工業数学 IV 第 10 回

複素積分の性質

複素積分 (復習) (p.159)

定義 5.6 $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ で, 曲線 $C : z = z(t)$ $(a \leq t \leq b)$ が D に含まれているとき, $f(z)$ の曲線 (積分路) C に沿った複素積分を以下によって定義する:

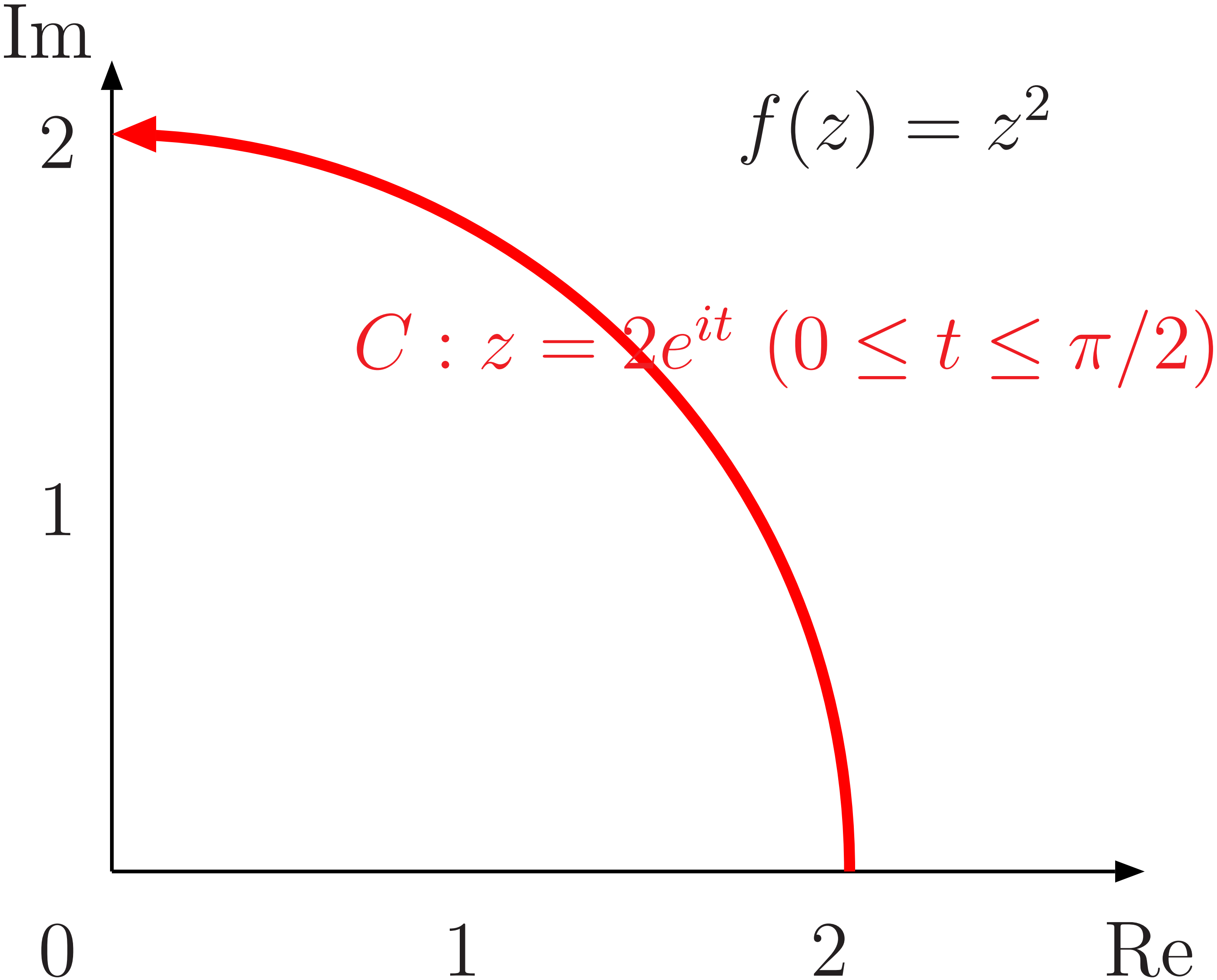
$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$

計算例

- 以下の関数 f と曲線 C に対して $\int_C f(z)dz$ を計算する

  ▷ $f(z) = z^2$

  ▷ $C : z = 2e^{it}\ (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$


Im
2
1
0
1
2
Re
$f(z) = z^2$
$C : z = 2e^{it}\ (0 \leq t \leq \pi/2)$

$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$ に以下を代入:

$f(z) = z^2, z(t) = 2e^{it}, z'(t) = 2ie^{it} a = 0, b = \frac{\pi}{2}$

$$
\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4e^{2it})(2ie^{it})dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8ie^{3it}dt = \frac{8i}{3i}\, e^{3it}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{8}{3}(1+i)
\end{aligned}
$$

- リーマン積分の定義に戻ると,
  $\displaystyle\int_a^b f(z(t))z'(t)dt$ は $\cdots$
  - ▷ $[a,b]$ を $a=t_0,t_1,\ldots,t_N=b$ と分割
  - ▷ 各区間 $[t_i,t_{i+1}]$ の代表点 τ_i を選択
  - ▷ $\displaystyle\sum_{i=0}^{N-1} f(z(\tau_i))z'(\tau_i)(t_{i+1}-t_i)$

  の分割を細かくした極限

- リーマン積分が定義できるのは
  - ▷ 代表点をどう取っても
  - ▷ 分割をどう取っても

分割を無限に細かくすれば同一の極限値が得られるとき.

- $z'(\tau_i)(t_{i+1} - t_i) \simeq z(t_{i+1}) - z(t_i)$ だから…
- $\displaystyle\int_a^b f(z(t))z'(t)dt$ は,

$$\sum_{i=0}^{N-1} f(z(\tau_i))(z(t_{i+1}) - z(t_i))$$

の, 分割を細かくしたときの極限と考えることもできる (教科書 168～170 ページ); 実は, この定義の方が使い勝手がよい.

