# 電 210 電気数学 IV

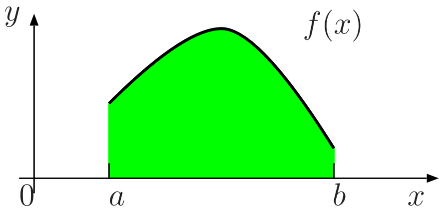
# 第 9 回

# 複素積分 (1)

## 実積分と複素積分

- 実積分: 実関数に対する積分
- 複素積分: 複素関数に対する積分

$x$ が実数で $f(x)$ が実数値関数のとき, $\int_a^b f(x)dx$ は $a$, $b$ から真上に伸ばした線とグラフおよび $x$ 軸が囲む面積



- 実積分の定義は, 積分範囲 $[a,b]$ を $a = x_0$, $x_1$, $x_2$, …, $x_N = b$ のように細分し, $\xi_i \in [x_i, x_{i++1}]$ を適当に取り, $f(\xi_i)$ と $x_{i+1} - x_i$ の積を足し合わせたものの, 分割を無限に細かくした極限 (この値が $\xi_i$ の選び方に依存せず定まるとき, この関数は積分できるという.

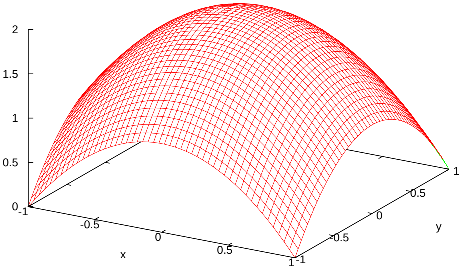
- 複素数は乗算が定義されていること以外は2次元の数ベクトルと同じものだった
- だから, 複素関数の積分は, 2 変数関数 (多変数) の積分と関係がある
- 多変数関数の積分には, ふつうの積分と, 線積分 (2 次元, 3 次元), 面積分 (3 次元) がある
- 複素積分に関係があるのは線積分

# 2 変数実数値関数の積分

たとえば

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 2 - x^2 - y^2 dxdy$$

は, 次ページの曲面と水平面とが囲む領域の体積


2
1.5
1
0.5
0
-1
-0.5
0
0.5
1
x
-1
-0.5
0
0.5
1
y

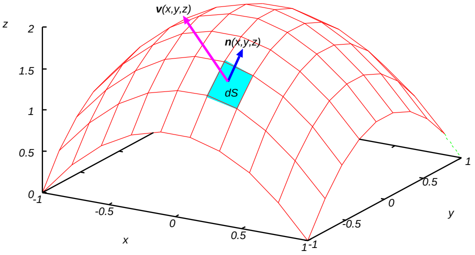
# ベクトル場 $\boldsymbol{v}(x, y, z)$ の面積分

- 曲面 $z = 2 - x^2 - y^2$, $x \in [-1, 1]$, $y \in [-1, 1]$ に関してベクトル場 $\boldsymbol{v}(x, y, z)$ を面積分することを考える

- 曲面の法線ベクトルを $\boldsymbol{n}(x, y, z)$ とする

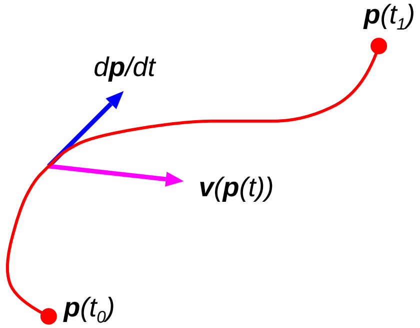
- 微小面積を $dS$ と書く

- $\boldsymbol{v}(x, y, z)$ の面積分は, $\boldsymbol{v}(x, y, z)$ と $\boldsymbol{n}(x, y, z)$ の内積に $dS(x, y, z)$ を掛けたものを定義域全体についてたし合わせたものの極限


z
2
1.5
1
0.5
0
-1
-0.5
0
0.5
1
x
-1
-0.5
0
0.5
1
y
v(x,y,z)
n(x,y,z)
dS

# ベクトル場 $\boldsymbol{v}(x, y, z)$ の線積分

- 曲線 $\boldsymbol{p}(t)$ が与えられているとき $(t \in [t_1, t_1])$, 曲線の接線は $d\boldsymbol{p}/dt$
- $\boldsymbol{v}(x, y, z)$ の線積分は, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p}(t))$ と $d\boldsymbol{p}/dt$ の内積の曲線全体にわたる積分


p(t_1)
dp/dt
v(p(t))
p(t_0)

