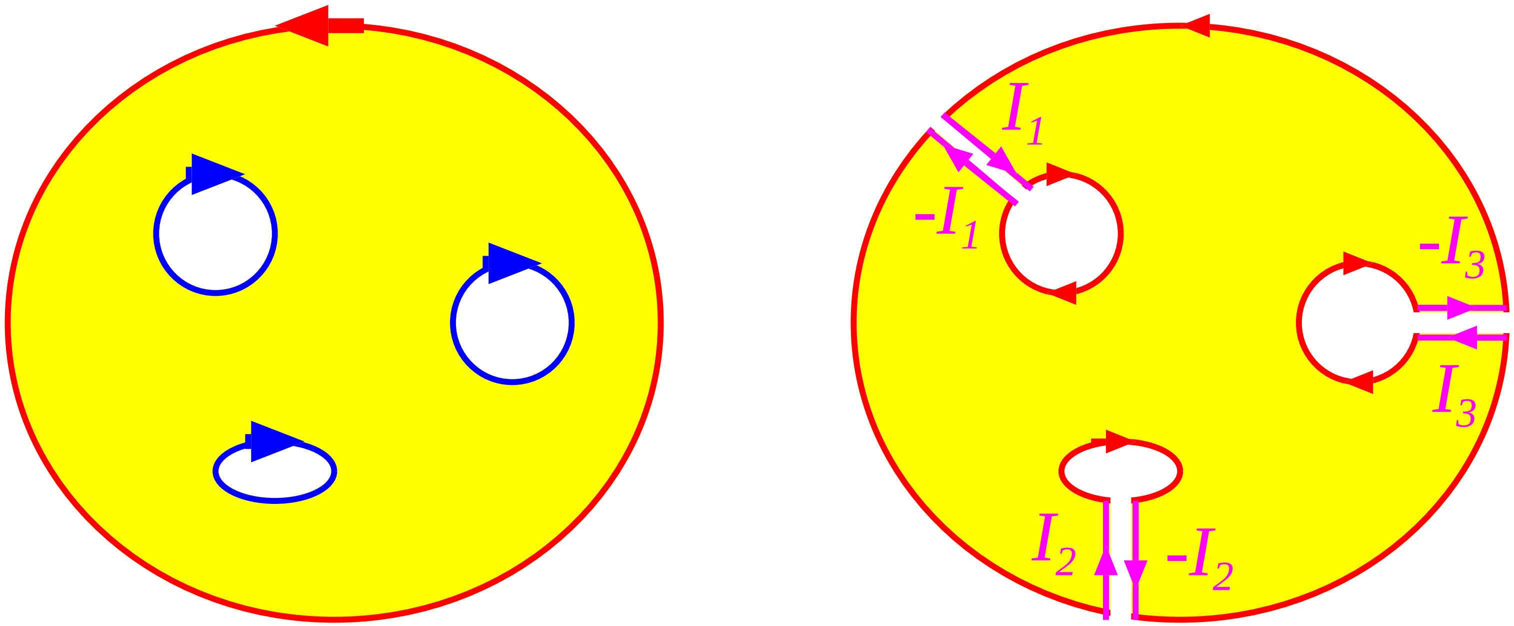
曲線の正の向き　　　　境界の正の向き

この例では，D および $f(z)$ が定理の条件を満たせば，

$$\int_{C_1} f(z)dz + \int_{-C_2} f(z)dz + \int_{-C_3} f(z)dz + \int_{-C_4} f(z)dz = 0$$

となる

- 教科書には「D が互いに交わらない有限個の区分的に滑らかな単一閉曲線ではさまれた領域」と記載されているが, わかりにくいので言い換えた.
- 定理 5.16 が成立する理由は次のページの図を見ればわかる.

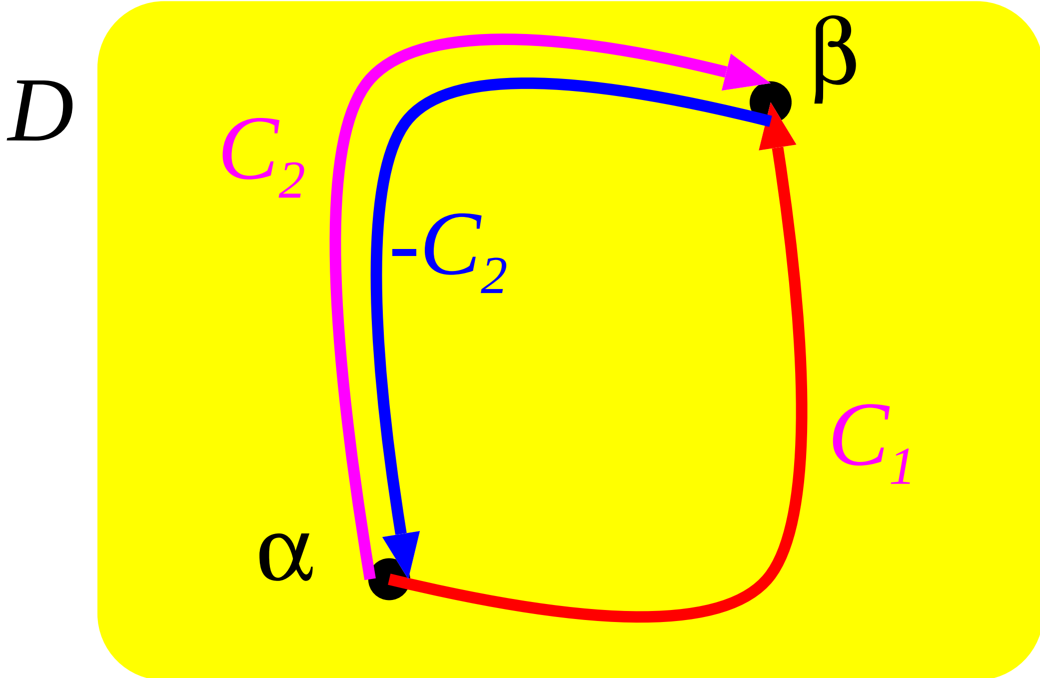


$I_1, -I_1, I_2, -I_3, I_3, -I_3$ を積分路に付け加え, 定義域を図の右側の色がついた領域に制限すると, この定義域は単連結だから, 定理 5.17 がそのまま適用できる. I_1 と $-I_1$, I_2 と $-I_2$, I_3 と $-I_3$ における積分は打ち消し合うから結果には無関係. もっと複雑な形の領域でも考え方は同じ.

これから述べられるのは, コーシーの積分定理を様々な形で言い換えたものである.