曲線のパラメータ変換 (1)

- $z : [a,b] \to D$ を滑らかな曲線 C とし, $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ を $\varphi' > 0$ を満たす連続微分可能な関数とする. このとき, 合成関数 $z \circ \varphi$ はやはり滑らかな曲線となる.

- $\varphi' > 0$ であるから, φ は微分同相写像と呼ばれるものになっている

曲線のパラメータ変換 (2)

- 微分同相写像を使って曲線のパラメータを取り換えることをパラメータ変換という

- 曲線 C を $C : z = z(t), a \leq t \leq b$ に対し, $w(s) = z(\varphi(s))$ とおき，曲線 Γ を $\Gamma : z = w(s), c \leq s \leq d$ と定義する.

複素積分 (5) (p.161)

定理 5.4　以上で述べたパラメータ変換に対し，次式が成立する:

$$\int_C f(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz$$

証明

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)dz &= \int_c^d f(z(\varphi(s))(z\circ\varphi)'ds\\ &= \int_c^d f(z(\varphi(s))z'(\varphi(s))\varphi'(s)ds\\ &= \int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \int_C f(z)dz\end{aligned}$$

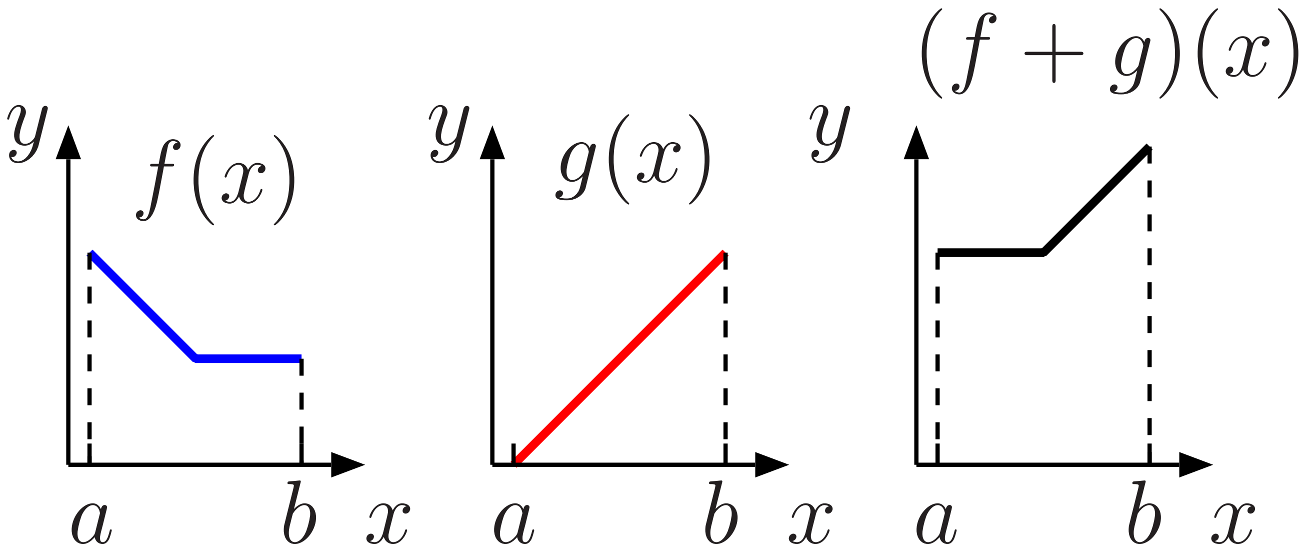
ただし 3 行目第 1 式で $t=\varphi(s)$ とおき定理 5.2(p.158) を使った.

- 実数値関数の定積分に関する事実 (復習)