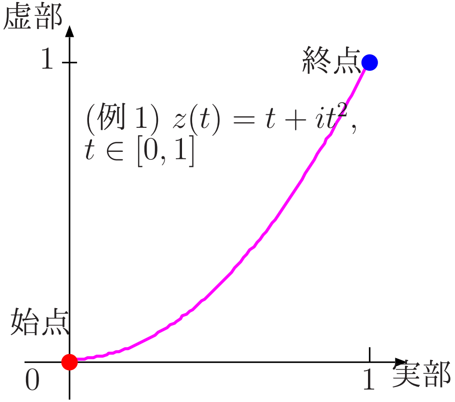
- これらの中で, 複素積分に関係するのは線積分 (ただし 2 次元の場合)
- 線積分とは曲線に沿った積分なので, まず曲線の定義から述べる

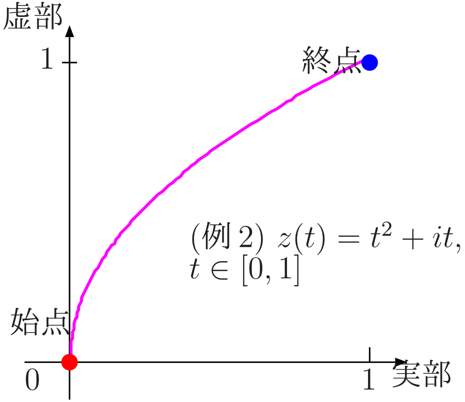
## 曲線 (1) (p.154)

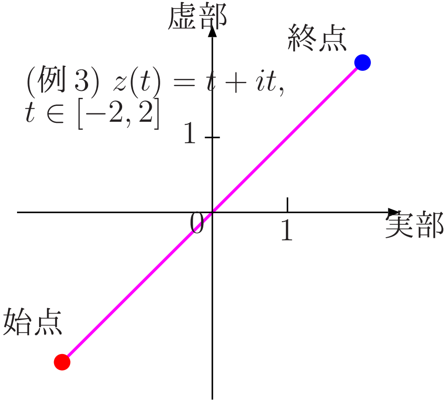
**定義 5.1** 実数の閉区間で定義された複素数値連続関数 $z(t)$ のことを曲線という．定義域が $I = [a,b]$ であるとき，$z(a)$ を曲線の始点，$z(b)$ を終点という．また，$z$ による $[a,b]$ の像のことも曲線という．曲線 $C$ が関数 $z(t)$ によって定まっているとき，これを $C : z = z(t), t \in I$，あるいは $C : z = z(t)$ $(a \leq t \leq b)$ などと書く．

- 教科書 p.154 のような「関数」と「写像」との使い分けは一般的でない
- 「曲線 $C$」という言葉使いは複素解析の分野ではふつう
- 細かい言葉使いは気にせず,「曲線とは実数の閉区間で定義された複素数値連続関数によって決まるものである」と理解すればよい