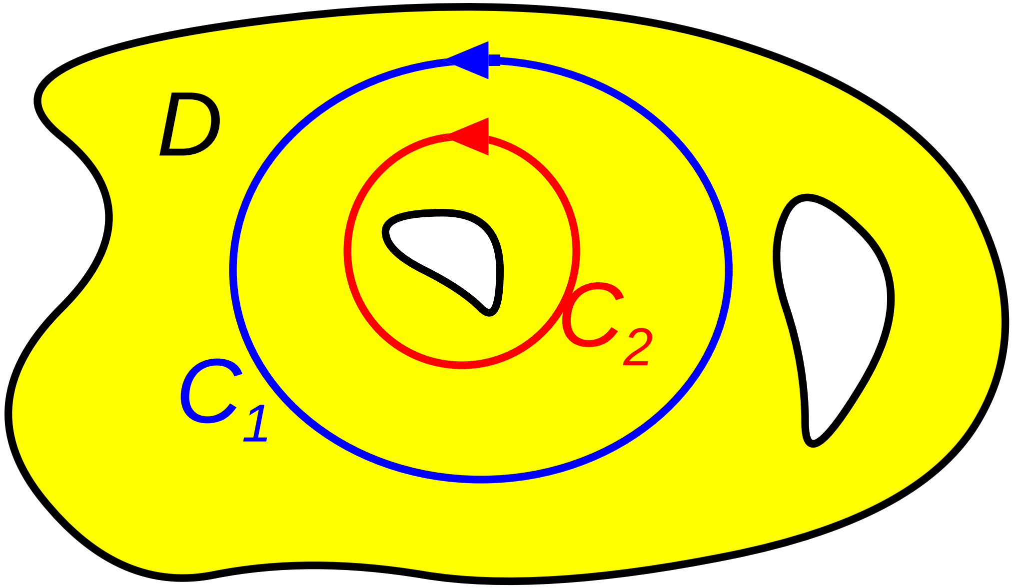
コーシーの積分定理 (5) (p.186)

定理 5.19 単連結な領域 D において $f(z)$ が正則であるとき, D 内での 2 点 α, β を結ぶ曲線に沿った $f(z)$ の積分は積分路に依存しない.



$C_1+(-C_2)$ が D 内の閉曲線であるから, 定理5.17により, $\int_{C_1+(-C_2)} f(z)dz = 0$. よって, $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$ となる.

次の定理では, 以下の図のような状況を考える (言葉で書くとわかりにくい)

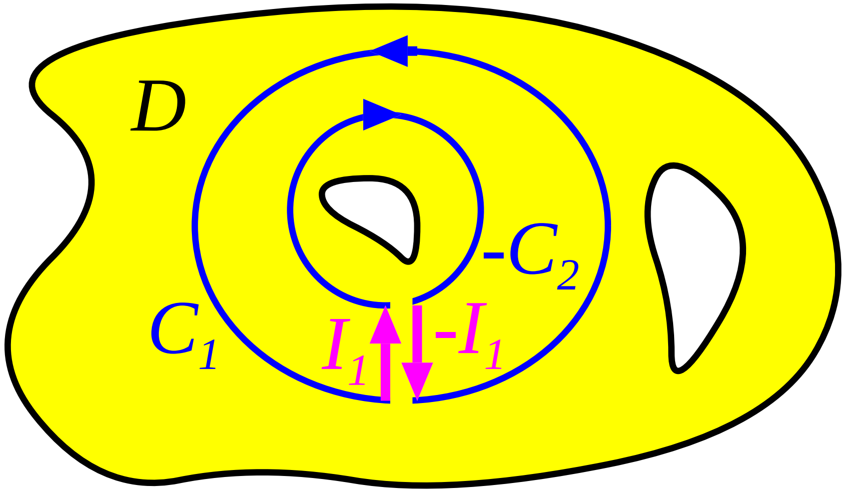


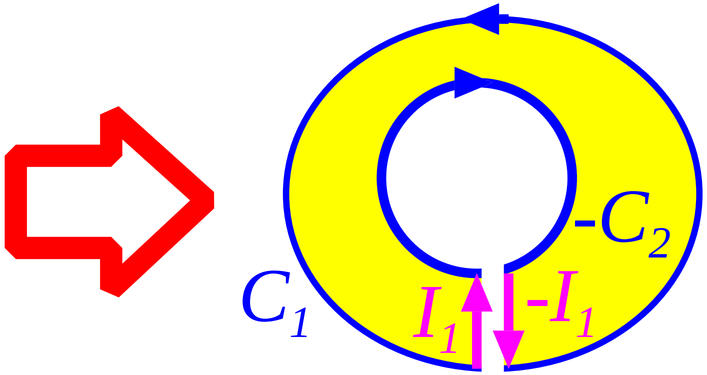
C_1 の内部に C_2, C_1 と C_2 が挟む領域 (C_1 の内部かつ C_2 の外部) は D 内にある

コーシーの積分定理 (6) (p.187)

定理 5.20 　$f(z)$ が領域 D で正則で, D に 2 個の単一閉曲線 C_1, C_2 があり, C_1 の内部に C_2 があって, C_1 と C_2 にはともに曲線としての正の向きが付けられ, C_1 と C_2 のあいだの領域が D に含まれるとき, $\displaystyle\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$ となる.

理由は次のページの図を見ればわかる.

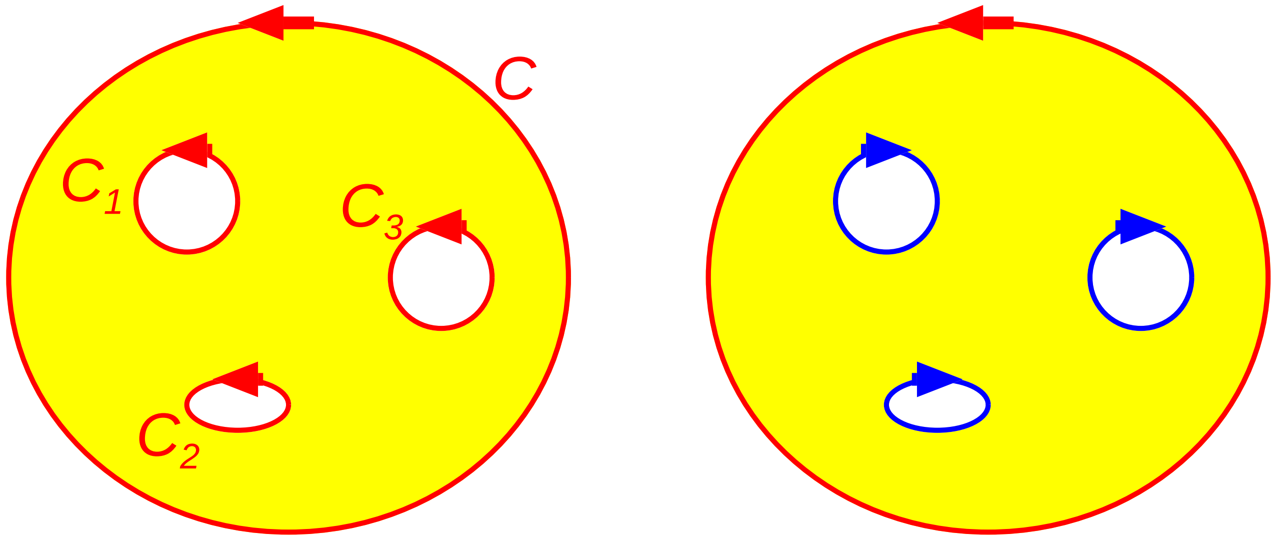




定義域を縮小すると…

C_2 の向きを反転して $-C_2$) を作り，さらに積分路に I_1 と $-I_1$ を追加する． 定義域を $C_1, I_1, -C_2, -I_1$ が囲む領域に制限すると，この領域は単連結だから，定理 5.17 が適用できて，$\int_{C_1+I_1+(-C_2)(-I_1)} f(z)dz = 0$ となる． I_1 と $-I_1$ で積分は打ち消し合うから，$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$ がいえる．