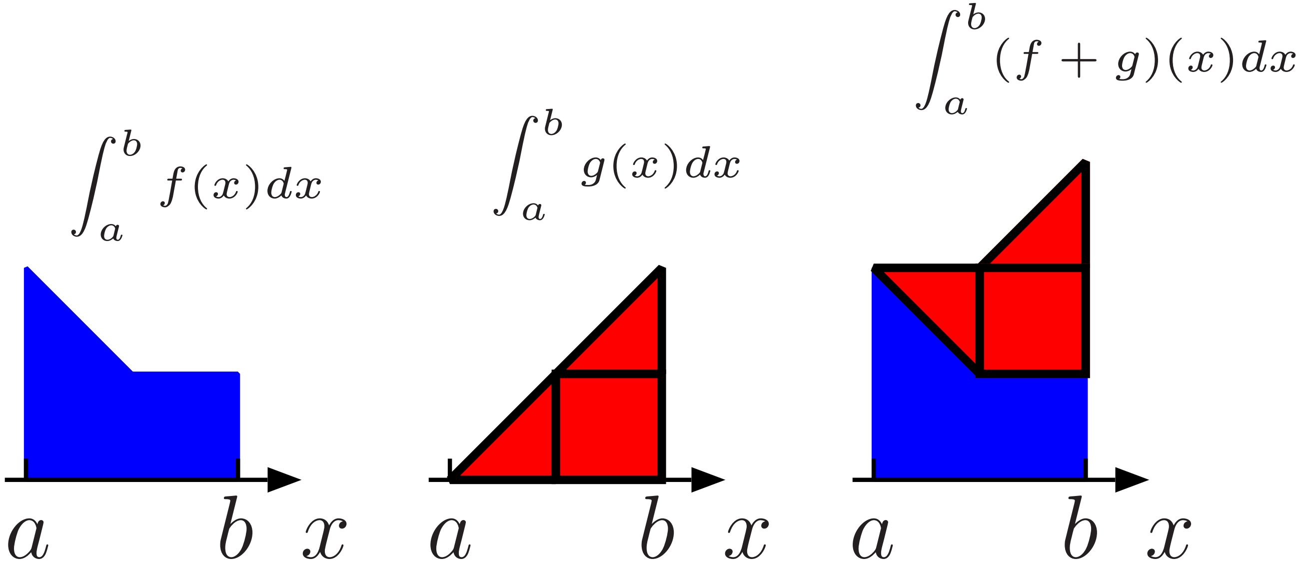
§ 関数の和の積分

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = ?$$

- 図を描くと $\cdots$



$$\int_a^b (f+g)(x)dx = ?$$

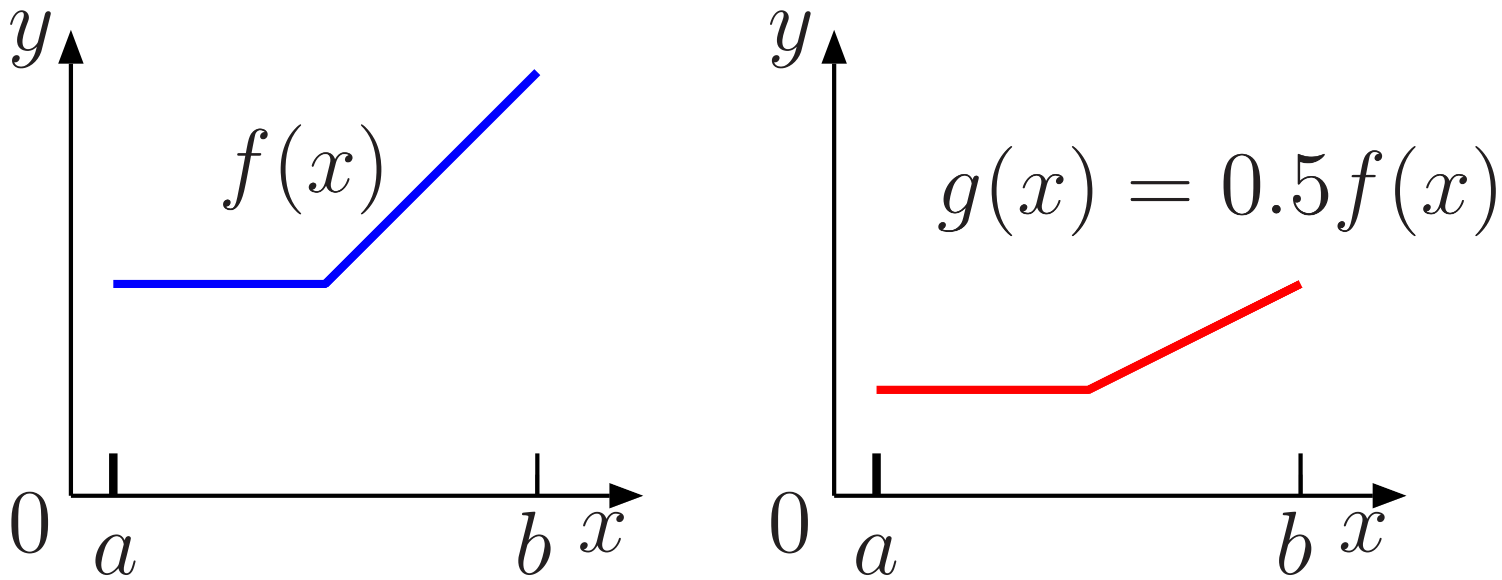


$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

§ 関数の定数倍の積分

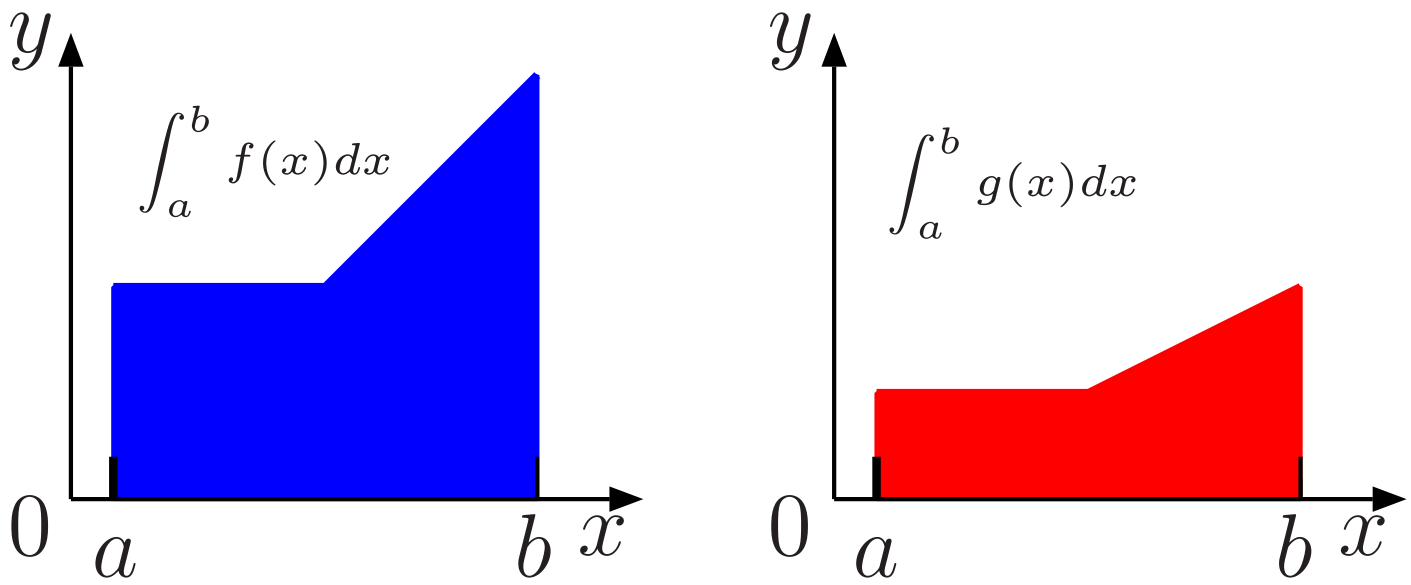
$$\int_a^b \alpha f(x)dx = ? \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

