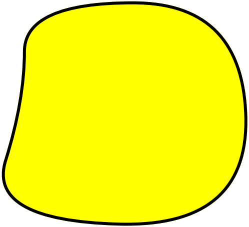
電 210 電気数学 IV

第 11 回

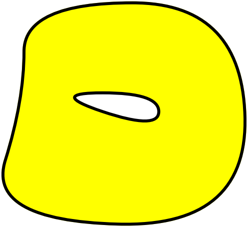
複素積分 (3)

コーシーの積分定理 (1)

- この講義では, 当面はコーシーの積分定理の証明は省く (教科書 pp. 193∼198)
- 以下コーシーの積分定理について述べてゆくが…
- 定義域 D に穴があいているかどうか」が問題になる

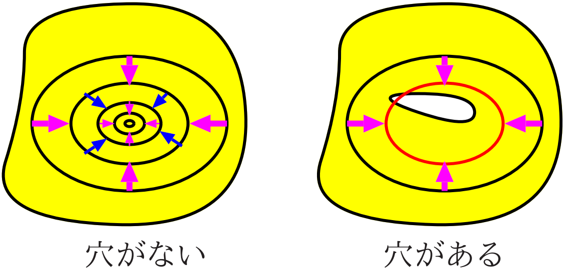


穴がない



穴がある

- 穴があいていない領域を単連結という
- 単連結であるか否かを判定するには, 簡単な場合には絵を書けばよいが, 一般的な場合を数学的に定義するのは少し面倒



D 内の閉曲線を縮めたとき, D に穴がなければ
どこまでも縮められるが, 穴があると引っかかる

コーシーの積分定理 (2) (p.183)

定義　D 内のすべての閉曲線が D 内で一点にまで縮小できるとき, D を単連結という.

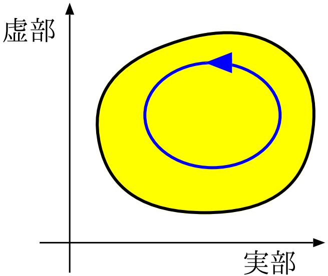
- 教科書の定義 5.12 ではジョルダンの閉曲線定理に基づいて単連結であることを定義しているが, 言っていることは同じ
- わかりやすい方で考えるとよい

教科書と説明の順序を変え, まず領域が単連結な場合の定理について述べる (定理 5.17, 定理 5.18).

コーシーの積分定理 (3) (p.184)

定理 5.17 領域 D が単連結で, $f(z)$ が D において正則ならば, D 内の任意の閉曲線 C に対し, 以下が成り立つ.

$$\int_C f(z)dz = 0$$



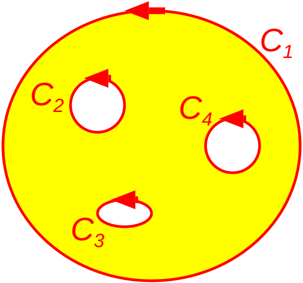
$$\int_C f(z)dz = 0$$

- 今回の講義では, 定理 5.17 をとりあえず認めた上で, ここから導かれる結果について述べてゆく.
- 積分した結果が零になる関係で, 曲線の向きは正負どちらでもよい.
- 定理 5.17 と定理 5.14 を組み合わせると, 次の結果が得られる.

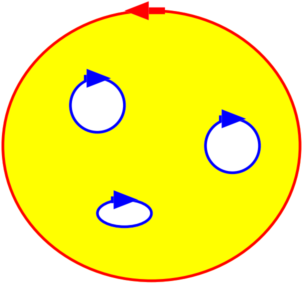
コーシーの積分定理 (4) (p.184)

定理 5.18　領域 D が単連結で, $f(z)$ が D において正則ならば, $f(z)$ の原始関数が存在する.

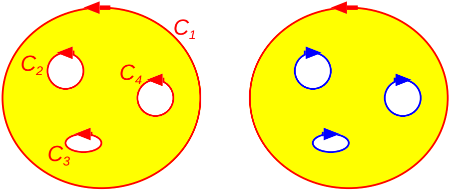
- 次に, 必ずしも単連結とは限らない領域 D を考える.
- 領域 D の境界 ∂D が有限個の区分的に滑らかな曲線から成るものとする
- 境界には正の向き (内部を左に見て進む) をつける (曲線の正の向きと異なることがあるので注意)



曲線の正の向き


境界の正の向き

領域の境界の「正の向き」の規則が「領域の内部を左に見て進む」だったのに対し, 曲線の「正の向き」の規則が「曲線の内部 (有界な方) を左に見て進む」だったから, 「領域の内部」と「曲線の内部」が一致しないときは, 正の向きも一致しない.



