工共 212 工業数学 IV
第 10 回
複素積分 (2)

演習 10-1 解答 (1)

$C_1 : z(t) = e^{i(t-\pi)} (0 \le t \le \pi)$, $f(z(t)) = \boxed{e^{-i(t-\pi)}}$,
$z'(t) = \boxed{ie^{i(t-\pi)}}$,
$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{\boxed{0}}^{\boxed{\pi}} \boxed{e^{-i(t-\pi)}}\boxed{ie^{i(t-\pi)}} dt = \int_{\boxed{0}}^{\boxed{\pi}} \boxed{i} dt$;
$\int_{C_1} f(z)dz = \boxed{i\pi}$

演習 10-1 解答 (2)

$C_2 : z(t) = e^{i(\pi-t)} (0 \le t \le \pi)$, $f(z(t)) = \boxed{e^{-i(\pi-t)}}$,
$z'(t) = \boxed{-ie^{i(\pi-t)}}$,
$\int_{C_2} f(z)dz = \int_{\boxed{0}}^{\boxed{\pi}} \boxed{e^{-i(\pi-t)}}\boxed{(-ie^{i(\pi-t)})} dt = \int_{\boxed{0}}^{\boxed{\pi}} \boxed{-i} dt$;
$\int_{C_2} f(z)dz = \boxed{-i\pi}$. $\int_{C_1} f(z)dz$ と $\int_{C_2} f(z)dz$ は一致 $\boxed{\text{しない}}$

演習 10-1 解答 補足

複素関数の積分は一般に積分路に依存する．しかし, 後で述べるように, 正則関数の積分は積分路によらず, 端点のみで定まる．

演習 10-2 解答 (1)

C_1 に対し, $f(z(t)) = \boxed{t}$, $z'(t) = \boxed{1}$,

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{\boxed{0}}^{\boxed{1}} \boxed{t} \cdot \boxed{1} dt = \boxed{1/2}.$$

C_2 に対し, $f(z(t)) = \boxed{1+it}$, $z'(t) = \boxed{i}$ だから,

$$\int_{C_2} f(z)dz = \int_{\boxed{0}}^{\boxed{1}} \boxed{(1+it)}\boxed{i} dt = \boxed{i-1/2}.$$

演習 10-2 解答 (2)

C_3 に対し, $f(z(t)) = \boxed{(1+i)t}$, $z'(t) = \boxed{(1+i)}$,

$$\int_{C_3} f(z)dz = \int_{\boxed{0}}^{\boxed{1}} \boxed{(1+i)t}\boxed{(1+i)} dt = \boxed{i}.$$

$\int_{C_1+C_2} f(z)dz = \boxed{i}$, $\int_{C_3} f(z)dz = \boxed{i}$ となり，これらは一致 $\boxed{\text{する}}$. $F(z) = z^2/2$ とおくと, $F'(z) = \boxed{z}$ であり, $f(z)$ は原始関数を $\boxed{\text{持つ}}$. $\int_C f(z)dz$ は積分路に $\boxed{\text{依存しない}}$.