定理 5.18 は領域の境界に関する定理だったが…



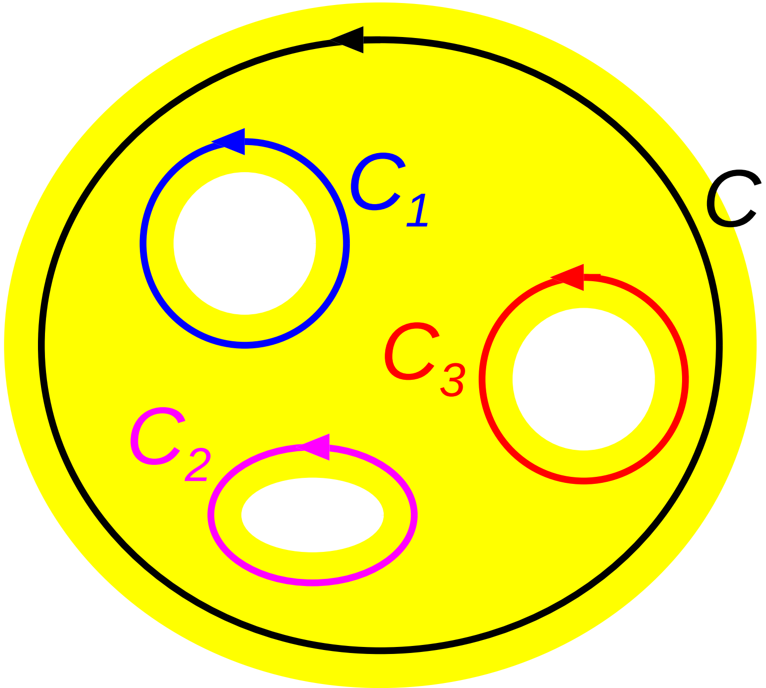
曲線の正の向き　　　境界の正の向き

境界は $\partial D = C_1 - C_2 - C_3 - C_4$

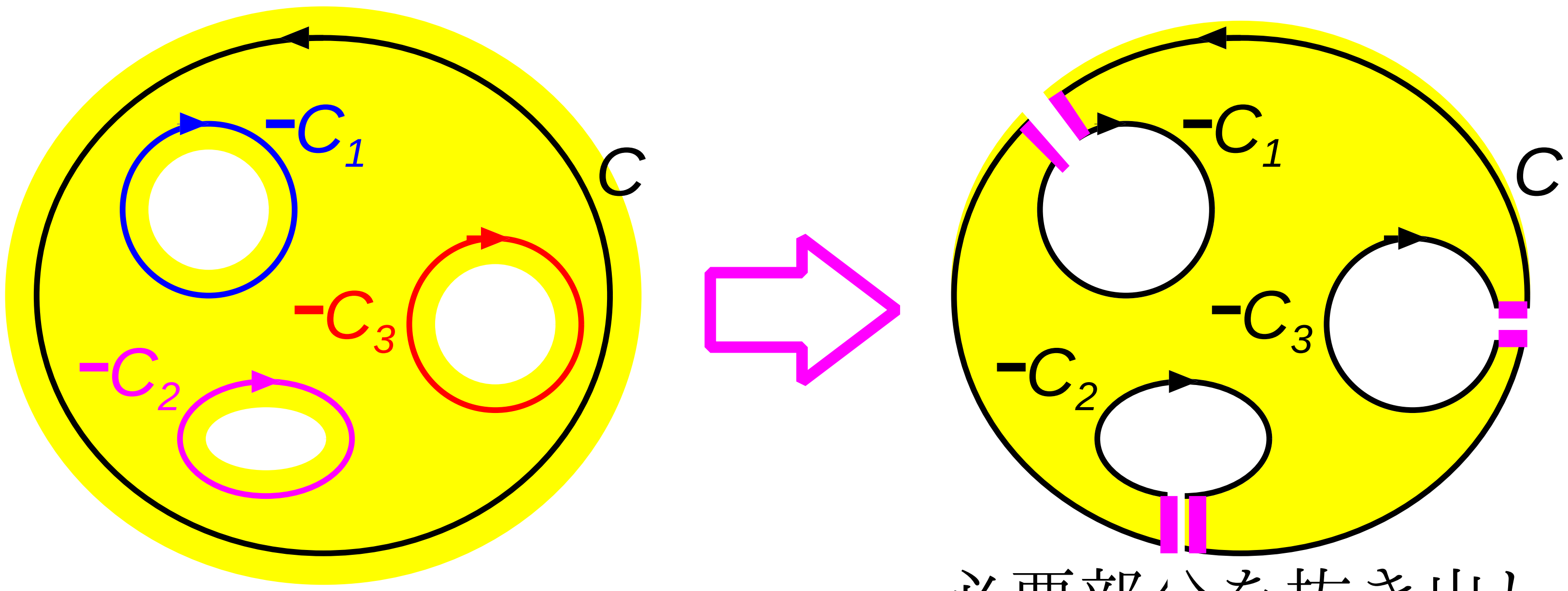
同じ考えが領域の内部の積分路にも適用できる

コーシーの積分定理 (7) (p.189)

定理 5.21　単一閉曲線 C の内側に (内部も含めて) 互いに交わらず (曲線としての) 正の向きが付けられた単一閉曲線 $C_1,\ldots,C_p$ があり，関数 $f(z)$ が C およびその内部から $C_1,\ldots,C_p$ の内部を除いた集合を含む領域で正則であるとき，
$\displaystyle\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{p}\int_{C_k} f(z)dz$ となる．



- この例では, $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz + \int_{C_4} f(z)dz$ となる.
- 証明は定理 5.16 とほぼ同じ (次ページ)



C_2,C_3,C_4の向きを変えて…

必要部分を抜き出し
切れ目を入れる

図の右で追加した直線に沿った積分は互いに打ち消し合うから最終結果には寄与しない.

- 定理5.16の後の例 ($\int_C f(z)dz + \int_{-C_1} f(z)dz + \int_{-C_2} f(z)dz + \int_{-C_3} f(z)dz = 0$) に $\int_{-C_i} f(z)dz = -\int_{C_i} f(z)dz,\ i = 1,2,3$ を使うとこの形になる