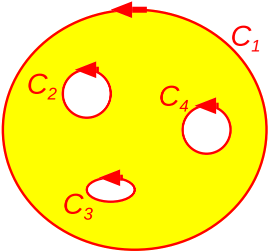
曲線の正の向き　　　境界の正の向き

C_1, C_2, C_3, C_4 のすべてに (曲線としての) 正の向きがつけられているものとすると, 外周では境界の向きと曲線 C_1 の向きが一致し, 内周では境界の向きと曲線 C_2, C_3, C_4 の向きが逆なので, 境界は $\partial D = C_1 - C_2 - C_3 - C_4$ と書ける.

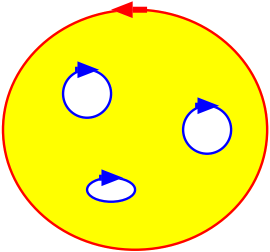
コーシーの積分定理 (4) (p.182)

定理 5.16 領域 D の境界 ∂D が有限個の互いに交わらない区分的に滑らかな曲線から成り, 境界には正の向きが付けられ, $f(z)$ が $D \cup \partial D$ を含む領域で正則であるとき, $\displaystyle\int_{\partial D} f(z)dz = 0$ が成り立つ.

証明には定理 5.17 を使う (後述)



曲線の正の向き



境界の正の向き

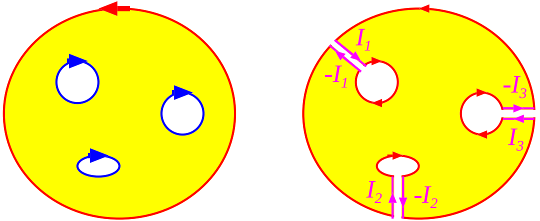
この例では, D および $f(z)$ が定理の条件を満たせば,

$$\int_{C_1} f(z)dz + \int_{-C_2} f(z)dz + \int_{-C_3} f(z)dz + \int_{-C_4} f(z)dz = 0$$

となる

- 教科書には「D が互いに交わらない有限個の区分的に滑らかな単一閉曲線ではさまれた領域」と記載されているが, わかりにくいので言い換えた.

- 定理 5.16 が成立する理由は次のページの図を見ればわかる.

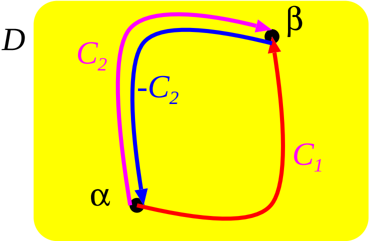


$I_1, -I_1, I_2, -I_3, I_3, -I_3$ を積分路に付け加え, 定義域を図の右側の色がついた領域に縮小すると, この定義域は単連結だから, 定理 5.17 がそのまま適用できる. I_1 と $-I_1$, I_2 と $-I_2$, I_3 と $-I_3$ における積分は打ち消し合うから結果には無関係. もっと複雑な形の領域でも考え方は同じ.

これから述べられるのは，コーシーの積分定理を様々な形で言い換えたものである．

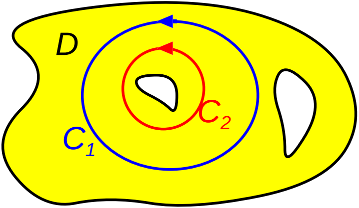
コーシーの積分定理 (5) (p.186)

定理 5.19 単連結な領域 D において $f(z)$ が正則であるとき, D 内での 2 点 α, β を結ぶ曲線に沿った $f(z)$ の積分は積分路に依存しない.



$C_1+(-C_2)$ が D 内の閉曲線であるから, 定理5.17により, $\int_{C_1+(-C_2)} f(z)dz = 0$. よって, $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$ となる.