- 「連続」というのは, 始点と終点のあいだに切れ目がないということ
- 次のページに 3 種類の曲線の例を示す


虚部
1
終点
(例 1) $z(t) = t + it^2$,
$t \in [0, 1]$
始点
0
1
実部


虚部
1
終点
(例 2) $z(t) = t^2 + it$,
$t \in [0, 1]$
始点
0
1
実部


虚部
終点
(例 3) $z(t) = t + it$,
$t \in [-2, 2]$
1
0
1
実部
始点

## 曲線 (2) (p.154)

**定義 5.2** 実部および虚部が微分可能で, かつ実部と虚部を微分したものの少なくとも一方が零でない曲線を滑らかな曲線という.

- 区間の端点 ($a$ と $b$) では「微分」がそれぞれ「右微分」と「左微分」に変わる

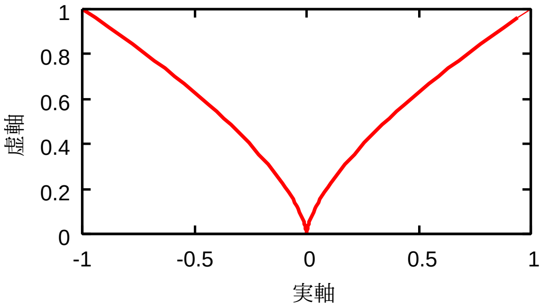
- 実部=$x$ 座標, 虚部=$y$ 座標と考えると, 「なめらか」とは, 曲線上を動く点の速度が零にはならないということを意味する

$\boxed{\text{例}}$ 曲線 $z(t) = t^3 + it^2,\ t \in [-1, 1]$ はなめらかではない

理由 $\mathrm{Re}\, z(t) = t^3,\ \mathrm{Im}\, z(t) = t^2$ だから,

$$\left.\frac{d}{dt}\mathrm{Re}\, z(t)\right|_{t=0} = \left.3t^2\right|_{t=0} = 0,$$
$$\left.\frac{d}{dt}\mathrm{Im}\, z(t)\right|_{t=0} = \left.2t\right|_{t=0} = 0$$

(次ページのグラフも参照).

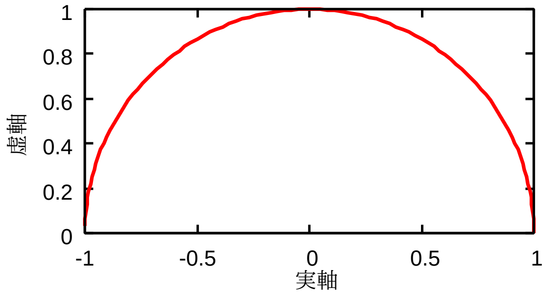



$$z(t) = t^3 + it^2 \text{ のグラフ } (t \in [-1, 1])$$

記号 $f(t)|_{t=a}$ によって $f(t)$ の $t = a$ における値をあらわすことがある.

$\boxed{\text{例}}$ 曲線 $z(t) = \cos t + i \sin t,\ t \in [0, \pi]$ はなめらかである

**理由** $\mathrm{Re}\, z(t) = \cos t,\ \mathrm{Im}\, z(t) = \sin t$ だから, $\dfrac{d}{dt}\mathrm{Re}\, z(t) = -\sin t,\ \dfrac{d}{dt}\mathrm{Im}\, z(t) = \cos t$ で, これらが同時に零になることはない (次ページのグラフも参照).




$$z(t) = \cos t + i \sin t \text{ のグラフ } (t \in [0, \pi])$$

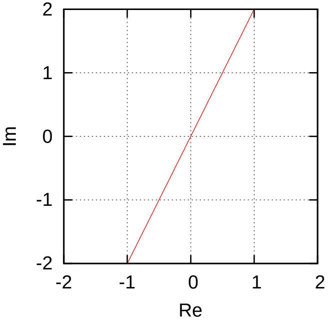
## 演習 9-1

図に記入し，空欄を埋め，正しいと思う方を選択せよ．

# 演習 9-1 解答 (1)

(1) $z(t) = t+2it,\ t \in [-1, 1]$ とすると, $\mathrm{Re}\, z(t) = \boxed{t}$, $\mathrm{Im}\, z(t) = \boxed{2t}$ である. $\dfrac{d}{dt}\mathrm{Re}\, z(t) = \boxed{1}$, $\dfrac{d}{dt}\mathrm{Im}\, z(t) = \boxed{2}$ であり, したがってこの曲線はなめらかで $\boxed{\text{ある}}$.