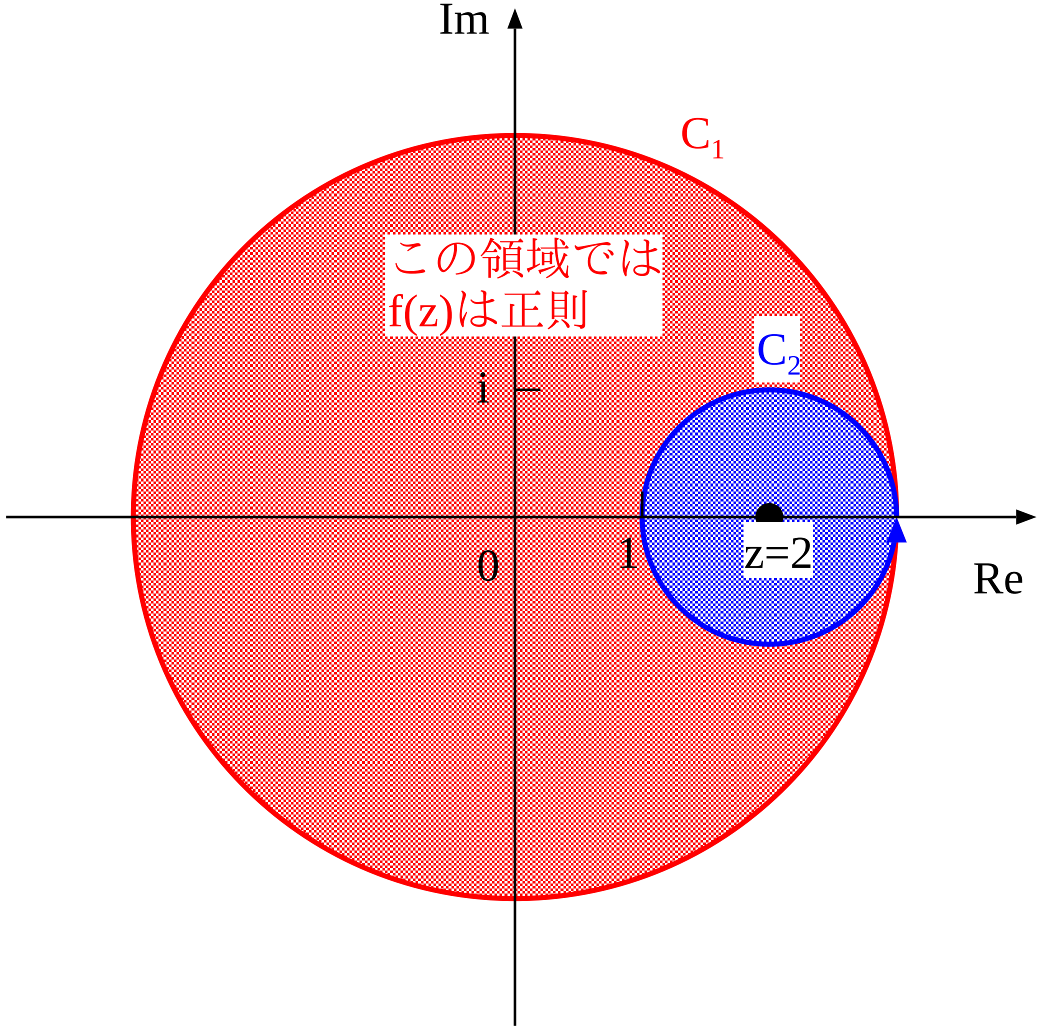
コーシーの積分の応用

- コーシーの積分定理を使うと, 積分路を計算がしやすいものに変更することができる.

例

- 関数 $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$ を正の向きがついた原点を中心とする半径 3 の円に沿って積分する問題を考える.

- 積分路 (C_1 とする) は正の向きがついた半径 3 の円であるが…
- コーシーの積分定理により, 積分路を点 $z = 2$ を中心とする半径 1 の円 (C_2 とする) に変更することができる.
- 次ページに図を示す.


Im
C1
この領域では
f(z)は正則
C2
i
0
1
z=2
Re

- C_2 に沿った $f(z)$ の積分を計算する.
- C_2 を次のように表現する.

$$C_2 : z = 2 + e^{it} \ (0 \leq t \leq 2\pi)$$

- $z'(t) = ie^{it}$ である.
- 定義にしたがって計算すると…

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b f(z(t))z'(t)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+e^{it})-2} ie^{it}\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it}\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} i\ dt = 2\pi i.
\end{aligned}
$$

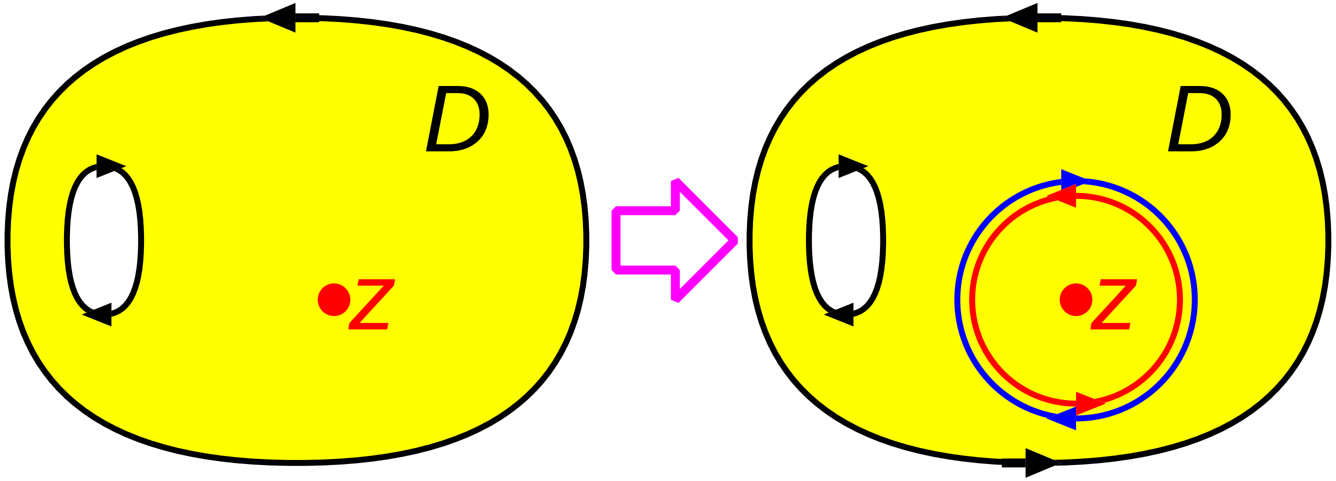
- C_1 に沿った積分をそのまま計算しようとすると非常に面倒である (無意味なので計算はしない).

コーシーの積分公式 (1) (p.199)

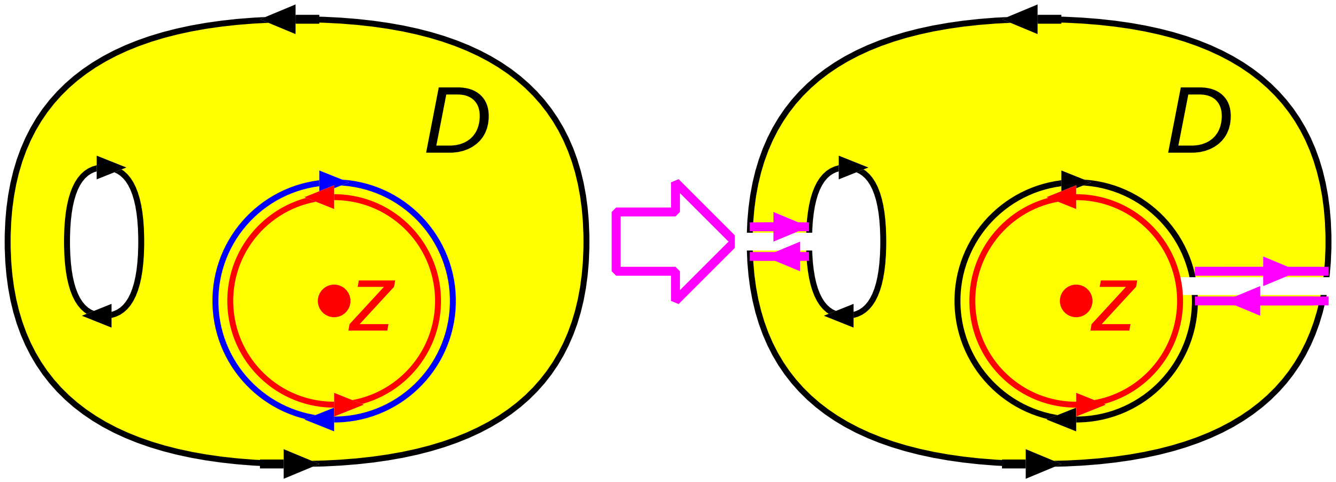
定理 5.22 領域 D の境界 ∂D が有限個の互いに交わらない区分的に滑らかな曲線から成り, 境界には正の向きが付けられ, $f(z)$ が $D \cup \partial D$ を含む領域で正則であるとき, 次式が成り立つ:

$$\forall z \in D, f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

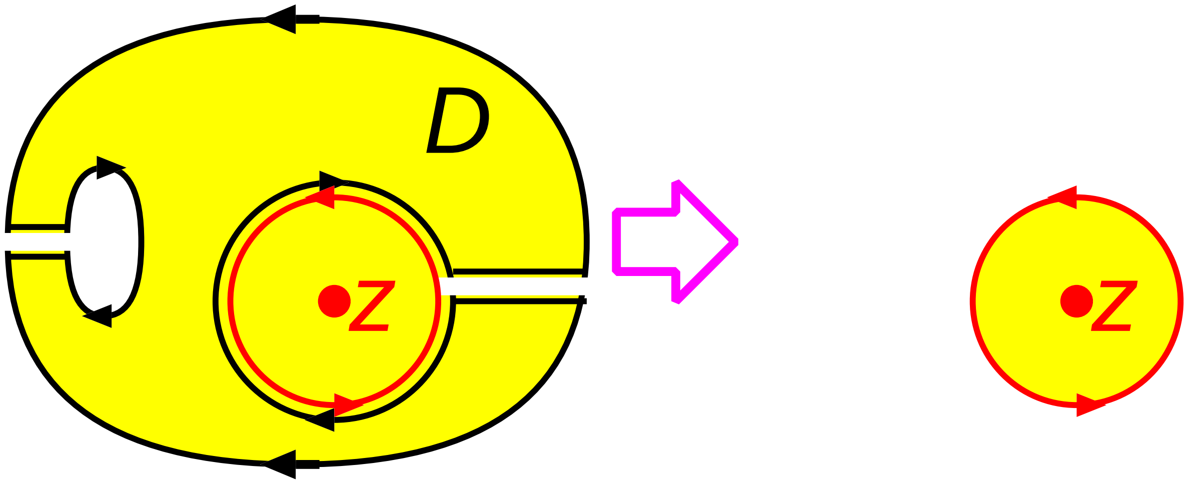
- $\dfrac{1}{\zeta - z}$ をコーシー核という.
- 定理 5.22 の証明は難しくないのでざっと見てゆく



$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$ を積分する積分路 (D の境界 ∂D, 黒い線) に, z を囲む正の向きの円 (赤い線) と負の向きの円 (青い線) を追加する. これらは互いに打ち消し合うので積分の結果には影響しない. 積分が互いに打ち消し合うことから, 円の大きさは, D におさまっていれば, どう取ってもよい.



積分路に向きが反対で重なった直線を追加して切り開く. 追加した直線上での積分は互いに打ち消し合うから, これは積分の結果には影響しない.



黒い線に沿った領域の内部では, $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ は (ζ の関数として) 正則であるから, 定理 5.16 により, 黒い線に沿った $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ の積分は零なので積分の結果に影響しない. よってこれを省略すると, 図の右側の円に沿った積分のみが残る. 円の大きさをどのように取っても積分の値が同じになることに注意する.

残った積分路を $\phi(t) = z + re^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ と書く. $\phi(t) - z = re^{it}$, $d\phi/dt = ire^{it}$ だから, $\phi(t)$ に沿った積分は,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(\phi(t))}{\phi(t) - z}\frac{d\phi}{dt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{it})dt$$

のように評価され, ゆえに

$$f(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(z) - f(z + re^{it}))dt$$

となる.

- $\varepsilon > 0$ をどのように取っても, r を十分小さく取れば,

$$|f(z) - f(z + re^{it})| < \varepsilon$$

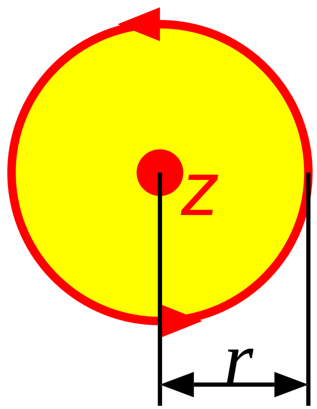
とできる.

- このようにすれば,

$$\left| f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon = \varepsilon$$

- 上記の積分は r に依存しないから, ε は任意, よって

$$f(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = 0.$$



$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$ において, z は関数値を評価したい点 (固定), ζ は積分路上を動く変数

▷ 変数の記号が変わることがある!

$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\beta)}{\beta - \alpha}d\beta$ β が ∂D 上を動く	$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(z)}{z - \zeta}dz$ z が ∂D 上を動く

混乱しないように

コーシーの積分公式 (2) (p.201)

系 5.3 領域 D が単連結で, $f(z)$ が D においで正則であるとき, D の内部にある正の向きをもつ単一閉曲線 C と C の内部にある点 z に対し, 次式が成り立つ:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

証明は定理 5.22 とまったく同じ.

次に, 以下のような状況を考える：

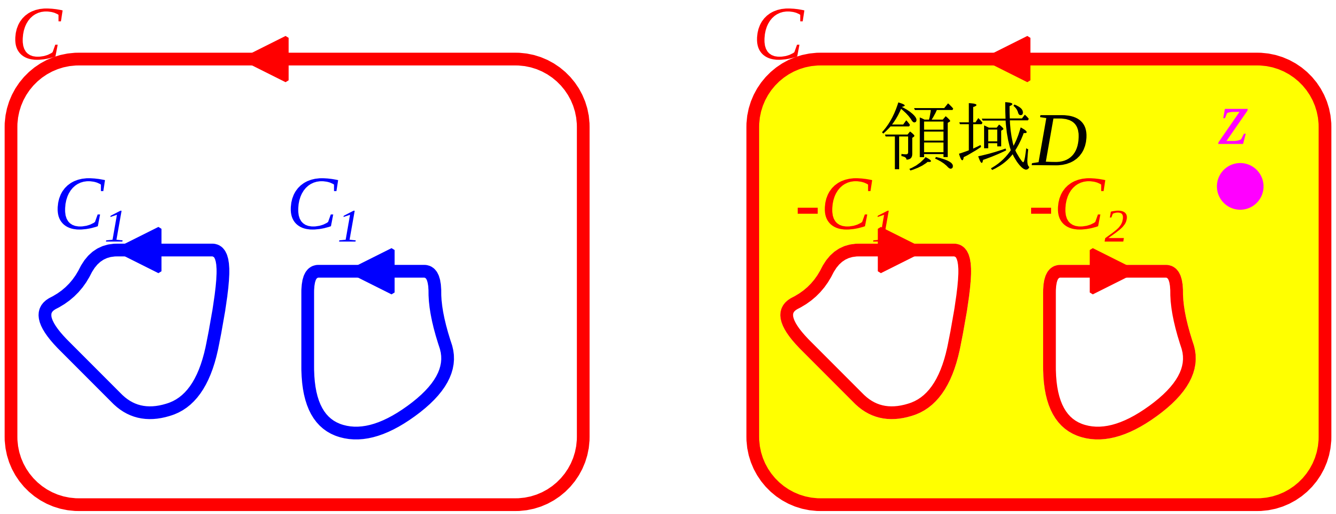
- 単一閉曲線 C の内部に p 個の単一閉曲線 $C_1, \ldots, C_p$
- $C, C_1, \ldots, C_p$ は正の向き, 互いに交わらない
- $C_1, \ldots, C_p$ の内部は交わらない
- D を C とその内部から $C_1, \ldots, C_p$ の内部を除いたものを含む開集合とする
- 関数 $f(z)$ は D で正則

コーシーの積分公式 (3) (p.203)

定理 5.23 先ほど述べた条件の下で, $z \in D$ に対し,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

- $C - C_1 - C_2 - \cdots - C_p$ が D の境界 ∂D と考えれば 5.22 と同じ



要するに系 5.3 と定理 5.23 はどちらも定理 5.22 の特別な場合:

- 系 5.3: 領域 D が単一閉曲線 C の内部;
- 定理 5.23: $\partial D = C - C_1 - \cdots - C_p$;

よって, 証明するまでもなく当然成り立つ事実

コーシーの積分公式 (5) (p.204)

定理 5.24　定理 5.22 と同じ仮定の下で, 次式が成り立つ:

$$\forall z \in D, f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

証明は定理 5.26 の後でまとめて述べる.