次の定理では, 以下の図のような状況を考える (言葉で書くとわかりにくい)

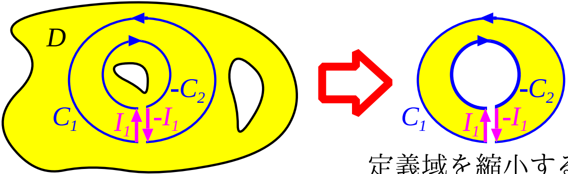


C_1 の内部に C_2, C_1 と C_2 が挟む領域 (C_1 の内部かつ C_2 の外部) は D 内にある

コーシーの積分定理 (6) (p.187)

定理 5.20 $f(z)$ が領域 D で正則で, D に 2 個の単一閉曲線 C_1, C_2 があり, C_1 の内部に C_2 があって, C_1 と C_2 にはともに曲線としての正の向きが付けられ, C_1 と C_2 のあいだの領域が D に含まれるとき, $\displaystyle\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$ となる.

理由は次のページの図を見ればわかる.



定義域を縮小すると…

C_2 の向きを反転して $-C_2$) を作り，さらに積分路に I_1 と $-I_1$ を追加する． 定義域を $C_1, I_1, -I_1, -C_2$ が囲む領域に縮小すると，この領域は単連結だから，定理 5.17 が適用できて，$\int_{C_1+I_1+(-I_1)+(-C_2)} f(z)dz = 0$ となる．I_1 と $-I_1$ で積分は打ち消し合うから，$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$ がいえる．

演習 11-1

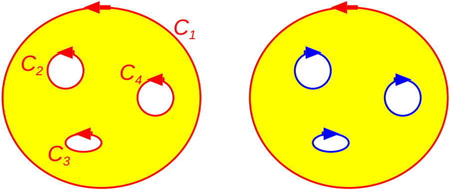
空欄を埋めよ.

演習 11-1 解答

$$\int_C f(z)dz = \int_0^{2\pi} \boxed{\frac{1}{re^{it}}} \boxed{ire^{it}} dt = \int_0^{2\pi} \boxed{i} dt.$$

$\displaystyle\int_C \frac{1}{z-\alpha}dz = \boxed{2\pi i}$ となる (計算結果が r に依存しないことに注意).

定理 5.18 は領域の境界に関する定理だったが…



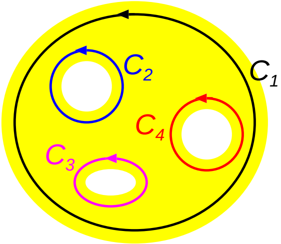
曲線の正の向き　　境界の正の向き

境界は $\partial D = C_1 - C_2 - C_3 - C_4$

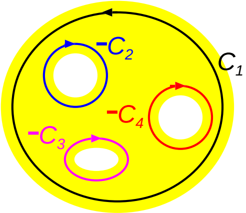
同じ考えが領域の内部の積分路にも適用できる

コーシーの積分定理 (7) (p.189)

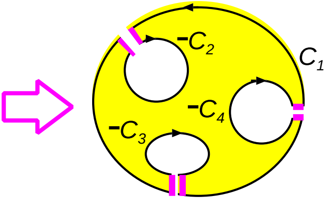
定理 5.21 単一閉曲線 C の内側に (内部も含めて) 互いに交わらず (曲線としての) 正の向きが付けられた単一閉曲線 $C_1,\ldots,C_p$ があり，関数 $f(z)$ が C およびその内部から $C_1,\ldots,C_p$ の内部を除いた集合を含む領域で正則であるとき，
$$\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{p} \int_{C_k} f(z)dz$$
となる.



- この例では, $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz + \int_{C_4} f(z)dz$ となる.
- 証明は定理 5.16 とほぼ同じ (次ページ)



C_2, C_3, C_4の向きを変えて…



必要部分を抜き出し
切れ目を入れる

図の右で追加した直線に沿った積分は互いに打ち消し合うから最終結果には寄与しない.

- 定理 5.21 に関する教科書の記述は曲線の向きに関する記述が抜けているので間違い.

- 定理 5.16 の後の例 ($\int_C f(z)dz+\int_{-C_1} f(z)dz+\int_{-C_2} f(z)dz+\int_{-C_3} f(z)dz = 0$) に $\int_{-C_i} f(z)dz = -\int_{C_i} f(z)dz,\ i = 1,2,3$ を使うとこの形になる

演習 11-2

空欄を埋めよ.