- $\alpha = 0.5$ として図を描くと $\cdots$



$$\int_a^b g(x)dx = ?$$

$$\int_a^b 0.5f(x)dx = 0.5\int_a^b f(x)dx$$

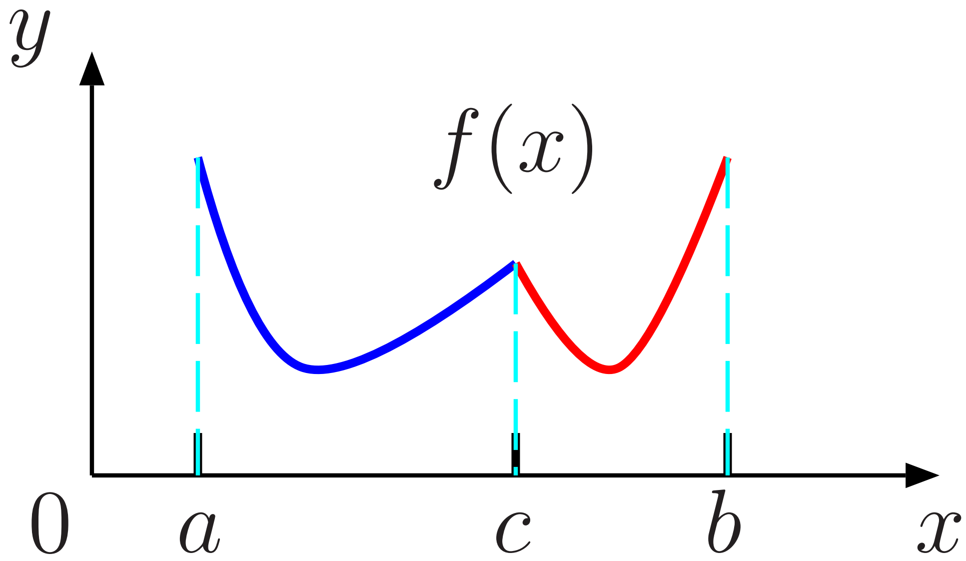


一般に, $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx$

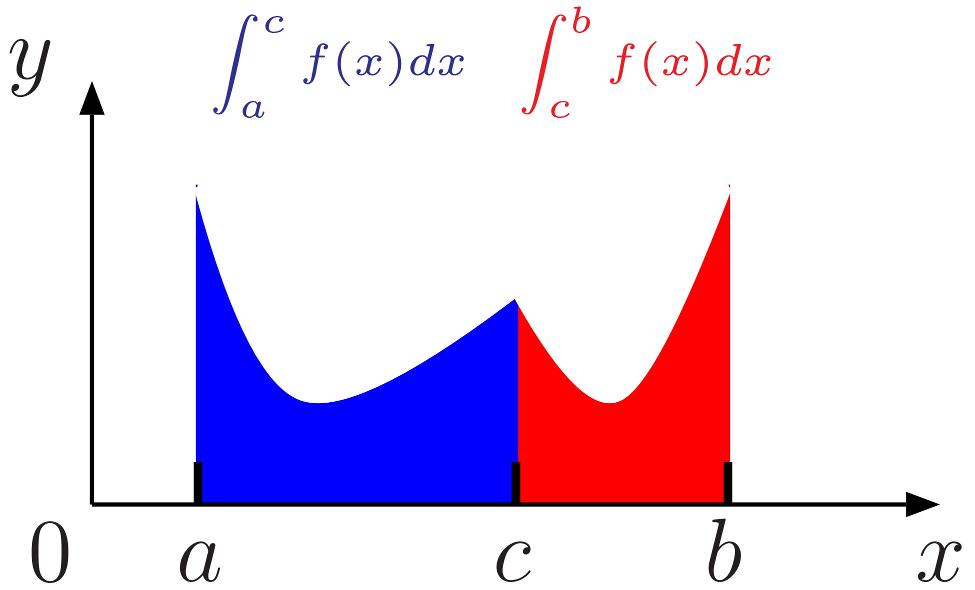
- まとめると $\cdots$
  積分作用素は線形作用素
    - ▷ 定義域: リーマン可積分関数全体
    - ▷ 値域: 実数全体

積分する区間の継ぎ足し

- $a < c < b$ とする
- $\displaystyle\int_a^c f(x)dx, \int_c^b f(x)dx$ と $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ を比較する.



$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad \text{VS} \quad \int_a^b f(x)dx$$



$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

$\int_{b}^{a} f(x)dx$ は次のように定義されていた:

$$\int_{b}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{b} f(x)dx$$

まとめて…

$$\int_a^b \alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x) dx$$
$$= \alpha_1 \int_a^b f(x)dx + \alpha_2 \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

- 先の式は, 複素積分でも, ほぼそのまま成立.

複素積分 (6) (p.162)

定理 5.5 (1) f, g は D で定義された連続関数で, C は D に含まれる曲線としたとき, 以下が成り立つ: $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\int_C \alpha f(z) + \beta g(z) dz = \alpha \int_C f(z) dz + \beta \int_C g(z) dz$$