コーシーの積分公式 (6) (p.205)

定理 5.25 定理 5.22 と同じ仮定の下で, f は無限回微分可能で, 次式が成り立つ:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in D, f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

系 5.4 領域 D で正則な関数は無限回微分可能である.

コーシーの積分公式 (8) (p.208)

系 5.5 系 5.3 と同じ仮定および記号の下で，次式が成立する:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

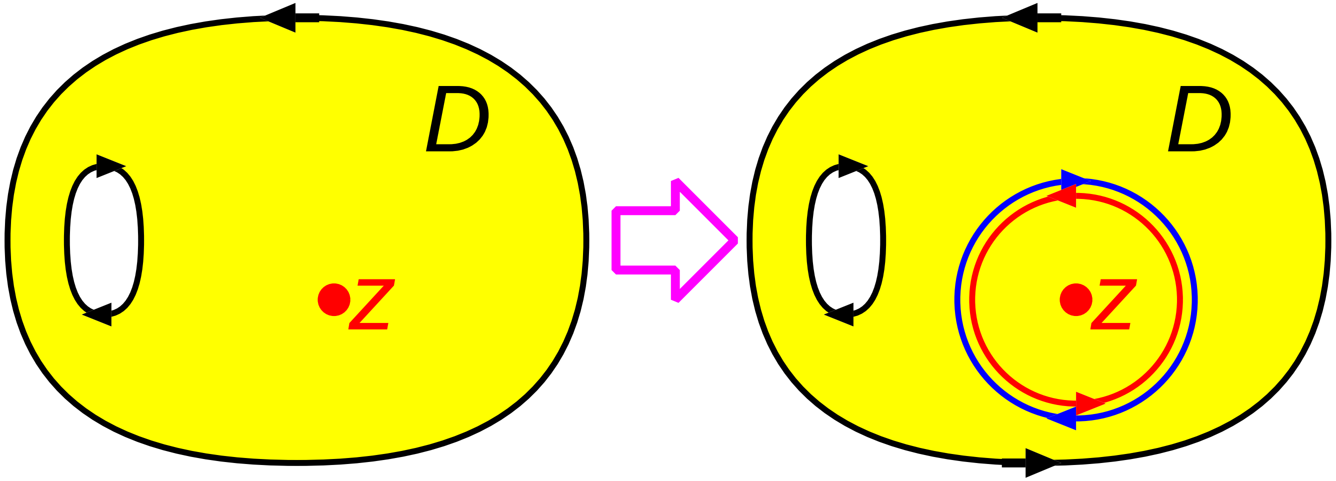
コーシーの積分公式 (9) ((p.209)

定理 5.26 定理 5.23 と同一の仮定および記号の下で, 次が成立する: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in D,$

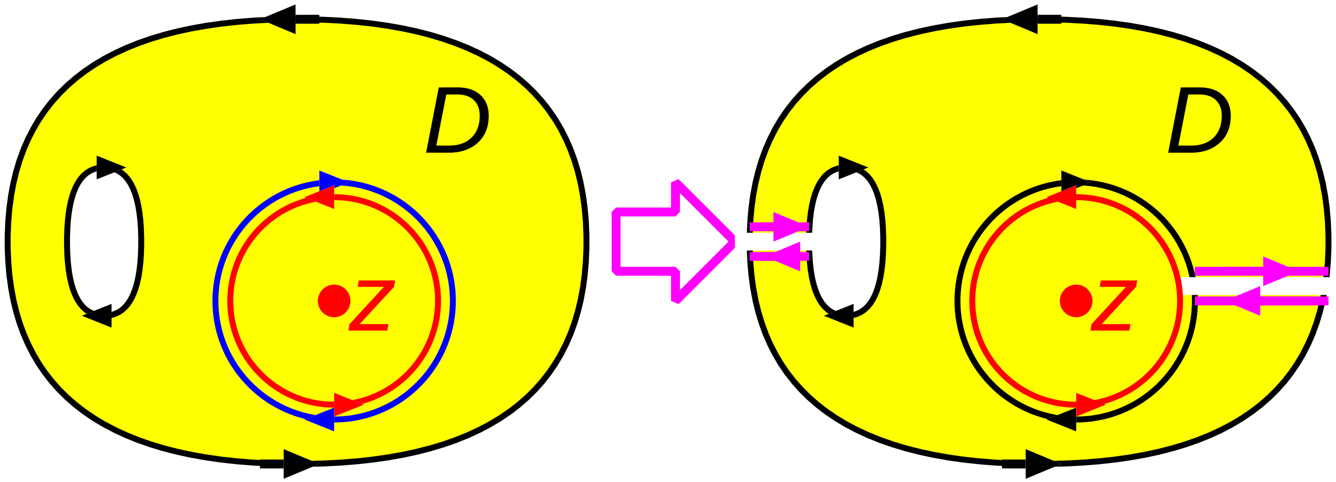
$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \\
- \sum_{k=1}^{p} \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta
\end{aligned}
$$

- 系 5.5 と定理 5.26 は定理 5.25 の特別な場合:
  - ▷ 系 5.5: 領域 D が単一閉曲線 C の内部;
  - ▷ 定理 5.26: $\partial D = C - C_1 - \cdots - C_p$;
- 定理 5.24 は定理 5.25 で $n = 1$ とした場合
- 系 5.4 は定理 5.25 の一部
- だから定理 5.25 のみ証明すれば十分

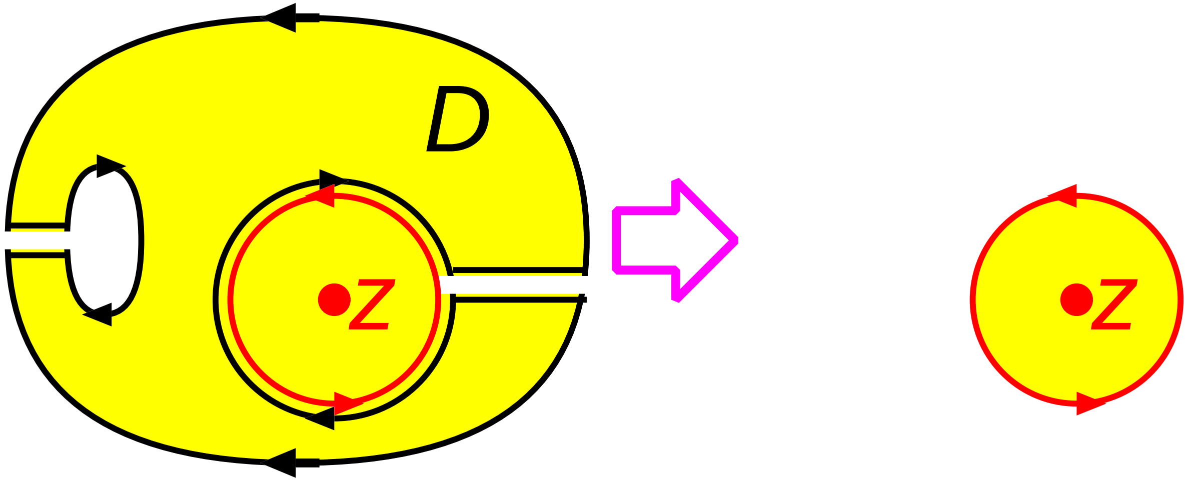
- 定理 5.25 の証明で難しいのは無限回微分可能性を示す部分で, 公式自体は簡単
- 定理 5.22 の証明で使った, 積分路を z を囲む正の向きを持った円に取り換える手法は, ここでもそのまま使える (以下で復習する)



