電 210 電気数学 IV

第 8 回

演習

- 今日の内容: 復習, 演習, 例題の一部の解説
- 教科書に書かている事項のうち, 講義で飛ばした部分は, 試験には出さない
- 高校までの教科書と異なり, 大学で使う教科書は, 必ずしも全部読む必要はない; 各自で自分に合った勉強法を工夫するとよい

- 複素数の実体は, 2 次元の実ベクトルに「掛け算」を追加したもの

- 2 次元の数ベクトル (x, y) の⋯

  ▷ 加算: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

  ▷ スカラー倍: $a(x, y) = (ax, ay)$

複素数の構成

- 掛け算の定義:

$$
\begin{aligned}
&(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) \\
&\qquad = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)
\end{aligned}
$$

- これだけで複素数になる

複素数の書き方

- 基本ベクトルを
  $\boldsymbol{e}_1 = (1,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1)$ とすると…
- 複素数 (x, y) は $x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$ と書けるが…
- 複素解析ではこれを $x + yi$ (あるいは $x + iy$)
  と書くことがふつう

演習 8-1

空欄を埋めよ.

演習 8-1 解答

$$i \times i = (0,1)\times(0,1) = (\boxed{0}\,\boxed{0} - \boxed{1}\,\boxed{1}, \boxed{0}\,\boxed{1} + \boxed{0}\,\boxed{1})$$
$$= (\boxed{-1}, \boxed{0})$$

複素平面

- 実数には数直線が対応したが, 複素数の実体は $\mathbb{R}^2$ だから複素数には平面が対応する
- 複素数 $\alpha = a + bi$ に平面の点 $P(a, b)$ を対応させたものを複素平面 あるいは ガウス平面 とよぶ (定義 1.8, p.19)
- 複素数の全体を記号 $\mathbb{C}$ であらわす.

定義 1.3 (p.13) 複素数は $\alpha = a + ib$ に対し:

- a を α の実部と呼び, $a = \mathrm{Re}\,\alpha$ と書く
- b を α の虚部と呼び, $b = \mathrm{Im}\,\alpha$ と書く

複素数は$\cdots$

$\mathrm{Im}\,\alpha = 0$ のとき実数, $\mathrm{Im}\,\alpha \neq 0$ のとき虚数

$\mathrm{Re}\,\alpha = 0$ のとき純虚数

$\boxed{\textbf{定義 1.4 (p.13)}}$

$$\alpha = 0 \overset{\text{def}}{\iff} \operatorname{Re}\alpha = 0 \text{ かつ } \operatorname{Im}\alpha = 0$$

$\boxed{\textbf{定義 1.9 (p.20)}}$

- 複素平面の x 軸を実軸, y 軸を虚軸と呼ぶ
- 複素平面の原点を点 **0** と呼ぶことがある ($0 + 0i$ は複素数の 0 だから)

定義 1.5 (p.14) 複素数 $\alpha = a+bi, \beta = c+di$ に対し,

$$\alpha = \beta \overset{\text{def}}{\iff} a = c \text{ かつ } b = d$$

演習 8-2

各自で空欄を埋めよ

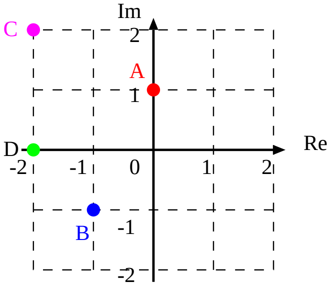
演習 8-2 解答

$$\alpha = 4+9i \quad \mathrm{Re}\,\alpha = \boxed{4}, \quad \mathrm{Im}\,\alpha = \boxed{9}$$
$$\alpha = 1.3 \quad \mathrm{Re}\,\alpha = \boxed{1.3}, \quad \mathrm{Im}\,\alpha = \boxed{0}$$
$$\alpha = \pi i \quad \mathrm{Re}\,\alpha = \boxed{0}, \quad \mathrm{Im}\,\alpha = \boxed{\pi}$$

