電 210 電気数学 IV
第 10 回
複素積分 (2)

複素積分 (復習) (p.159)

定義 5.6 $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ で, 曲線 $C : z = z(t)$ $(a \leq t \leq b)$ が D に含まれているとき, $f(z)$ の曲線 (積分路)C に沿った**複素積分**を以下によって定義する:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$

- $\int_a^b f(z(t))z'(t)dt$ は, $[a,b]$ を $a=t_0,t_1,\ldots,t_N=b$ と分割したときの和 $\sum_{i=0}^{N-1} f(z(\tau_i))z'(\tau_i)(t_{i+1}-t_i)$ の, 分割を細かくした極限 (ただし $\tau_i \in [t_i,t_{i+1}]$) として定義されている
- 実は, $\tau_i \in [t_i,t_{i+1}]$ をどのように取っても極限が同じ値になるということが, 積分の定義に含まれている

- $z'(\tau_i)(t_{i+1} - t_i) \simeq z(t_{i+1}) - z(t_i)$ だから…
- $\displaystyle\int_a^b f(z(t))z'(t)dt$ は,

$$\sum_{i=0}^{N-1} f(z(\tau_i))(z(t_{i+1}) - z(t_i))$$

の, 分割を細かくしたときの極限と考えることもできる (教科書 168∼170 ページ); 実は, この定義の方が使い勝手がよい.

曲線のパラメータ変換 (1)

- $z : [a,b] \to D$ を滑らかな曲線 C とし, $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ を $\varphi' > 0$ を満たす連続微分可能な関数とする. このとき, 合成関数 $z \circ \varphi$ はやはり滑らかな曲線となる.

- $\varphi' > 0$ であるから, φ は微分同相写像と呼ばれるものになっている

曲線のパラメータ変換 (2)

- 微分同相写像を使って曲線のパラメータを取り換えることをパラメータ変換という

- 曲線 C を $C : z = z(t), a \leq t \leq b$ に対し, $w(s) = z(\varphi(s))$ とおき, 曲線 Γ を $\Gamma : z = w(s), c \leq s \leq d$ と定義する.

複素積分 (5) (p.161)

定理 5.4　以上で述べたパラメータ変換に対し，次式が成立する:

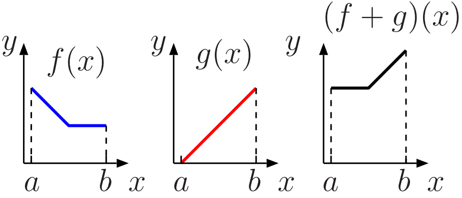
$$\int_C f(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz$$

証明

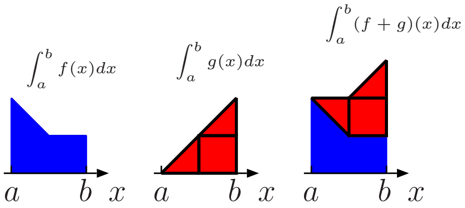
$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma f(z)dz &= \int_c^d f(z(\varphi(s))(z\circ\varphi)'ds \\
&= \int_c^d f(z(\varphi(s))z'(\varphi(s))\varphi'(s)ds \\
&= \int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \int_C f(z)dz
\end{aligned}
$$

ただし3行目第1式で $t=\varphi(s)$ とおき定理5.2(p.158)を使った.

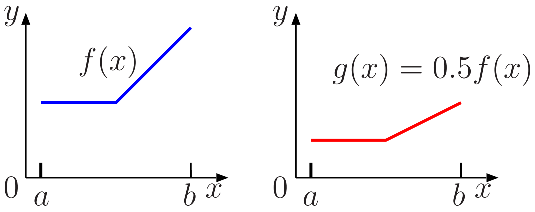
ここで, 実数値関数の定積分に関する事実をいくつか復習しておく.



$$\int_a^b (f+g)(x)dx =?$$

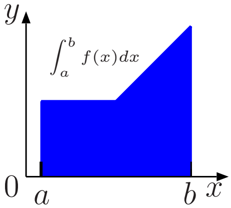


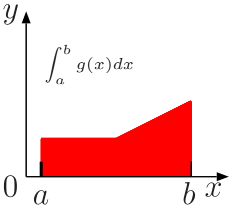
$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$