積分路 (D の境界 ∂D, 黒い線) に, z を囲む正の向きの円 (赤い線) と負の向きの円 (青い線) を追加する．これらは互いに打ち消し合うので積分の結果には影響しない．積分が互いに打ち消し合うことから, 円の大きさは, D におさまっていれば, どう取ってもよい．

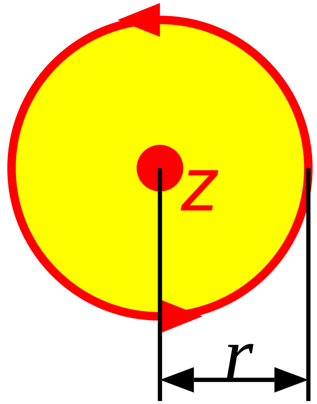


積分路に向きが反対で重なった直線を追加して切り開く. 追加した直線上での積分は互いに打ち消し合うから, これは積分の結果には影響しない.



黒い線に沿った領域の内部では, $\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}$ は (ζ の関数として) 正則であるから, 定理 5.16 により, 黒い線に沿った $\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}$ の積分は零．よってこれを省略すると, 図の右側の円に沿った積分のみが残る (円の大きさをどのように取ってもよいことに注意).

残った積分路を $\phi(t) = z + re^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ と書く． $\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}$ をこの積分路に沿って積分すればよい．



- 定理 5.22 の証明と同様に積分路を取り換えて, $C : \zeta = z + re^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$ とする.
- 公式自体は部分積分により導出できる: $1/(\zeta - z)^n = (\zeta - z)^{-n}$ と書くことにすると, $(d/d\zeta)((\zeta - z)^{-n}) = (-n)(\zeta - z)^{-(n+1)}$ だから, $f(\zeta)(\zeta - z)^{-(n+1)} = -\frac{1}{n} f(\zeta) \frac{d(\zeta - z)^{-n}}{d\zeta}$ であり, よって次式が得られる:

$$\int_C f(\zeta)(\zeta - z)^{-(n+1)} d\zeta = \int_C -\frac{1}{n} f(\zeta) \frac{d(\zeta - z)^{-n}}{d\zeta}$$
$$= \left[-\frac{1}{n} f(\zeta)(\zeta - z)^{-n} \right]_{t=0}^{t=2\pi} + \int_C \frac{1}{n} f'(\zeta)(\zeta - z)^{-n}.$$

- 積分路は閉曲線だから $\left[-\frac{1}{n}f(\zeta)(\zeta - z)^{-n}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0$; よって

$$\int_C f(\zeta)(\zeta - z)^{-(n+1)} d\zeta = \int_C \frac{1}{n} f'(\zeta)(\zeta - z)^{-n}$$

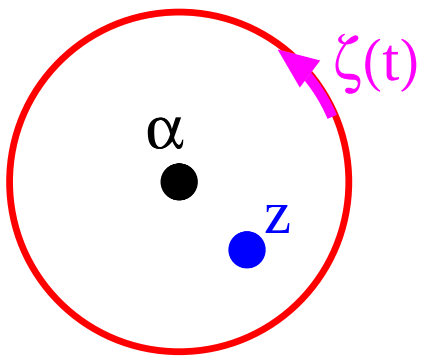
- 全体に $1/n$ が掛かり, f が 1 回微分され, $(\zeta - z)$ の次数が $-(n+1)$ から $-n$ に変わった

- これを何度も繰り返すと…

$$
\begin{aligned}
\int_C f(\zeta)(\zeta - z)^{-(n+1)} d\zeta &= \int_C \frac{1}{n} f'(\zeta)(\zeta - z)^{-n} \\
&= \int_C \frac{1}{n(n-1)} f''(\zeta)(\zeta - z)^{-(n-1)} \\
&= \cdots = \int_C \frac{1}{n!} f^{(n)}(\zeta)(\zeta - z)^{-1} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z)
\end{aligned}
$$

(さいごに定理 5.22 を使った). 両辺に $n!/2\pi i$ を書けると定理 5.25 の形になる.

教科書では無限回微分可能性と $f^{(n)}$ の式が同時に証明されているが, 技巧的なので, 以下では無限回微分可能性に絞った別証の概略を述べる. 証明の方針は, 一様収束する関数の級数が項別に積分できることと, 収束する整級数によって定まる関数は無限回微分できるという事実を使う, というものである. 曲線 C の内部の点 α を取り, 積分路を α を中心とした円 $C_1 : \zeta(t) = \alpha + re^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ に変更する. 積分路の変更は計算結果に影響しないから, $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1} \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$ である.



$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - \alpha}\frac{\zeta - \alpha}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - \alpha}\frac{1}{1 - \frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}}$$
$$= \frac{1}{\zeta - \alpha}\left(1 + \left(\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\right) + \left(\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\right)^2 + \cdots\right)$$

は $|z-\alpha| < |\zeta - \alpha|$ なので C_1 上で一様収束し, したがって

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \alpha}\left(1 + \left(\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\right) + \left(\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\right)^2 + \cdots\right) d\zeta$$

は項別に積分できるから, 収束する整級数となる. よって無限回微分可能である.

コーシーの積分定理の証明

コーシーの積分定理 (定理 5.16) は定理 5.17 から導かれるので, 定理 5.17 を証明すればよい.

定理 5.17(再掲) 領域 D が単連結で, $f(z)$ が D において正則ならば, D 内の任意の閉曲線 C に対し, 以下が成り立つ.

$$\int_C f(z)dz = 0$$

証明の手順　最初のステップを除き, 証明の手順は教科書 pp. 193∼198 と異なる: 定理 5.17 の仮定のもとで⋯

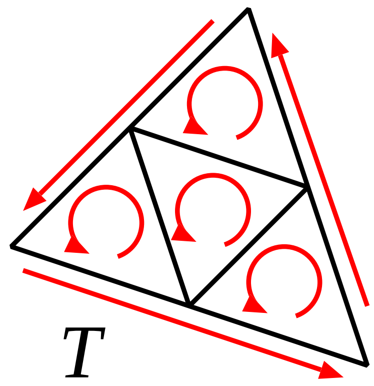
(1) 積分路が三角形の場合に定理 5.17 を証明する

(2) D 内の折れ線に沿った $f(z)$ の積分が折れ線の取り方に依存しないことを示す

(3) 上記を利用して $f(z)$ の原始関数を定義する

(4) よって, 定理 5.10 により, 定理 5.17 が示される.