演習 8-3

図中に A,B,C,D を書き込め

演習 8-3 解答



複素数の演算

定義 1.6 (p.14) 複素数 $\alpha = a+bi, \beta = c+di$ に対し,

加算: $\alpha + \beta = (a+c) + (b+d)i$

減算: $\alpha - \beta = (a-c) + (b-d)i$

乗算: $\alpha\beta = (ac-bd) + (ad+bc)i$

除算: $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

演習 8-4

各自で空欄を埋めよ

演習 8-4 解答

1. $(-1+i)+(1-i)=\boxed{0}+\boxed{0}i \qquad (=-1-i)$

2. $(2-i)-(3-4i)=\boxed{-1}+\boxed{3}i$

3. $(1+i)(1+i)=\boxed{0}+\boxed{2}i$

4. $\dfrac{1}{1-i}=\dfrac{1+i}{(1-i)(1+i)}=\boxed{\dfrac{1}{2}}+\boxed{\dfrac{1}{2}}i$

$\boxed{\textbf{定理 1.1 (p.15)}}$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ に対し

$$
\begin{aligned}
&\alpha + \beta = \beta + \alpha, \\
&\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma, \\
&0 + \alpha = \alpha, \\
&\alpha + (-\alpha) = 0 \\
&\alpha\beta = \beta\alpha, \quad (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma), \\
&\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma, \\
&\alpha 1 = \alpha, \quad \frac{1}{\alpha}\alpha = 1
\end{aligned}
$$

α の整数次のべきを帰納的に定義する:

$$\begin{aligned}\alpha^0 &= 1\\ \alpha^1 &= \alpha\\ \alpha^n &= \alpha(\alpha^{n-1})\\ \alpha^{-n} &= \frac{1}{\alpha^n}\end{aligned}$$

共役複素数

定義 1.7 (p.17) 実軸に関して複素数 α と対称な位置の点 $\overline{\alpha}$ を α の共役複素数という.

例 1.4 (p.17)

$$\operatorname{Re}\alpha = \frac{\alpha + \overline{\alpha}}{2}, \operatorname{Im}\alpha = \frac{\alpha - \overline{\alpha}}{2i}$$

演習 8-5

各自で空欄を埋めよ

演習 8-5 解答

- $-i$ の共役複素数は $\boxed{0} + \boxed{1} i$
- 1 の共役複素数は $\boxed{1} + \boxed{0} i$
- $\pi + \sqrt{2} i$ の共役複素数は $\boxed{\pi} + \boxed{-\sqrt{2}} i$

定理 1.2 (p.18)

$$(1)\ \overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta} \qquad (2)\ \overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$$

$$(3)\ \overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta} \qquad (4)\ \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$$

α が実数 $\overset{\text{iff}}{\iff}$ $\alpha=\overline{\alpha}$

α が純虚数 $\overset{\text{iff}}{\iff}$ $\alpha=-\overline{\alpha}$

指数関数の定義と性質

- 指数関数の定義は, $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$
- $e^z e^w = e^{z+w}$, $\frac{d}{dz} e^{\alpha z} = \alpha e^{\alpha z}$, $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$ となる

極形式

定義 1.10 (p.20) $z = x + iy$ に対し，複素平面に点 $P(x, y)$ を取り，$\overrightarrow{OP}$ の長さを r, $\overrightarrow{OP}$ と実軸のなす角を θ とする (実軸から反時計回りにはかる) と，$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ なので，
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と書ける．これを z の**極形式**という．

定義 1.11 (p.21) $z = x + iy$ を複素平面にプロットした点を $P(x, y)$ としたとき,

- $\overrightarrow{OP}$ の長さ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ を z の絶対値という (記号: $|z|$)
- $\overrightarrow{OP}$ と実軸との角度 θ を z の偏角という (記号: $\arg z$)

- 0 でない複素数は絶対値と偏角から一意的に定まる (p.20 (1.3)) が, 0 の偏角は定義しない (p.22 注意 1.7)
- $|z| = 0 \iff \operatorname{Re} z = 0$ かつ $\operatorname{Im} z = 0$, $|z| = |-z|$, $|\overline{z}| = |z|$, $\arg \overline{z} = -\arg z$, $z\overline{z} = |z|^2$

定義 1.12 (p.23) 偏角の不定の部分を調整して角度が $(-\pi, \pi]$ に収まるようにしたものを偏角の**主値**といい, $\operatorname{Arg} z$ と書く.