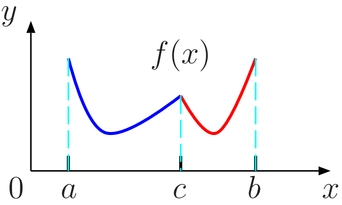
$$\int_a^b g(x)dx = ?$$

$$\int_a^b 0.5f(x)dx = 0.5\int_a^b f(x)dx$$

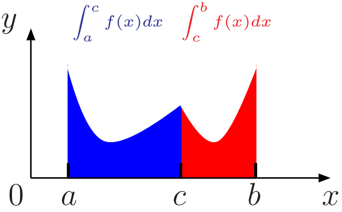




一般に, $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx$



$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad \text{VS} \quad \int_a^b f(x)dx$$



$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

$\int_b^a f(x)dx$ は次のように定義されていた:

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

まとめて…

$$\int_a^b \alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x) dx$$
$$= \alpha_1 \int_a^b f(x)dx + \alpha_2 \int_a^b g(x)dx$$
$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$
$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

これらは, 複素積分でも, ほとんどそのまま成り立つ.

複素積分 (6) (p.162)

定理 5.5 (1) f, g は D で定義された連続関数で, C は D に含まれる曲線としたとき, 以下が成り立つ: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\int_C \alpha f(z) + \beta g(z) dz = \alpha \int_C f(z) dz + \beta \int_C g(z) dz$$

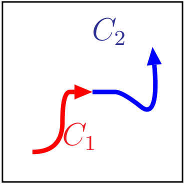
証明　積分の定義に戻れば

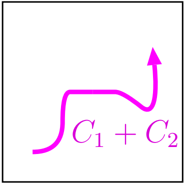
$$\begin{aligned}
&\int_C (\alpha f(z) + \beta g(z))\, dz \\
&= \int_a^b (\alpha f(z(t)) + \beta g(z(t))) z'(t) dt \\
&= \int_a^b \alpha f(z(t)) z'(t) dt + \int_a^b \beta g(z(t)) z'(t) dt \\
&= \alpha \int_C f(z) dz + \beta \int_C g(z) dz
\end{aligned}$$

複素積分 (7) (p.162)

定理 5.5 (2) $z : [a,b] \to D$ の定義域 $[a,b]$ を 2 分し，前半を $[a,c]$，後半を $[c,b]$ とする．また，$C_1 : z = z(t), a \leq t \leq c$, $C_2 : z = z(t), c \leq t \leq b$ とし, $C = C_1 + C_2$ と書くと, 次が成り立つ:

$$\int_{C_1+C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$





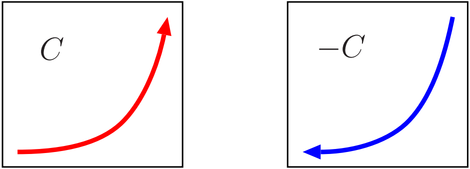
実関数の積分とまったく同じ理由から,

$$\int_{C_1+C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

複素積分 (8) (p.162)

定理 5.5 (3) C の向きを逆にした曲線を $-C$ と書くと, 次が成り立つ:

$$\int_{-C} f(z)dz = -\int_{C} f(z)dz$$



$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \text{ と同様}$$

図などを見ればすぐにわかる結果なので, この講義では詳しい計算には立ち入らない. 興味がある者は教科書 pp. 162∼163 の証明を参照せよ.

演習 10-1

空欄を埋め, 正しいと思う方を選択せよ.

演習 10-1 解答 (1)

$C_1 : z(t) = e^{i(t-\pi)} (0 \leq t \leq \pi)$, $f(z(t)) = \boxed{e^{-i(t-\pi)}}$,

$z'(t) = \boxed{ie^{i(t-\pi)}}$,

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{\boxed{0}}^{\boxed{\pi}} \boxed{e^{-i(t-\pi)}}\,\boxed{ie^{i(t-\pi)}}\,dt = \int_{\boxed{0}}^{\boxed{\pi}} \boxed{i}\,dt;$$

$$\int_{C_1} f(z)dz = \boxed{i\pi}$$

演習 10-1 解答 (2)

$C_2 : z(t) = e^{i(\pi - t)} (0 \le t \le \pi)$, $f(z(t)) = \boxed{e^{-i(\pi - t)}}$,

$z'(t) = \boxed{-ie^{i(\pi - t)}}$,

$$\int_{C_2} f(z)dz = \int_{\boxed{0}}^{\boxed{\pi}} \boxed{e^{-i(\pi-t)}} \boxed{\left(-ie^{i(\pi-t)}\right)} dt = \int_{\boxed{0}}^{\boxed{\pi}} \boxed{-i} dt;$$

$\displaystyle\int_{C_2} f(z)dz = \boxed{-i\pi}$. $\int_{C_1} f(z)dz$ と $\int_{C_2} f(z)dz$ は一致 $\boxed{\text{しない}}$

演習 10-1 解答 補足

複素関数の積分は一般に積分路に依存する．しかし, 後で述べるように, 正則関数の積分は積分路によらず, 端点のみで定まる.