演習 11-2 解答

$$f(z) = \frac{\boxed{1/2}}{z-1} - \frac{\boxed{1/2}}{z+1}, \int_{C_1} \frac{1}{z-1} dz = \boxed{2\pi i},$$

$$\int_{C_1} \frac{1}{z+1} dz = \boxed{0}, \int_{C_2} \frac{1}{z-1} dz = \boxed{0},$$

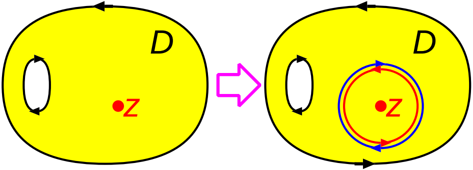
$\displaystyle\int_{C_2} \frac{1}{z+1} dz = \boxed{2\pi i}$ であるから, これらをまとめると, $\displaystyle\int_C f(z) dz = \boxed{0}$ となる.

コーシーの積分公式 (1) (p.199)

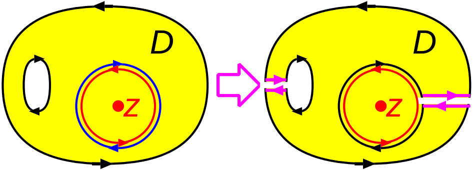
定理 5.22 領域 D の境界 ∂D が有限個の互いに交わらない区分的に滑らかな曲線から成り, 境界には正の向きが付けられ, $f(z)$ が $D \cup \partial D$ を含む領域で正則であるとき, 次式が成り立つ:

$$\forall z \in D, f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

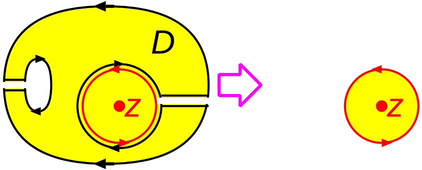
- $\dfrac{1}{\zeta - z}$ をコーシー核という.
- 定理 5.22 の証明は難しくないのでざっと見てゆく



$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$ を積分する積分路 (D の境界 ∂D, 黒い線) に, z を囲む正の向きの円 (赤い線) と負の向きの円 (青い線) を追加する. これらは互いに打ち消し合うので積分の結果には影響しない. 積分が互いに打ち消し合うことから, 円の大きさは, D におさまっていれば, どう取ってもよい.

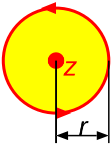


積分路に向きが反対で重なった直線を追加して切り開く. 追加した直線上での積分は互いに打ち消し合うから, これは積分の結果には影響しない.



黒い線に沿った領域の内部では, $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ は (ζ の関数として) 正則であるから, 定理 5.16 により, 黒い線に沿った $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ の積分は零なので積分の結果に影響しない. よってこれを省略すると, 図の右側の円に沿った積分のみが残る. 円の大きさをどのように取っても積分の値が同じになることに注意する.

残った積分路を $\phi(t) = z + re^{it}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ と書く．$\phi(t) - z = re^{it}$, $d\phi/dt = ire^{it}$ だから, $\phi(t)$ に沿った積分は, $\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(\phi(t))}{\phi(t)-z}\frac{d\phi}{dt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+re^{it})dt$ のように評価され, ゆえに $f(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(z) - f(z+re^{it}))dt$ であるが, r を小さく取れば右辺の積分はいくらでも小さくなる．この積分が実は r に依存しなかったことを思い出すと, $f(z) - \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = 0$ であることがわかる．



$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ において, z は関数値を評価したい点 (固定), ζ は積分路上を動く変数

▷ 変数の記号が変わることがある!

$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\beta)}{\beta - \alpha} d\beta$ β が ∂D 上を動く	$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz$ z が ∂D 上を動く

混乱しないように

コーシーの積分公式 (2) (p.201)

系 5.3 領域 D が単連結で, $f(z)$ が D において正則であるとき, D の内部にある正の向きをもつ単一閉曲線 C と C の内部にある点 z に対し, 次式が成り立つ:

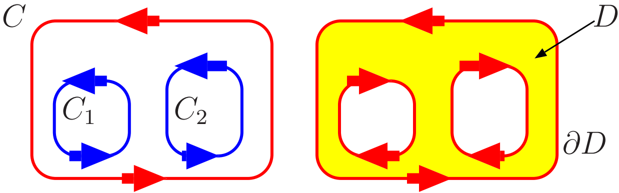
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

証明は定理 5.22 とまったく同じ.