- オイラーの公式: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
- 複素数 z の極形式 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ は, $z = re^{i\theta}$ とも書ける
- $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ に対し, $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$ となる
- ド･モアブルの公式: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

$\boxed{\textbf{定理 1.3 (p.24)}}$ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ に対し, 以下が成立する:

$$|zw| = |z||w|, \quad \arg(zw) = \arg z + \arg w,$$

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}, \quad \arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg z - \arg w$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$= \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)$$

$$||z| - |w|| \leq |z+w| \leq |z| + |w|$$ (三角不等式)

例 1.8(第 3 回で略した分) (1)$\{z \in C : |z-1| < |z+1|\}$ は $(1,0)$ からの距離より $(-1,0)$ からの距離の方が大きい点の集合だから, 虚軸の右側, (2) $z = x + iy$ とすると $\mathrm{Re}\, z = x$, $\mathrm{Im}\,(1+i)z = x + y$ だから, $\{x + iy : 2x + y = 1\}$, (3) $z = x + iy$ とすると, $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \to \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 3 - \sqrt{x^2 + y^2} \to (x-2)^2 + y^2 = 9 - 6\sqrt{x^2 + y^2} + (x^2 + y^2) \to -4x + 4 = 9 - 6\sqrt{x^2 + y^2} \to -(4x+5) = -6\sqrt{x^2 + y^2}\, -(4x+5) = -6\sqrt{x^2 + y^2} \to 16x^2 + 40x + 25 = 36x^2 + 36y^2 \to 20(x^2 - 2x) + 36y^2 = 25 \to 20(x-1)^2 + 36y^2 = 45$

三角不等式の証明

2 次元のベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)^T$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)^T$ について $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$ を示せばよいが, $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, $(\|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|)^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| + \|\boldsymbol{b}\|^2$ だから, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \leq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$ であることがいえればよい ($(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積). この不等式は, $(\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|)^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 = a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2 = (a_1b_2 - b_1a_2)^2 \geq 0$ から導かれる.

n 乗根

定義 1.14 (p.40) $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ に対し, $w^n = z$ を満たす複素数 w を z の n 重根といい, $z^{1/n}$ あるいは $\sqrt[n]{z}$ であらわす.

$z = re^{i\theta}$ とすると $z^n = r^n e^{in\theta}$ だから

$$|z^n| = |z|^n, \arg\left(z^n\right) = n \arg z$$

定理 1.9 (p.40) $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ に対し, $z \neq 0$ であれば, z は n 個の n 乗根を持つ. $z = re^{i\theta}$ としたとき, $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ を n 個の根とすると,

$$w_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$$

と書ける ($\sqrt[n]{r}$ は $r > 0$ の実数の範囲での n 乗根).

複素数の範囲で考えるときには $i^{1/2}$ は 2 個の複素数 $e^{i\pi/4}$, $e^{i(\pi/4+\pi)}$ をまとめた表記

演習 8-6

各自で空欄を埋めよ.

演習 8-6 解答

$$w_0 = \boxed{2}\, e^{i\boxed{(\pi/6)}} \qquad w_1 = \boxed{2}\, e^{i\boxed{(\pi/6+\pi/3)}}$$

$$w_2 = \boxed{2}\, e^{i\boxed{(\pi/6+2\pi/3)}} \qquad w_3 = \boxed{2}\, e^{i\boxed{(\pi/6+\pi)}}$$

$$w_4 = \boxed{2}\, e^{i\boxed{(\pi/6+4\pi/3)}} \qquad w_5 = \boxed{2}\, e^{i\boxed{(\pi/6+5\pi/3)}}$$

複素関数

定義 2.9 (p.56)　変数 x,y が独立で, z の値が x と y から定まるとき, x と y を独立変数, z を従属変数という

定義 2.10 (p.56)　複素数 z が $z = x + iy$ で与えられ, x と y が独立な実変数であるとき, z を複素変数という. 実数値を取る変数を実変数という.