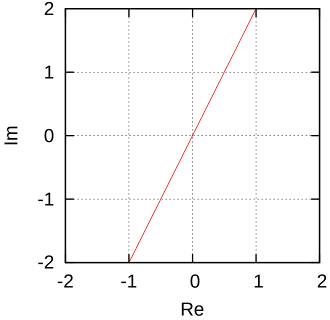
グラフは以下の通り:



# 演習 9-1 解答 (2)

(1) $z(t) = t^3 + 2it^3$, $t \in [-1, 1]$ とすると, $\mathrm{Re}\, z(t) = \boxed{t^3}$, $\mathrm{Im}\, z(t) = \boxed{2t^3}$ である. $\dfrac{d}{dt}\mathrm{Re}\, z(t) = \boxed{3t^2}$, $\dfrac{d}{dt}\mathrm{Im}\, z(t) = \boxed{6t^2}$ であり, したがってこの曲線はなめらかで $\boxed{\text{ない}}$. **曲線のパラメータの取り方には注意が必要.**

グラフは以下の通り (形は (1) と同じだが…)

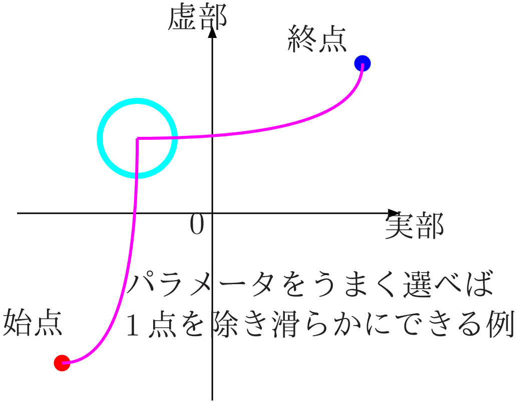


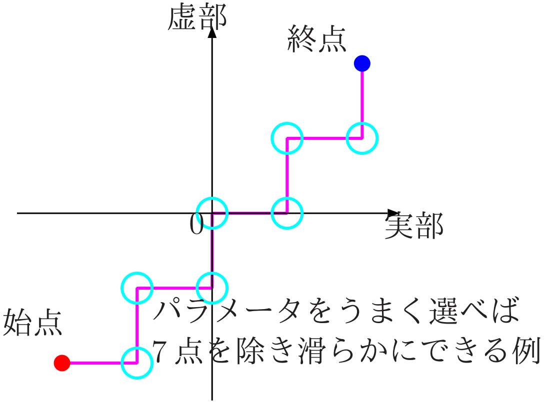
今後は, 上記のように, ソフトの都合で, グラフ中で実部を「Re」, 虚部を「Im」と表記することがある.

# 曲線 (3) (p.155)

**定義 5.3** 連続で, かつ区間 $[a, b]$ に適当な数の分点 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ をうまく取ると各区間 $[t_k, t_{k+1}]$ (ただし $0 \leq k < n$) において滑らかとなる曲線を, **区分的に滑らかな曲線**という.

この講義では, 特に断らない限り, 曲線は区分的に滑らかであると仮定する.


虚部
終点
0
実部
パラメータをうまく選べば
1点を除き滑らかにできる例
始点


虚部
終点
0
実部
始点
パラメータをうまく選べば
7 点を除き滑らかにできる例

## 曲線 (4) (p.156)

**定義 5.4**　始点と終点が一致した曲線のことを**閉曲線**という．曲線が単射であるとき，これを**単一曲線**または**ジョルダン曲線**という (ただし，始点 $z(a)$ と終点 $z(b)$ が一致することは許容する)．単一曲線が閉曲線であるとき，これを**単一閉曲線**あるいは**ジョルダン閉曲線**という．

- 曲線が単射であることと, 曲線(の像)が自分自身と交わらないことは同じ, ただし, 閉曲線を考えることがある関係で始点と終点の一致は許容する

- 教科書の定義 5.4 の「つまり」以下の部分は誤り．単一曲線の条件は,「$t_1 < t_2$ に対し, $z(t_1) = z(t_2)$ であれば $t_1 = a$ かつ $t_2 = b$」である.

## 演習 9-2

正しいと思う方を選択し, 図に記入せよ.