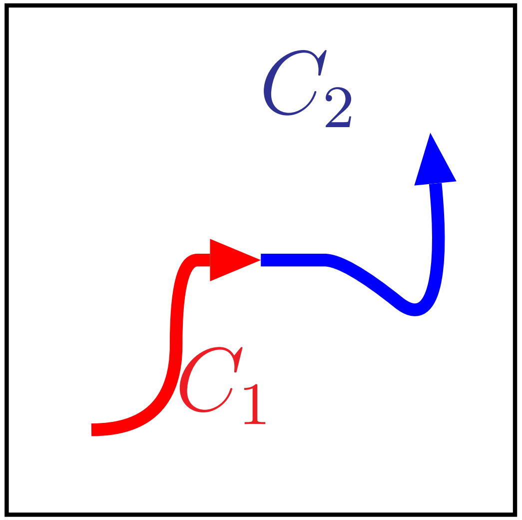
証明　積分の定義に戻れば

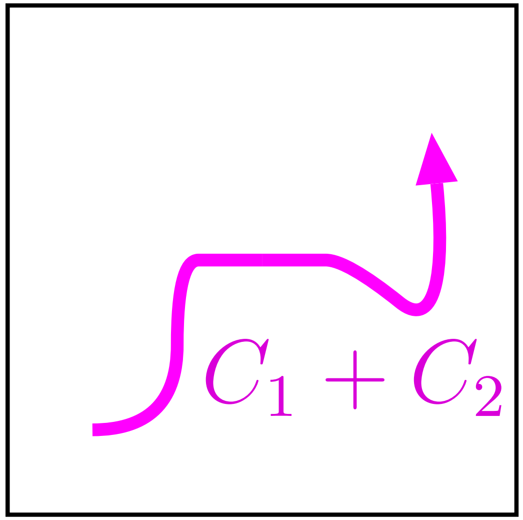
$$
\begin{aligned}
&\int_C (\alpha f(z) + \beta g(z))\, dz \\
&= \int_a^b (\alpha f(z(t)) + \beta g(z(t))) z'(t) dt \\
&= \int_a^b \alpha f(z(t)) z'(t) dt + \int_a^b \beta g(z(t)) z'(t) dt \\
&= \alpha \int_C f(z) dz + \beta \int_C g(z) dz
\end{aligned}
$$

複素積分 (7) (p.162)

定理 5.5 (2) $z : [a, b] \to D$ の定義域 $[a, b]$ を 2 分し，前半を $[a, c]$，後半を $[c, b]$ とする．また，$C_1 : z = z(t), a \leq t \leq c$, $C_2 : z = z(t), c \leq t \leq b$ とし，$C = C_1 + C_2$ と書くと，次が成り立つ:

$$\int_{C_1+C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$





実関数の積分とまったく同じ理由から,

$$\int_{C_1+C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

複素積分 (8) (p.162)

定理 5.5 (3)　C の向きを逆にした曲線を $-C$ と書くと, 次が成り立つ:

$$\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$$

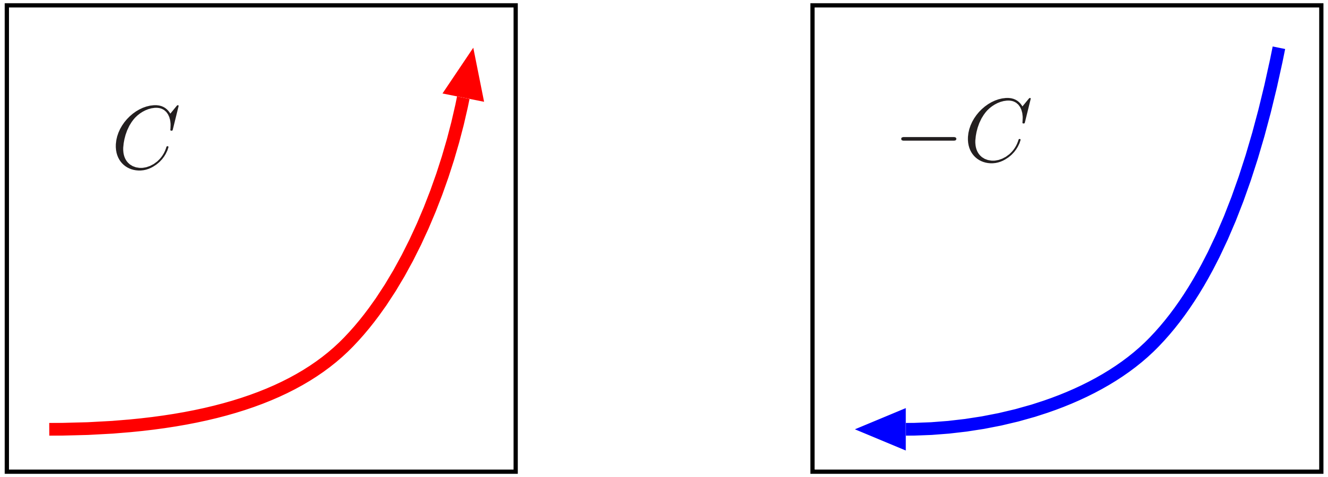
- $-C$ の定義：

$$C : z = z(t), a \leq t \leq b$$

のとき

$$-C : z = z(b + a - t), a \leq t \leq b$$

と定義する.



$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$ と同様

図などを見ればすぐにわかる結果なので, この講義では詳しい計算には立ち入らない. 興味がある者は教科書 pp. 162~163 の証明を参照せよ.

複素積分 (9) (p.164)

定理 5.6 以上の定義のもとで以下の等式が成り立つ:

$$\int_C f(z)dz = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (udy + vdx)$$

- これは機械的に記号を書き直しただけ.
- 記号の定義の方が問題

$C : z = z(t), a \leq t \leq b$ とする
$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z(t) = x(t) + iy(t)$ とする

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_a^b f(z(t))z'(t)dt \\ &= \int_a^b (u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))) \\ &\qquad\qquad \times \left(x'(t) + iy'(t)\right) dt\end{aligned}$$

であるが ⋯

記号の定義:

$$\int_C f(z)dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \left(u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\right) x'(t)dt$$
$$\int_C f(z)dy \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \left(u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\right) y'(t)dt$$

先の「定理」は, この定義にしたがって式を書き直しただけ

- 定理 5.6 は教科書でグリーンの公式に関する議論をするとき使うが, この講義ではグリーンの公式は取り扱わないので, これ以上立ち入らない

複素積分 (10)

定義　曲線 $C: z = z(t), a \leq t \leq b$ の弧長 L を以下によって定義する:

$$L = \int_a^b |z'(t)| dt$$

複素積分 (11) (p.165)

定義 5.7 $a \le b$ のとき, 弧長による積分を以下のように定義する:

$$\int_C f(z)|dz| = \int_a^b f(z(t))|z'(t)|dt$$

複素積分 (12) (p.166)

定理 5.7 曲線の弧長を L とし，C 上で $|f(z)| \leq M$ が成り立つものとすると，以下の不等式が成立する:

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq \int_C |f(z)||dz| \leq ML$$

教科書 p.166 における定理 5.7 の証明は不十分; $a \leq b$ としたとき, 以下を順に示す必要がある.