$\boxed{\textbf{定義 2.11 (p.56)}}$ 複素平面の集合 S が与えられ, S の各点 z にある複素数 $f(z)$ を対応させる規則が定まっているとき, f を**複素関数**という. この対応を $w = f(z)$ と書く. また, 集合 S を f の**定義域**という.
実数の集合 S が与えられ, S の各点 x にある実数 $f(x)$ を対応させる規則が定まっているとき, f を**実関数**という.

- $z = x + iy$, $w = u + iv$ としたとき, z に w を対応させる規則は, 点 (x, y) に点 (u, v) を対応させる規則と解釈することができる.

- 以上の解釈に基づき, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ と書く.

定義 変数 z が動く複素平面を z **平面**, 変数 w が動く複素平面を w **平面**という.

収束

定義 2.20 (p.65) 　複素数 α, β に対して

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z, 0 < |z - \alpha| < \delta \Rightarrow |f(z) - \beta| < \varepsilon$$

となるとき, $z \to \alpha$ のときの $f(z)$ の極限値は β であるまたは $z \to \alpha$ のとき $f(z)$ は β に収束するという.

$\boxed{\text{定義}}$ 複素数 β に対して

$\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0, \forall z, |z| > R \Rightarrow |f(z) - \beta| < \varepsilon$ となるとき, $f(z)$ は無限遠点で極限値 β を持つといい, 以下のように書く.

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \beta \text{ または } f(z) \to \beta \, (z \to \infty)$$

定義 2.21 (p.66) $z \to \alpha$ としたときの $f(z)$ の極限が定まらない場合,

$z \to \alpha$ のとき $f(z)$ は**発散**する

という. $z \to \alpha$ としたとき $|f(z)|$ が限りなく大きくなる場合,

$z \to \alpha$ のとき $f(z)$ は**無限大に発散**する

といい, 以下のように書く.

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = \infty \text{ または } f(z) \to \infty \, (z \to \alpha)$$

$\boxed{\text{定義}}$ $|z|$ が限りなく大きくなるとき, $|f(z)|$ も限りなく大きくなる場合,

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \text{ または } f(z) \to \infty \, (z \to \infty)$$

と書く.

$\boxed{\textbf{定理 2.8 (p.66)}}$ $f(z)$, $g(z)$ および β, γ に対し, $\lim_{z\to\alpha} f(z) = \beta$, $\lim_{z\to\alpha} g(z) = \gamma$, であるとき,

$$(1)\ \lim_{z\to\alpha}(f \pm g)(z) = \beta \pm \gamma \qquad \text{(複合同順)}$$
$$(2)\ \lim_{z\to\alpha} f(z)g(z) = \beta\gamma$$
$$(3)\ \lim_{z\to\alpha} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\beta}{\gamma} \qquad (\gamma \neq 0\ \text{のとき})$$

$\boxed{\textbf{定理 2.9 (p.67)}}$ $\alpha = a + ib$, $\beta = c + id$, $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ としたとき,

$$\begin{aligned} &\lim_{z \to \alpha} f(z) = \beta \\ \overset{\text{iff}}{\iff} &\lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x, y) = c \\ &\text{かつ} \lim_{(x,y)\to(a,b)} v(x, y) = d \end{aligned}$$

演習 8-7

空欄を埋めよ

演習 8-7 解答

$$\lim_{z\to 0}\frac{4z-i}{iz+2}=\boxed{-i/2}\qquad \lim_{z\to 2i}\frac{3i-z}{3i}=\boxed{1/3}$$

連続関数 (p.68)

定義 2.22 関数 $w = f(z)$ が定義域 D の点 α で連続であるとは,

$\lim_{z \to \alpha} f(z) = f(\alpha)$ となることをいう．定義域のすべての点で $w = f(z)$ が連続であるとき, $w = f(z)$ は D において連続であるという．

定理 2.10 (p.69) $f(z)$, $g(z)$ が D で連続であるとき, $f(z) \pm g(z)$, $f(z)g(z)$ は D で連続; 複素数 c に対し, $cf(z)$ は D で連続; $g(z) = 0$ なら $f(z)/g(z)$ は連続;

定理 2.11 (p.69) $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ としたとき, $f(z)$ が連続 $\overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow}$ $u(x, y)$ および $v(x, y)$ が連続

$\boxed{\textbf{定理 2.12 (p.69)}}$ 関数 $f(z)$ が $z = z_0$ で連続, 関数 $g(w)$ が $w = f(z_0)$ で連続であるとき, $(g \circ f)(z) = g(f(z))$ は $z = z_0$ で連続である.