コーシーの積分公式 (3) (p.203)

定理 5.23 単一閉曲線 C の内側に (内部も含めて) 互いに交わらない単一閉曲線 $C_1, \ldots, C_p$ があり，すべての閉曲線が正の向きを持ち，$f(z)$ が C とその内部から $C_1, \ldots, C_p$ の内部を除いた集合を含む領域で正則であるとき，$\forall z,\ f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ となる．

- $C - C_1 - C_2 - \cdots - C_p$ が D の境界 ∂D で, $f(z)$ は D で正則であると考えれば…
- 定理 5.22 を言い換えただけ
- $C_1, \ldots, C_p$ の向きと境界の向きが逆になっているので注意



C, C_1 および C_2 に正の向きが付けられているとき右側の黄色の領域 D の境界 ∂D は $C - C_1 - C_2$

要するに系 5.3 と定理 5.23 はどちらも定理 5.22 の特別な場合:

- 系 5.3: 領域 D が単一閉曲線 C の内部;
- 定理 5.23: $\partial D = C - C_1 - \cdots - C_p$;

よって, 証明するまでもなく当然成り立つ事実

演習 11-3

空欄を埋め, 正しいと思う方を選択せよ.

演習 11-3 解答

$\boxed{2\pi i} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \dfrac{\boxed{2\pi i}}{\zeta - z}d\zeta$ となる．これは演習 11-1 の結果と一致 $\boxed{\text{する}}$ (右辺の分母と分子の $2\pi i$ をキャンセルすればよい).

コーシーの積分公式 (5) (p.204)

定理 5.24 定理 5.22 と同じ仮定の下で, 次式が成り立つ:

$$\forall z \in D, f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

証明は定理 5.26 の後でまとめて述べる.

コーシーの積分公式 (6) (p.205)

定理 5.25 定理 5.22 と同じ仮定の下で, f は無限回微分可能で, 次式が成り立つ:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in D, f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

系 5.4 領域 D で正則な関数は無限回微分可能である.

コーシーの積分公式 (8) (p.208)

系 5.5 　系 5.3 と同じ仮定および記号の下で，次式が成立する:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

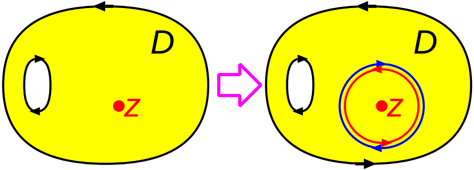
コーシーの積分公式 (9) ((p.209)

定理 5.26 定理 5.23 と同一の仮定および記号の下で, 次が成立する: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in D$,

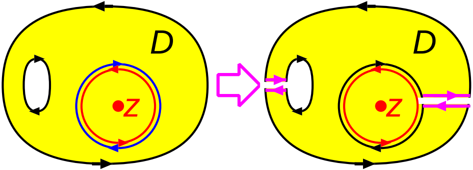
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta - \sum_{k=1}^{p}\frac{n!}{2\pi i}\int_{C_k}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta$$

- 系 5.5 と定理 5.26 は定理 5.25 の特別な場合:
  - ▷ 系 5.5: 領域 D が単一閉曲線 C の内部;
  - ▷ 定理 5.26: $\partial D = C - C_1 - \cdots - C_p$;
- 定理 5.24 は定理 5.25 で $n = 1$ とした場合
- 系 5.4 は定理 5.25 の一部
- だから定理 5.25 のみ証明すれば十分

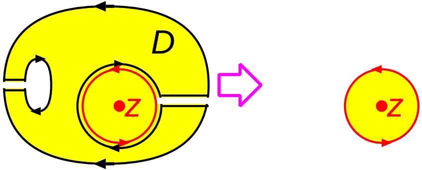
- 教科書 p.209 の定理 5.26 の記述は間違っている (曲線の個数と微分の回数は無関係)
- 定理 5.25 の証明で難しいのは無限回微分可能性を示す部分で, 公式自体は簡単
- 定理 5.22 の証明で使った, 積分路を z を囲む正の向きを持った円に取り換える手法は, ここでもそのまま使える (以下で復習する)



積分路 (D の境界 ∂D, 黒い線) に, z を囲む正の向きの円 (赤い線) と負の向きの円 (青い線) を追加する. これらは互いに打ち消し合うので積分の結果には影響しない. 積分が互いに打ち消し合うことから, 円の大きさは, D におさまっていれば, どう取ってもよい.

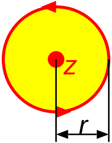


積分路に向きが反対で重なった直線を追加して切り開く. 追加した直線上での積分は互いに打ち消し合うから, これは積分の結果には影響しない.