(1) 実数値関数 $p(x)$ に関し, $\left|\int_a^b p(x)dx\right| \leq \int_a^b |p(x)|dx$

(2) 複素関数 $f(z)$ に関し,

$$\left|\int_a^b f(z(t))z'(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|dt$$

小さい字で証明を書いておくので興味がある者だけ読んでほしい.

(1) $p^+(x) = \begin{cases} p(x), & p(x) \geq 0 \\ 0, & p(x) < 0 \end{cases}$, $p^-(x) = \begin{cases} 0, & p(x) \geq 0 \\ -p(x), & p(x) < 0 \end{cases}$ と定義すると, $p(x) = p^+(x) - p^-(x)$ であり, かつ $|p(x)| = p^+(x) + p^-(x)$. ところで, $\int_a^b p(x)dx = \int_a^b p^+(x)dx - \int_a^b p^-(x)dx$ だから,
$|\int_a^b p(x)dx| \leq |\int_a^b p^+(x)dx| + |\int_a^b p^-(x)dx|$ となるが, $p^+(x) \geq 0$, $p^-(x) \geq 0$ に注意すると, $|\int_a^b p^+(x)dx| = \int_a^b p^+(x)dx$, $|\int_a^b p^-(x)dx| = \int_a^b p^-(x)dx$ であり, よって $|\int_a^b p(x)dx| \leq \int_a^b p^+(x)dx + \int_a^b p^-(x)dx = \int_a^b (p^+(x) + p^-(x))dx = \int_a^b |p(x)|dx$ が成り立つ.

(2) 記法の簡単のため, $f(z(t))z'(t)$ を $g(t)$ と書く. $|\int_a^b g(t)dt| \leq \int_a^b |g(t)|dt$ が示すべき不等式である. $\int_a^b g(t)dt = re^{i\theta}$ と書くことにすると, $|\int_a^b g(t)dt| = e^{-i\theta}\int_a^b g(t)dt = \int_a^b e^{-i\theta}g(t)dt$ で, $\int_a^b e^{-i\theta}g(t)dt$ が実数であることから, さらに $|\int_a^b g(t)dt| = \int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}g(t)\right)dt$ となる. $\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}g(t)\right)$ は実数値関数だから, (1) が使えて, $|\int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}g(t)\right)dt| = \int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}g(t)\right)dt \leq \int_a^b \left|\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}g(t)\right)\right|dt \leq \int_a^b |g(t)|\,dt$ となる (ただし $|e^{-i\theta}| = 1$ であることと, $|\mathrm{Re}\,g(t)| \leq |g(t)|$ となることを使った). これらをまとめると, 示すべき不等式 $|\int_a^b g(t)dt| \leq \int_a^b |g(t)|dt$ が得られる.

定理 5.7 の証明　以上を踏まえて定理の証明に戻ると，

$$
\begin{aligned}
\left|\int_C f(z)dz\right| &= \left|\int_a^b f(z(t))z'(t)dt\right| \\
&\leq \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|dt \leq M\int_a^b |z'(t)|dt \\
&= ML
\end{aligned}
$$

- 項別積分に関する定理 5.8 (p.167) については詳しい説明を省く.

- 関数の級数が良い性質を持つときには, 無限和と積分の順序の交換が許される:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_C f_n(z)dz = \int_C\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\right)dz$$

という程度の理解でよい.

不定積分 (1) (p.170)

定義 5.8 領域 D で定義された連続関数 $f(z)$ に対し, $\forall z \in D$, $F'(z) = f(z)$ となる関数を $f(z)$ の原始関数という.

不定積分 (2) (p.171)

定理 5.10 　領域 D で定義された連続関数 $f(z)$ が原始関数 $F(z)$ を持つとき, D 内の曲線 $C : z = z(t), a \leq t \leq b$ に対して次式が成り立つ:

$$\int_C f(z)dz = F(z(b)) - F(z(a))$$

証明

$$
\begin{aligned}
F(z(b)) - F(z(a)) &= \int_a^b \frac{d}{dt} F(z(t))dt \\
&= \int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \int_C f(z)dz
\end{aligned}
$$

始点を α, 終点を β とする曲線 C をどのように取っても $\int_C f(z)dz$ の値が同じ値となる場合に限り, この積分を $\int_\alpha^\beta f(z)dz$ と書く.

$$\int_\alpha^\beta f(z)dz \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_C f(z)dz$$

積分が積分路 C に依存しない場合に限り使う記号

($\stackrel{\mathrm{def}}{=}$ は左辺が右辺で定義されるという意味)

不定積分 (3) (p.171)

系 5.1 　領域 D で定義された連続関数 $f(z)$ が原始関数 $F(z)$ を持つとき, D 内の閉曲線 $C : z = z(t), a \leq t \leq b$ に対して次式が成り立つ:

$$\int_C f(z)dz = 0$$

証明

$$
\begin{aligned}
F(z(b)) - F(z(a)) &= \int_a^b \frac{d}{dt} F(z(t)) dt \\
&= \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt = \int_C f(z) dz
\end{aligned}
$$

であるが, 閉曲線だから $z(b) = z(a)$ であり, したがって $\int_C f(z) dz = 0$.

C が閉曲線のとき:
教科書によって違う記号が使われる

- $\displaystyle\int_C f(z)dz$
- $\displaystyle\oint_C f(z)dz$

意味は同じ.