次に, 複素積分を実部と虚部に分けることを考える.

$$f(z) = u(z) + iv(z)$$
$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

とすると…

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(z(t))z'(t)dt \\
&= \int_a^b (u(z(t))x'(t) - v(z(t))y'(t))dt \\
&\qquad + i\int_a^b u(z(t))y'(t) + v(z(t))x'(t)dt
\end{aligned}
$$

となるから…

以下のように記号を定義すると…

$$\int_C u\,dx = \int_a^b u(z(t))x'(t)dt$$
$$\int_C v\,dx = \int_a^b v(z(t))x'(t)dt$$
$$\int_C u\,dy = \int_a^b u(z(t))y'(t)dt$$
$$\int_C v\,dy = \int_a^b v(z(t))y'(t)dt$$

複素積分 (9) (p.164)

定理 5.6 以上の定義のもとで以下の等式が成り立つ:

$$\int_C f(z)dz = \int_C (udx - vdy) + i \int_C (udy + vdx)$$

これは機械的に記号を書き直しただけ.

- 定理 5.6 は教科書でグリーンの公式に関する議論をするとき使う

- この講義ではグリーンの公式は取り扱わない

複素積分 (10)

定義 曲線 $C: z = z(t), a \leq t \leq b$ の弧長 L を以下によって定義する:

$$L = \int_a^b |z'(t)| dt$$

複素積分 (11) (p.165)

定義 5.7 $a \leq b$ のとき, 弧長による積分を以下のように定義する:

$$\int_C f(z)|dz| = \int_a^b f(z(t))|z'(t)|dt$$

複素積分 (12) (p.166)

定理 5.7 曲線の弧長を L とし, C 上で $|f(z)| \leq M$ が成り立つものとすると, 以下の不等式が成立する:

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)||dz| \leq ML$$

教科書 p.166 における定理 5.7 の証明は不十分; $a \leq b$ としたとき, 以下を順に示す必要がある.

(1) 実数値関数 $p(x)$ に関し, $\left|\int_a^b p(x)dx\right| \leq \int_a^b |p(x)|dx$

(2) 複素関数 $f(z)$ に関し,
$$\left|\int_a^b f(z(t))z'(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|dt$$

小さい字で証明を書いておくので興味がある者だけ読んでほしい.

(1) $p^+(x) = \begin{cases} p(x), & p(x) \geq 0 \\ 0, & p(x) < 0 \end{cases}$, $p^-(x) = \begin{cases} 0, & p(x) \geq 0 \\ -p(x), & p(x) < 0 \end{cases}$ と定義すると, $p(x) = p^+(x) - p^-(x)$ であり, かつ $|p(x)| = p^+(x) + p^-(x)$. ところで, $\int_a^b p(x)dx = \int_a^b p^+(x)dx - \int_a^b p^-(x)dx$ だから,
$|\int_a^b p(x)dx| \leq |\int_a^b p^+(x)dx| + |\int_a^b p^-(x)dx|$ となるが, $p^+(x) \geq 0$, $p^-(x) \geq 0$ に注意すると, $|\int_a^b p^+(x)dx| = \int_a^b p^+(x)dx$, $|\int_a^b p^-(x)dx| = \int_a^b p^-(x)dx$ であり, よって $|\int_a^b p(x)dx| \leq \int_a^b p^+(x)dx + \int_a^b p^-(x)dx = \int_a^b (p^+(x) + p^-(x))dx = \int_a^b |p(x)|dx$ が成り立つ.