黒い線に沿った領域の内部では, $\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}$ は (ζ の関数として) 正則であるから, 定理 5.16 により, 黒い線に沿った $\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}$ の積分は零. よってこれを省略すると, 図の右側の円に沿った積分のみが残る (円の大きさをどのように取ってもよいことに注意).

残った積分路を $\phi(t) = z + re^{it}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ と書く. $\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}$ をこの積分路に沿って積分すればよい.



- 定理 5.22 の証明と同様に積分路を取り換えて, $C : \zeta = z + re^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$ とする.

- 公式自体は部分積分により導出できる: $1/(\zeta - z)^n = (\zeta - z)^{-n}$ と書くことにすると, $(d/d\zeta)((\zeta - z)^{-n}) = (-n)(\zeta - z)^{-(n+1)}$ だから, $f(\zeta)(\zeta - z)^{-(n+1)} = -\frac{1}{n} f(\zeta) \frac{d(\zeta - z)^{-n}}{d\zeta}$ であり, よって次式が得られる:

$$
\begin{aligned}
\int_C f(\zeta)(\zeta - z)^{-(n+1)} d\zeta &= \int_C -\frac{1}{n} f(\zeta) \frac{d(\zeta - z)^{-n}}{d\zeta} \\
&= \left[-\tfrac{1}{n} f(\zeta)(\zeta - z)^{-n} \right]_{t=0}^{t=2\pi} + \int_C \frac{1}{n} f'(\zeta)(\zeta - z)^{-n}.
\end{aligned}
$$

- 積分路は閉曲線だから $\left[-\frac{1}{n}f(\zeta)(\zeta-z)^{-n}\right]_{t=0}^{t=2\pi}=0$; よって

$$\int_C f(\zeta)(\zeta-z)^{-(n+1)}d\zeta=\int_C \frac{1}{n}f'(\zeta)(\zeta-z)^{-n}$$

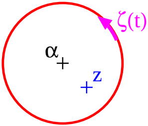
- 全体に $1/n$ が掛かり, f が 1 回微分され, $(\zeta-z)$ の次数が $-(n+1)$ から $-n$ に変わった

- これを何度も繰り返すと…

$$
\begin{aligned}
\int_C f(\zeta)(\zeta - z)^{-(n+1)} d\zeta &= \int_C \frac{1}{n} f'(\zeta)(\zeta - z)^{-n} \\
&= \int_C \frac{1}{n(n-1)} f''(\zeta)(\zeta - z)^{-(n-1)} \\
&= \cdots = \int_C \frac{1}{n!} f^{(n)}(\zeta)(\zeta - z)^{-1} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z)
\end{aligned}
$$

(さいごに定理 5.22 を使った). 両辺に $n!/2\pi i$ を書けると定理 5.25 の形になる.

教科書では無限回微分可能性と $f^{(n)}$ の式が同時に証明されているが, 技巧的なので, 以下では無限回微分可能性に絞った別証の概略を述べる. 証明の方針は, 一様収束する関数の級数が項別に積分できることと, 収束する整級数によって定まる関数は無限回微分可能できるという事実を使う, というものである. 積分路を α を中心とした円 $C:\zeta(t) = \alpha + re^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ に変更する. 積分路の変更は計算結果に影響しないから, $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$ である.



$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - \alpha}\frac{\zeta - \alpha}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - \alpha}\frac{1}{1 - \frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}}$$
$$= \frac{1}{\zeta - \alpha}\left(1 + \left(\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\right) + \left(\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\right)^2 + \cdots\right)$$

は $|z-\alpha| < |\zeta - \alpha|$ なので C 上で一様収束し, したがって

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - \alpha}\left(1 + \left(\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\right) + \left(\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\right)^2 + \cdots\right) d\zeta$$

は項別に積分できるから, 収束する整級数となる. よって無限回微分可能である.

演習 11-4

空欄を埋めよ.

演習 11-4 解答

$k \geq 2$ なら $f^{(k-1)}(z) = \boxed{0}$, $\boxed{0 = \dfrac{(k-1)!}{2\pi i} \displaystyle\int_C \frac{1}{\zeta^k} d\zeta}$,,

$\displaystyle\int_C \frac{1}{\zeta^k} d\zeta = \boxed{0}$.

積分に使うダミー変数には, ζ, z などが使われる. z はダミー変数でないこともあり, 混乱しやすいので注意せよ.