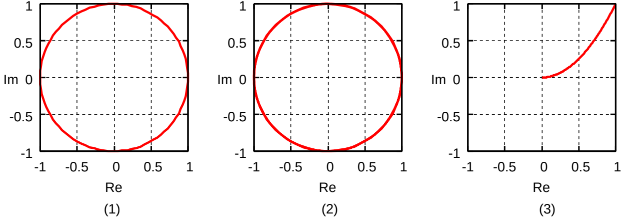
# 演習 9-2 解答

(1) $z(t) = \cos t + i \sin t, t \in [0, 2\pi]$ は単一曲線で $\boxed{\text{あり}}$, 閉曲線で $\boxed{\text{ある}}$.

(2) $z(t) = \cos t + i \sin t, t \in [0, 4\pi]$ は単一曲線で $\boxed{\text{なく}}$, 閉曲線で $\boxed{\text{ある}}$.

(3) $z(t) = t + t^2 i, t \in [0, 1]$ は単一曲線で $\boxed{\text{あり}}$, 閉曲線で $\boxed{\text{ない}}$.

グラフは以下の通り:



1
0.5
Im 0
-0.5
-1
-1 -0.5 0 0.5 1
Re
(1)
1
0.5
Im 0
-0.5
-1
-1 -0.5 0 0.5 1
Re
(2)
1
0.5
Im 0
-0.5
-1
-1 -0.5 0 0.5 1
Re
(3)

# 曲線 (5) (p.157)

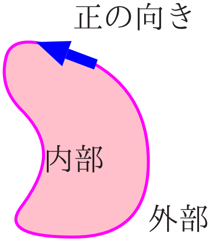
**定理 5.1** 単一閉曲線は複素平面を 2 個の領域に分ける. 分かれた領域の片方は有界, もう片方は非有界である.

この定理にはジョルダンの曲線定理という名前が付いており, 証明が難しいことで知られている.

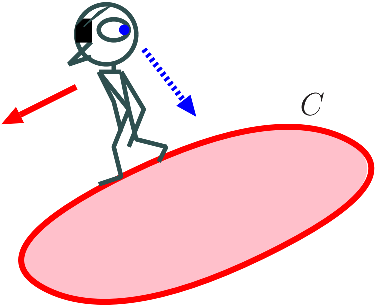
## 曲線 (6) (p.157)

**定義 5.5 (1)** 単一閉曲線によって分けられた複素平面の 2 個の領域のうち, 有界な方を曲線の内部, 有界でない方を外部という. また, 曲線の内部を左側に見て進む方向のことを曲線の正の向きという.

単一閉曲線にいつでも正の向きがついているとは限らない. 内部と内点 (定義 2.13,p.60) は異なる概念なので混乱しないように注意せよ.




正の向きは曲線の内部を左側に見て進む

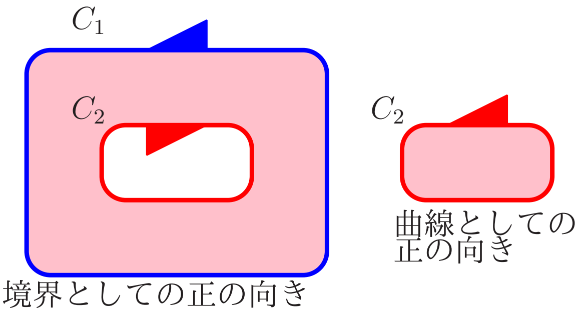



正の向きは曲線の内部を左側に見て進む

# 曲線 (7) (p.157)

**定義 5.5 (2)** 有界領域 $D$ の境界が複数の曲線からなるとき, $D$ の内部を左側に見て進む方向を正の向きという.

このように定義すると, 境界を曲線の集まりと見たとき, 境界としての正の向きと曲線としての正の向きが一致しないことがある




$C_2$ の向きが一致しない!

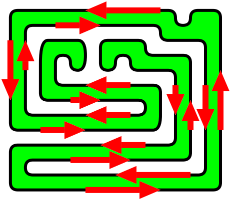
- 曲線に向きがついているときには, その向きを矢印であらわす (正の向きのことも, 負の向きのこともある).
- 境界に向きをつけるときには, ふつうは正の向きを矢印であらわす.
- 混乱しやすいので注意.

# 演習 9-3

(1) 図の閉曲線の内部に色を塗り, 閉曲線に正の向きを付けよ.