(2) 記法の簡単のため, $f(z(t))z'(t)$ を $g(t)$ と書く. $|\int_a^b g(t)dt| \leq \int_a^b |g(t)|dt$ が示すべき不等式である. $\int_a^b g(t)dt = re^{i\theta}$ と書くことにすると, $|\int_a^b g(t)dt| = e^{-i\theta}\int_a^b g(t)dt = \int_a^b e^{-i\theta}g(t)dt$ で, $\int_a^b e^{-i\theta}g(t)dt$ が実数であることから, さらに $|\int_a^b g(t)dt| = \int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}g(t)\right)dt$ となる. $\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}g(t)\right)$ は実数値関数だから, (1) が使えて, $|\int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}g(t)\right)dt| = \int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}g(t)\right)dt \leq \int_a^b \left|\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}g(t)\right)\right|dt \leq \int_a^b |g(t)|\,dt$ となる (ただし $|e^{-i\theta}| = 1$ であることと, $|\mathrm{Re}\,g(t)| \leq |g(t)|$ となることを使った). これらをまとめると, 示すべき不等式 $|\int_a^b g(t)dt| \leq \int_a^b |g(t)|dt$ が得られる.

定理 5.7 の証明　以上を踏まえて定理の証明に戻ると,

$$\left|\int_C f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(z(t))z'(t)dt\right|$$
$$\leq \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|dt \leq M\int_a^b |z'(t)|dt$$
$$= ML$$

- 項別積分に関する定理 5.8 (p.167) については詳しい説明を省く.

- 関数の級数が良い性質を持つときには, 無限和と積分の順序の交換が許される:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_C f_n(z)dz = \int_C \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \right) dz$$

という程度の理解でよい.

不定積分 (1) (p.170)

定義 5.8 領域 D で定義された連続関数 $f(z)$ に対し, $\forall z \in D$, $F'(z) = f(z)$ となる関数を $f(z)$ の原始関数という.

不定積分 (2) (p.171)

定理 5.10 領域 D で定義された連続関数 $f(z)$ が原始関数 $F(z)$ を持つとき, D 内の曲線 $C : z = z(t), a \leq t \leq b$ に対して次式が成り立つ:

$$\int_C f(z)dz = F(z(b)) - F(z(a))$$

証明

$$
\begin{aligned}
F(z(b)) - F(z(a)) &= \int_a^b \frac{d}{dt} F(z(t))dt \\
&= \int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \int_C f(z)dz
\end{aligned}
$$

始点を α, 終点を β とする曲線 C をどのように取っても $\int_C f(z)dz$ の値が同じ値となる場合に限り，この積分を $\int_\alpha^\beta f(z)dz$ と書く.

$$\int_\alpha^\beta f(z)dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_C f(z)dz$$

積分が積分路 C に依存しない場合に限り使う記号

($\stackrel{\text{def}}{=}$ は左辺が右辺で定義されるという意味

不定積分 (3) (p.171)

系 5.1 　領域 D で定義された連続関数 $f(z)$ が原始関数 $F(z)$ を持つとき, D 内の閉曲線 $C : z = z(t), a \le t \le b$ に対して次式が成り立つ:

$$\int_C f(z)dz = 0$$

証明

$$
\begin{aligned}
F(z(b)) - F(z(a)) &= \int_a^b \frac{d}{dt} F(z(t))dt \\
&= \int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \int_C f(z)dz
\end{aligned}
$$

であるが, 閉曲線だから $z(b) = z(a)$ であり, したがって $\int_C f(z)dz = 0$.

C が閉曲線のとき，教科書によっては，$\displaystyle\int_C f(z)dz$ のことを $\displaystyle\oint_C f(z)dz$ と書くことがある．

不定積分 (4) (p.172)

定理 5.11　領域 D で定義された連続関数 $f(z)$ が原始関数 $F(z)$ を持ち, $g(z)$ が正則ならば, D 内の 2 点 α, β に対して次式が成り立つ:

$$\int_\alpha^\beta f(z)g(z)dz = \Big[F(z)g(z)\Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta F(z)g'(z)dz$$

証明　$F(z)g(z)$ は微分可能で，
$\dfrac{d}{dz}(F(z)g(z)) = f(z)g(z) + F(z)g'(z)$ である．よって，$F(z)g(z)$ は $f(z)g(z) + F(z)g'z$ の原始関数であり，$C : z = z(t), a \leq t \leq b$ を $z(a) = \alpha$, $z(b) = \beta$ となるように取ると，定理 5.10 により，積分路 C の取り方によらず，以下が成り立つ．

$$\int_C \bigl(f(z)g(z) + F(z)g'(z)\bigr)\, dz = \bigl[F(z)g(z)\bigr]_\alpha^\beta$$

左辺第 2 項を右辺に移項すると定理 5.11 が得られる．

不定積分 (5) (p.172)

定義 5.9 領域 D で定義された連続関数 $f(z)$ に対し, D 内の点 α を固定して z を動かしたとき, α と z を結ぶ D 内の曲線 C によって定義された積分 $\int_C f(\zeta)d\zeta$ の値が α と z だけから決まり, 曲線 C には依存しないとき, これを z の関数と見倣して, $f(z)$ の不定積分といい, $F(z) = \int_\alpha^z f(\zeta)d\zeta$ と書く.