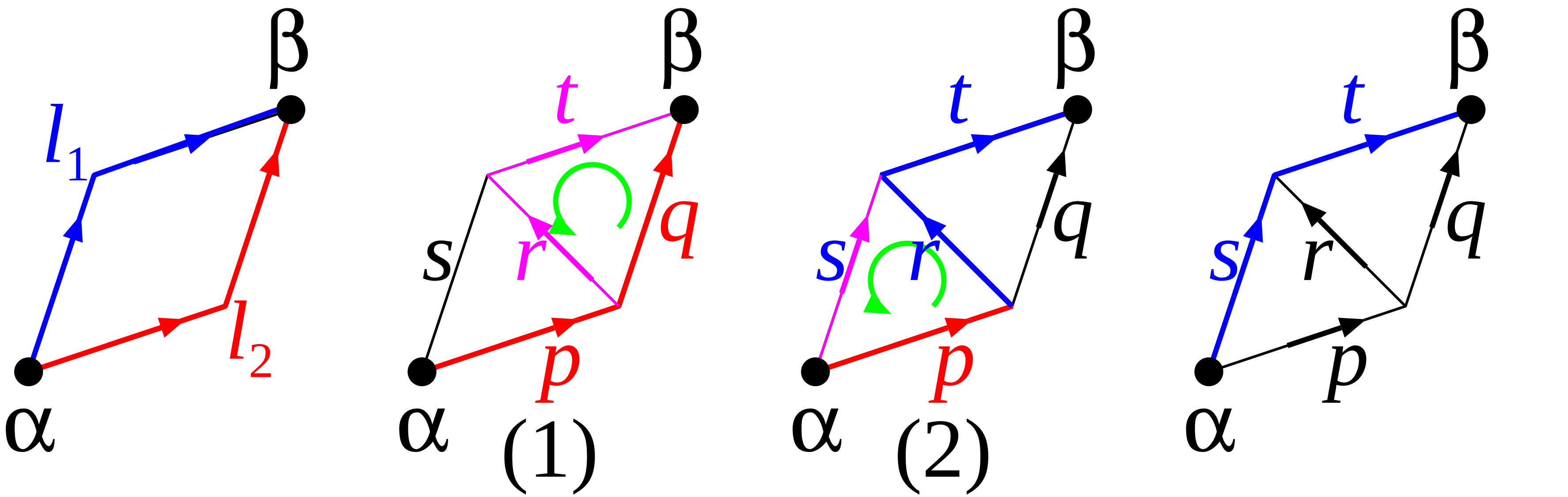
(1) D が単連結で f が D において正則なら f の D 内の三角形に沿った積分が零であることを示す. 三角形を T, その外周の長さを L とし, 正の向きを付ける. $\int_T f(z)dz \neq 0$ と仮定して矛盾を導く. T の各辺を 2 等分して 4 個の三角形を作り, 正の向きを付ける. 分割された三角形の中でこれに沿った f の積分の絶対値が最大のものを T_1 とすると $\left|\int_{T_1} f(z)dz\right| \geq \left|\int_T f(z)dz\right| /4$ が成り立つ. 以下同様に, T_n をの各辺を 2 等分した三角形の中でこれに沿った f の積分の絶対値が最大のものを T_{n+1} とする. この手順 1 回ごとに辺の長さは 1/2 になるから, すべての T_n の共通部分は一点である. この点を α とする.



まず，$\left|\int_{T_n} f(z)dz\right| \geq \left|\int_T f(z)dz\right|/4^n$ であることに注意する．次に，$f(z)$ は α で正則だから，いくらでも小さい ε に対し，α の除外近傍を，この除外近傍において $f(z) - f(\alpha) - f'(\alpha)(z-\alpha) = r(z,\alpha)$, $\|r(z,\alpha)\| < \varepsilon|z-\alpha|$ となるように取ることができる．n を T_n がこの近傍に含まれるように十分大きく取る．T_n の外周の長さを L_n とすると，$L_n = 2^{-n}L$ である．また，z と α はともに T_n の内部あるいは外周に含まれるから，$|z-\alpha| \leq L_n/2 = 2^{-(n+1)}L$ である．$\int_{T_n} f(z)dz = \int_{T_n} (f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha) + r(z,\alpha))\,dz$ であるが，$f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha)$ は原始関数 $f(\alpha)z + (1/2)f'(\alpha)(z-\alpha)^2$ を持つから，定理 5.10 により，$\int_{T_n} (f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha))\,dz = 0$ である．

よって，$\left|\int_{T_n} r(z,\alpha)dz\right| \leq \varepsilon 2^{-(n+1)} L \int_{T_n} d\zeta = (\varepsilon/2)4^{-n}L^2$ だから，先の結果とまとめると $\left|\int_{T_n} f(z)dz\right| \leq (\varepsilon/2)4^{-n}L^2$ である．一方，先ほど $\left|\int_{T_n} f(z)dz\right| \geq \left|\int_T f(z)dz\right|/4^n$ となることを見た．ε は必要に応じていくらでも小さく取れるから，$\left|\int_T f(z)dz\right| \neq 0$ であれば矛盾が発生する．したがって $\left|\int_T f(z)dz\right| = 0$ でなければならない．

(2) 定義域 D は連結開集合だったから, D の内部の 2 点は D 内の曲線で結べるが, 実はこの曲線を折れ線にすることもできる (これを厳密に示すには, D 内の一点 α から D 内の曲線を伝って到達できる点の集合と折れ線を伝って到達できる集合が同一であることを見ればよい). さて, α, β を D の内部の 2 点, l_1, l_2 が α と β を結ぶ D 内の折れ線とし (α から β に向かうように向きを付ける), $\int_{l_1} f(z)dz = \int_{l_2} f(z)dz$ であることを見る. 厳密には折れ線に含まれる点の数に関する数学的帰納法で証明するが, 考え方は α と β のあいだに点が 1 個しかない場合でも同じなので, この場合について, 次ページに l_2 に沿った積分が l_1 に沿った積分に置き換わる様子を示す.



l_2 に沿った積分が l_1 に沿った積分に置き換わる様子: (1) q に沿った積分は r に沿った積分と t に沿った積分の和に等しい, (2) p に沿った積分と r に沿った積分の合計は s に沿った積分と等しい

(3) $xi_0 \in D$ を固定する． z を D の内点とし，ξ_0 と z を結ぶ折れ線 $L(\xi_0, z)$ を取り，$F(z) = \int_{L(\xi_0,z)} f(\xi)d\xi$ と定義する． (2) で見たように，この積分は折れ線の取り方に依存しない． $F(z)$ が微分可能で $F'(z) = f(z)$ であることが示せれば，定理の証明は完成する．h を十分小さく取れば，z と $z+h$ を結ぶ直線 $S(z, z+h)$ が D に含まれるように取れる． そこで，ξ_0 と $z+h$ を結ぶ折れ線として，$L(\xi_0, z)$ と $S(z, z+h)$ を継ぎ足したもの $(L(\xi_0, z)+S(z, z+h))$ を取る．すると，$|F(z+h) - F(z) - f(z)h| = \left|\int_{S(z,z+h)} (f(\xi) - f(z))d\xi\right| \leq \int_{S(z,z+h)} |f(\xi) - f(z)|d\xi$ で, h を小さく取れば $S(z, z+h)$ 上で $|f(\xi) - f(z)|$ はいくらでも小さくできるから, $\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z)$ である. すなわち, $F(z)$ は微分可能で, $F'(z) = f(z)$ である. (証明終)