不定積分 (4) (p.172)

定理 5.11　領域 D で定義された連続関数 $f(z)$ が原始関数 $F(z)$ を持ち, $g(z)$ が正則ならば, D 内の 2 点 α, β に対して次式が成り立つ:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)g(z)dz = \Big[F(z)g(z)\Big]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} F(z)g'(z)dz$$

証明　$F(z)g(z)$ は微分可能で,
$\dfrac{d}{dz}(F(z)g(z)) = f(z)g(z) + F(z)g'(z)$ である．よって, $F(z)g(z)$ は $f(z)g(z) + F(z)g'z$ の原始関数であり, $C : z = z(t), a \leq t \leq b$ を $z(a) = \alpha$, $z(b) = \beta$ となるように取ると, 定理 5.10 により, 積分路 C の取り方によらず, 以下が成り立つ.

$$\int_C \big(f(z)g(z) + F(z)g'(z)\big)\, dz = \big[F(z)g(z)\big]_\alpha^\beta$$

左辺第 2 項を右辺に移項すると定理 5.11 が得られる.

不定積分 (5) (p.172)

定義 5.9　領域 D で定義された連続関数 $f(z)$ に対し, D 内の点 α を固定して z を動かしたとき, α と z を結ぶ D 内の曲線 C によって定義された積分 $\int_C f(\zeta)d\zeta$ の値が α と z だけから決まり, 曲線 C には依存しないとき, これを z の関数と見做して, $f(z)$ の不定積分といい, $F(z) = \int_\alpha^z f(\zeta)d\zeta$ と書く.

ゼータ

ζ

ギリシア文字

不定積分 (6) (p.173)

定理 5.12　領域 D で定義された連続関数 $f(z)$ の不定積分 $F(z)$ が存在すれば, $F(z)$ は正則で, $f(z)$ の原始関数である.

証明の概略

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_z^{z+h}(f(\zeta)-f(z))\,d\zeta\right|$$
$$\leq \frac{1}{|h|}\int_z^{z+h}|f(\zeta)-f(z)||d\zeta|$$

である． $\varepsilon>0$ とする． $f(z)$ が連続だから, $|h|$ を十分小さくすれば, $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$ とできる．よって,

$$\int_z^{z+h}|f(\zeta)-f(z)||d\zeta| < \varepsilon\int_z^{z+h}|d\zeta|.$$

- z と $z+h$ を結ぶ曲線として直線を取る (長さは $|h|$).
- 不定積分を持つという仮定から, 積分は弧によらない
- よって

$$\int_{z}^{z+h} |f(\zeta)-f(z)||d\zeta| < \varepsilon|h|.$$

- したがって

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| < \varepsilon$$

で, ε は任意だから, $F(z)$ は微分可能で, その導関数は $f(z)$.

不定積分 (7) (p.174)

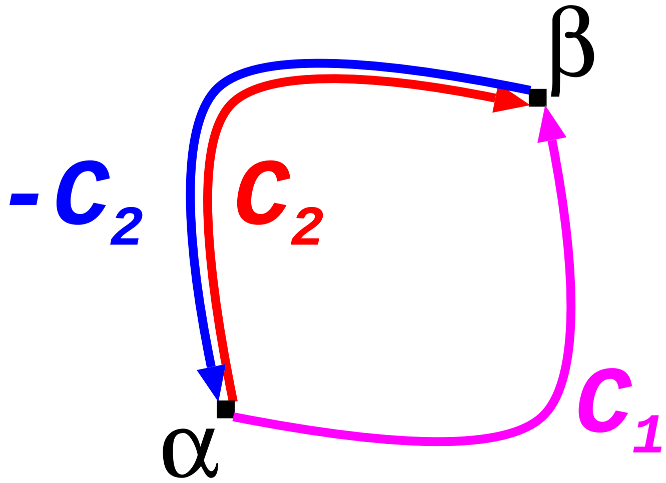
定理 5.13　領域 D で定義された連続関数 $f(z)$ が D 内の任意の閉曲線 C に対して

$$\int_C f(z)dz = 0$$

となれば, $f(z)$ は不定積分を持つ.

証明

2点 α，β を結ぶ2個の積分路 C_1，C_2 と，C_2 の向きを逆転した $-C_2$ を取る．$\int_{-C_2} f(z)dz = -\int_{C_2} f(z)dz$ である．C_1 と $-C_2$ を連結した閉曲線を $C_1+(-C_2)$ と書く．



$0 = \int_{C_1+(-C_2)} f(z)dz$(仮定より) $= \int_{C_1} f(z)dz + \int_{-C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz$ だから，$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$ となり，積分が積分路によらず定まるから $f(z)$ は不定積分を持つ．

今までの結果をまとめると…

不定積分 (8) (p.174)

定理 5.14 　領域 D 上の連続関数 $f(z)$ について以下は同値:

(1) $f(z)$ は D で不定積分を持つ

(2) $f(z)$ は D で原始関数を持つ

(3) C が閉曲線なら $\int_C f(z)dz = 0$

証明　(3)$\Rightarrow$ (1) は定理 5.13，(1)$\Rightarrow$(2) は定理 5.12，(2)$\Rightarrow$(3) は系 5.1 だから，これらはすべて既に証明されている．