ゼータ

$$\zeta$$

ギリシア文字

不定積分 (6) (p.173)

定理 5.12 領域 D で定義された連続関数 $f(z)$ の不定積分 $F(z)$ が存在すれば, $F(z)$ は正則で, $f(z)$ の原始関数である.

証明の概略　$\epsilon - \delta$ 論法を避けて概略のみを述べる.

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_z^{z+h} (f(\zeta)-f(z))\,d\zeta\right| \\
&\leq \frac{1}{|h|}\int_z^{z+h} |f(\zeta)-f(z)|d\zeta
\end{aligned}
$$

であるが, $f(z)$ が連続だから, $|h|$ を小さくすれば, 最後の不等式の右側の項はいくらでも小さくなる. よって, $F(z)$ は微分可能 (正則) で, $F'(z) = f(z)$ である.

不定積分 (7) (p.174)

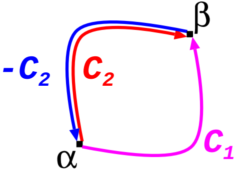
定理 5.13 　領域 D で定義された連続関数 $f(z)$ が D 内の任意の閉曲線 C に対して

$$\int_C f(z)dz = 0$$

となれば, $f(z)$ は不定積分を持つ.

証明

2 点 α, β を結ぶ 2 個の積分路 C_1, C_2 と, C_2 の向きを逆転した $-C_2$ を取る. $\int_{-C_2} f(z)dz = -\int_{C_2} f(z)dz$ である. C_1 と $-C_2$ を連結した閉曲線を $C_1+(-C_2)$ と書く.



$0 = \int_{C_1+(-C_2)} f(z)dz$(仮定より) $= \int_{C_1} f(z)dz + \int_{-C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz$ だから, $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$ となり, 積分が積分路によらず定まるから $f(z)$ は不定積分を持つ.

今までの結果をまとめると…

不定積分 (8) (p.174)

定理 5.14 領域 D 上の連続関数 $f(z)$ について以下は同値:

(1) $f(z)$ は D で不定積分を持つ

(2) $\exists F(z),\ F'(z) = f(z)$

(3) C が閉曲線なら $\int_C f(z)dz = 0$

証明　(3)$\Rightarrow$ (1) は定理 5.13, (1)$\Rightarrow$(2) は定理 5.12, (2)$\Rightarrow$(3) は系 5.1 だから，これらはすべて既に証明されている．

演習 10-2

空欄を埋め, 正しいと思う方を選択せよ.
(次に述べる解答では, 解答を見やすくするため, 言い回しを若干変え, かつ積の記号 · や括弧を書き加えることがある.)

演習 10-2 解答 (1)

C_1 に対し, $f(z(t)) = \boxed{t}$, $z'(t) = \boxed{1}$,

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{\boxed{0}}^{\boxed{1}} \boxed{t} \cdot \boxed{1} dt = \boxed{1/2}.$$

C_2 に対し, $f(z(t)) = \boxed{1+it}$, $z'(t) = \boxed{i}$ だから,

$$\int_{C_2} f(z)dz = \int_{\boxed{0}}^{\boxed{1}} \boxed{(1+it)}\,\boxed{i}\,dt = \boxed{i - 1/2}.$$

演習 10-2 解答 (2)

C_3 に対し, $f(z(t)) = \boxed{(1+i)t}$, $z'(t) = \boxed{(1+i)}$,

$$\int_{C_3} f(z)dz = \int_{\boxed{0}}^{\boxed{1}} \boxed{(1+i)t}\,\boxed{(1+i)}\,dt = \boxed{i}.$$

$\displaystyle\int_{C_1+C_2} f(z)dz = \boxed{i}$, $\displaystyle\int_{C_3} f(z)dz = \boxed{i}$ となり, これらは一致 $\boxed{\text{する}}$. $F(z) = z^2/2$ とおくと, $F'(z) = \boxed{z}$ であり, $f(z)$ は原始関数を $\boxed{\text{持つ}}$. $\int_C f(z)dz$ は積分路に $\boxed{\text{依存しない}}$.