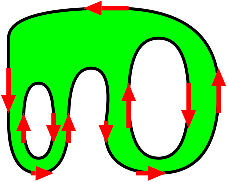
(2) 色が付いた領域の境界の正の向きを矢印で示せ.

# 演習 9-3 解答 (1)



矢印はどの部分に書いてもよい
(全部書く必要はない).

# 演習 9-3 解答 (2)



矢印を全部書く必要はないが内部の小閉曲線にも
向きを付けること.

複素積分では, 実数値関数の置換積分の公式を多用するので, まずこれを復習しておく.

# 置換積分 (p.158)

**定理 5.2** $g : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ が微分可能かつ $g'$ が連続で零でなく, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が連続のとき, 次式が成り立つ.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

続いて, 複素積分を定義する.

# 複素積分 (1) (p.159)

**定義 5.6 (1)** $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ で, 曲線 $C : z = z(t)$ $(a \leq t \leq b)$ が $D$ に含まれているとき, $f(z)$ の曲線 $C$ に沿った**複素積分**を以下によって定義する:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$

# 複素積分 (2) (p.159)

**定義 5.6 (2)** 曲線 $C$ を**積分路**あるいは**道**という.

我々は実積分を使って複素積分を定義しているので, 定義 5.6 は (右辺に複素関数が含まれるという意味で) 正確ではない. $z(t)$ および $f(z)$ を実部と虚部に分け, $z(t) = x(t) + iy(t)$, $f(z) = u(z) + iv(z)$ としたとき,

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b f(z(t))z'(t)dt \\
&\quad = \int_a^b (u(z(t)) + iv(z(t)))(x'(t) + iy'(t))dt \\
&\quad = \int_a^b (u(z(t))x'(t) - v(z(t))y'(t))dt \\
&\qquad + i\int_a^b u(z(t))y'(t) + v(z(t))x'(t)dt
\end{aligned}
$$

が正確な定義である (注意 5.4, p.159).

$f(t)$ が実変数の複素関数で,$\mathrm{Re}\, f(t) = u(t)$, $\mathrm{Im}\, f(t) = v(t)$ としたとき, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt$ と定義する (注意 5.4, p.159).

曲線が区分的に滑らか (たとえば区間 $[a, c]$ と $[c, b]$ で滑らか) なときには,

$$\int_C f(z)dz = \int_a^c f(z(t))z'(t)dt + \int_c^b f(z(t))z'(t)dt$$

と定義する. 区間が 3 個以上ある場合も同様. 今後はこれについては一々断らない.

# 複素積分 (3) (p.159)

**定理 5.3** 実変数の複素数値関数 $f(t)$ が微分可能で, $f'$ が積分可能であるとき, 次式が成り立つ:

$$\int_a^b f'(t)dt = \Big[f(t)\Big]_a^b = f(b) - f(a)$$

記号$\Big[f(t)\Big]_a^b$は$f(b)-f(a)$をあらわす.

$f(t)$ を実部と虚部に分けて考えれば, 定理 5.3 は 1 変数実数値関数の積分に関する定理と同じことを言っているだけである.

## 演習 9-4

空欄を埋めよ.

# 演習 9-4 解答

$f(z(t)) = \boxed{t+it}$ $(=(1+i)t)$, $z'(t) = \boxed{1+i}$, $a = \boxed{0}$, $b = \boxed{1}$ だから, 代入の結果は

$$\int_{\boxed{0}}^{\boxed{1}} \boxed{(t+it)}\boxed{(1+i)}\,dt \ \left( = (1+i)^2 \int_0^1 t\,dt \right)$$

となる. この積分を計算すると $\boxed{i}$ となる $((1+i)^2 = 2i$ だから$)$

## 演習 9-4 解答 補足

$\dfrac{d}{dz}(z^2/2) = z$ となっていることに注意する. 教科書 p.171 において, 曲線 $C : z = z(t)$ $(a \leq t \leq b)$ および $F'(z) = f(z)$ を満たす関数 $F(z)$ に対して, $\displaystyle\int_C f(z)dz = F(z(b)) - F(z(a))$ となることが示されており (講義では来週以降で述べる), ここから上記演習の結果を導くこともできる.