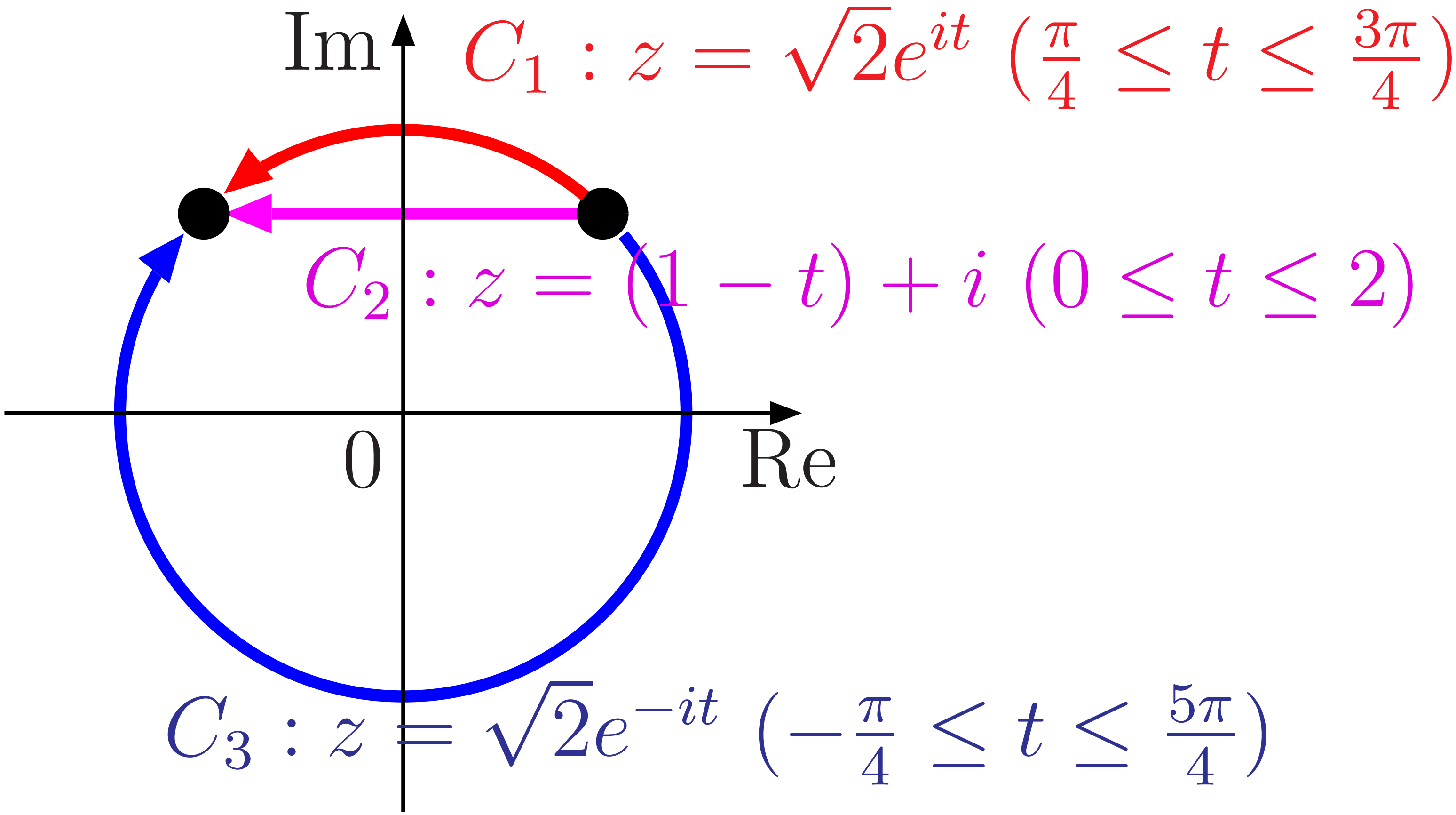
- 先の定理は, 領域 D で定義された連続関数 $f(z)$ に関し
  - ▷ 不定積分を持つこと
  - ▷ 原始関数を持つこと
  - ▷ 閉曲線 C に沿った積分が零となること

  が等価であると述べていたが…
- どの条件のチェックもそれほど易しくない

- では定理 5.14 が役に立たないかというと, そんなことはなくて…
- 次回の講義の先取りになるが, 領域が「単連結」と呼ばれる条件 (次回述べる) を満たす場合には, 関数 f が正則であれば関数 f の閉曲線 C に沿った積分が零となることが示せる
- これは「コーシーの積分定理」と呼ばれ, 複素解析でもっとも重要な定理のひとつ

- 次回の先取りになるが，関数 $f(z) = \dfrac{1}{z}$ を次ページの曲線 C_1, C_2, C_3 に沿って積分することを考える

関数 $f(z) = \dfrac{1}{z}$ を C_1, C_2, C_3 に沿って積分する



- 関数 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ は $z=0$ で正則ではないが, 曲線 C_1 と C_2 が囲む領域では正則
- コーシーの積分定理 (次回) により, 曲線 C_1 と C_2 に沿った $f(z)$ の積分は一致する
- 曲線 C_3 沿った $f(z)$ の積分の値についてはコーシーの積分定理からは何も言えない
- 実際に計算してみる

§ 曲線 C_1 に沿った積分

- $f(z) = \frac{1}{z}$
- $z(t) = \sqrt{2}e^{it}$ $(\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{3\pi}{4})$, $z'(t) = i\sqrt{2}e^{it}$

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}e^{it}} i\sqrt{2}e^{it}dt$$

$$= i\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} dt = i\frac{\pi}{2}$$

§ 曲線 C_2 に沿った積分

- $f(z) = \frac{1}{z}$
- $z(t) = (1-t) + i \ (0 \leq t \leq 2), \ z'(t) = -1$

$$\begin{aligned} \int_{C_2} f(z)dz &= \int_0^2 \frac{1}{(1-t)+i}(-1)dt \\ &= \log((1-t)+i)\Big|_0^2 \\ &= \log(-1+i) - \log(1+i) \end{aligned}$$

§ 曲線 C_2 に沿った積分 (つづき)

- 複素対数関数に関して同じ分枝を使うと
  - ▷ $\log(-1+i) = \log\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4}$
  - ▷ $\log(1+i) = \log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$
- よって, $\log(-1+i) - \log(1+i) = i\dfrac{\pi}{2}$
- 先ほどの結果と一致する

§ 曲線 C_3 に沿った積分

- $f(z) = \frac{1}{z}$
- $z(t) = \sqrt{2}e^{-it}$ $(-\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{4})$, $z'(t) = -i\sqrt{2}e^{-it}$

$$\int_{C_3} f(z)dz = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}e^{-it}}(-i)\sqrt{2}e^{-it}dt$$

$$= -i\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} dt = -i\frac{3\pi}{2}$$

§ 曲線 C_3 に沿った積分 (つづき)

- $f(z)$ の C_1, C_2 に沿った積分は $i\dfrac{\pi}{2}$
- $f(z)$ の C_3 に沿った積分は $-i\dfrac{3\pi}{2}$
- $f(z)$ を C_3 に沿って積分した結果は C_1, C_2 に沿ったものとは異なる; $f(z)$ が $z = 0$ で正則ではないので, これは想定通りの結果