

電 210 電気数学 IV

第 10 回

複素積分 (2)

演習 10-1 解答 (1)

$$C_1 : z(t) = e^{i(t-\pi)} (0 \leq t \leq \pi), f(z(t)) = e^{-i(t-\pi)},$$
$$z'(t) = ie^{i(t-\pi)},$$
$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_0^\pi e^{-i(t-\pi)} ie^{i(t-\pi)} dt = \int_0^\pi i dt;$$
$$\int_{C_1} f(z) dz = i\pi$$

演習 10-1 解答 (2)

$$C_2 : z(t) = e^{i(\pi-t)} (0 \leq t \leq \pi), f(z(t)) = e^{-i(\pi-t)},$$
$$z'(t) = -ie^{i(\pi-t)},$$
$$\int_{C_2} f(z) dz = \int_0^\pi e^{-i(\pi-t)} (-ie^{i(\pi-t)}) dt = \int_0^\pi -i dt;$$
$$\int_{C_2} f(z) dz = -i\pi. \int_{C_1} f(z) dz \text{ と } \int_{C_2} f(z) dz \text{ は一}$$

致 **しない**

演習 10-1 解答 補足

複素関数の積分は一般に積分路に依存する。しかし、後で述べるように、正則関数の積分は積分路によらず、端点のみで定まる。

演習 10-2 解答 (1)

C_1 に対し, $f(z(t)) = t$, $z'(t) = 1$,

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_0^1 t \cdot 1 dt = 1/2.$$

C_2 に対し, $f(z(t)) = 1+it$, $z'(t) = i$ だから,

$$\int_{C_2} f(z) dz = \int_0^1 (1+it) i dt = i - 1/2.$$

演習 10-2 解答 (2)

C_3 に対し, $f(z(t)) = (1+i)t$, $z'(t) = (1+i)$,

$$\int_{C_3} f(z) dz = \int_0^1 (1+i)t (1+i) dt = i.$$

$\int_{C_1+C_2} f(z) dz = i$, $\int_{C_3} f(z) dz = i$ となり, これらは一致する。 $F(z) = z^2/2$ とおくと, $F'(z) = z$ であり, $f(z)$ は原始関数を持つ。 $\int_C f(z) dz$ は積分路に依存しない。