電 210 電気数学 IV
第 9 回
複素積分 (1)

演習 9-1 解答 (1)

(1) $z(t)=t+2it, t\in[-1,1]$ とすると, $\mathrm{Re}\,z(t)=\boxed{t}$, $\mathrm{Im}\,z(t)=\boxed{2t}$ である．$\dfrac{d}{dt}\mathrm{Re}\,z(t)=\boxed{1}$, $\dfrac{d}{dt}\mathrm{Im}\,z(t)=\boxed{2}$ であり, したがってこの曲線はなめらかで $\boxed{\text{ある}}$.

演習 9-1 解答 (2)

(1) $z(t)=t^3+2it^3, t\in[-1,1]$ とすると, $\mathrm{Re}\,z(t)=\boxed{t^3}$, $\mathrm{Im}\,z(t)=\boxed{2t^3}$ である．$\dfrac{d}{dt}\mathrm{Re}\,z(t)=\boxed{3t^2}$, $\dfrac{d}{dt}\mathrm{Im}\,z(t)=\boxed{6t^2}$ であり，したがってこの曲線はなめらかで $\boxed{\text{ない}}$. 曲線のパラメータの取り方には注意が必要．

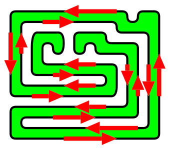
演習 9-2 解答

(1) $z(t)=\cos t+i\sin t, t\in[0,2\pi]$ は単一曲線で $\boxed{\text{あり}}$, 閉曲線で $\boxed{\text{ある}}$.

(2) $z(t)=\cos t+i\sin t, t\in[0,4\pi]$ は単一曲線で $\boxed{\text{なく}}$, 閉曲線で $\boxed{\text{ある}}$.

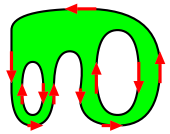
(3) $z(t)=t+t^2i, t\in[0,1]$ は単一曲線で $\boxed{\text{あり}}$, 閉曲線で $\boxed{\text{ない}}$.

演習 9-3 解答 (1)



矢印はどの部分に書いてもよい
(全部書く必要はない).

演習 9-3 解答 (2)



矢印を全部書く必要はないが内部の小閉曲線にも向きを付けること．

演習 9-4 解答

$f(z(t))=\boxed{t+it}$ $(=(1+i)t)$, $z'(t)=\boxed{1+i}$, $a=\boxed{0}$, $b=\boxed{1}$ だから, 代入の結果は

$$\int_{\boxed{0}}^{\boxed{1}}\boxed{(t+it)}\boxed{(1+i)}dt\ \left(=(1+i)^2\int_0^1 t\,dt\right)$$

となる．この積分を計算すると $\boxed{i}$ となる ($(1+i)^2=2i$ だから)

演習 9-4 解答 補足

$\dfrac{d}{dz}(z^2/2)=z$ となっていることに注意する．教科書 p.171 において，曲線 $C: z=z(t)$ $(a\le t\le b)$ および $F'(z)=f(z)$ を満たす関数 $F(z)$ に対して，$\displaystyle\int_C f(z)dz=F(z(b))-F(z(a))$ となることが示されており (講義では来週以降で述べる), ここから上記演習の結果を導くこともできる．