$\boxed{\textbf{定理 2.13 (p.70)}}$ 関数 $f(z)$ の定義域が有界閉集合で, $f(z)$ が D において連続であるとき, $|f(z)|$ は D において最大値と最小値を取る.

正則関数

定義 3.1 (p.74) D を領域 (弧状連結な開集合), $f(z)$ を D で定義された関数, $\alpha \in D$ とする．極限 $\displaystyle\lim_{z\to\alpha}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}$ が定まるとき, $f(z)$ は α で微分可能であるいう．この極限値を $f(z)$ の α における微分係数といい, $f'(\alpha)$ または $\dfrac{df}{dz}(\alpha)$ とあらわす.

$\boxed{\textbf{定義 3.2 (p.75)}}$ 領域 D で定義された関数 $w = f(z)$ が D のすべての点で微分可能であるとき, $f(z)$ は D で正則であるという．正則な関数のことを正則関数という．D の各点 α に $f'(\alpha)$ させる規則, すなわち $D \ni \alpha \mapsto f'(\alpha) \in \mathbb{C}$ は D で定義された関数であるが, この関数を f の導関数といい, $f'(z)$, $\dfrac{df}{dz}(z)$, $\dfrac{dw}{dz}$ などのように表す．複素平面全体で正則な関数を整関数と呼ぶ.

- $f'(z)$ の導関数を $f(z)$ の第 2 次導関数といい，$f''(z), \dfrac{d^2 f}{dz^2}$ などと書く．

- $f(z)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(z)$, $\dfrac{d^n f}{dz^n}(z)$ などと書く．これは，$f^{(n-1)}(z)$ の導関数として定義される (帰納的な定義)．

$\boxed{\textbf{定理 3.1 (p.76)}}$　関数 $f(z)$ が D で微分可能なら, $f(z)$ は D で連続である.

$\boxed{\textbf{定理 3.2 (p.77)}}$　領域 D において $f(z), g(z)$ が正則であるとき，これらの線形結合 $\alpha f(z) + \beta g(z)$ (ただし α, β は任意の複素数) および積 $f(z)g(z)$ は正則である．また，$f(z)/g(z)$ は $g(z) \neq 0$ を満たす点で正則である．　さらに，$(\alpha f + \beta g)'(z) = \alpha f'(z) + \beta g'(z)$, $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z) = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$ である．

定理 3.3 (p.77) $f(z)$ が z_0 の近傍で微分可能で, $g(w)$ が $w_0 = f(z_0)$ の近傍で微分可能であるとき,
$(g \circ f)(z)$ は z_0 の近傍で微分可能で,

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(w_0)f'(z_0)$$

となる.

演習 8-8

各自で空欄を埋めよ

演習 8-8 解答

$$(z^5)' = \boxed{5z^4}, \quad \left(\frac{z - \pi i}{z}\right)' = \frac{\boxed{\pi i}}{\boxed{z^2}},$$

$$(z^{-1})' = \boxed{-z^{-2}}$$

コーシー・リーマンの方程式

定義 2変数実数値関数 $u(x,y)$ が点 (a,b) で微分可能であるとは, ある (c_1,c_2) が存在し, $u(x+h,y+k)-u(x,y)=c_1h+c_2k+\varepsilon(h,k)$ かつ $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\epsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$ となることをいう. このとき, (c_1,c_2) を $u(x,y)$ の (a,b) における微分係数といい, $u'(a,b)$ と書く.

定理 2変数実数値関数 $u(x,y)$ が点 (a,b) で微分可能であるとき,

$$u'(a,b) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(a,b), \frac{\partial u}{\partial y}(a,b)\right)$$

となる.

定理 3.4 (p.81) 領域 D で定義された関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が $\alpha = a + ib$ において微分可能であるための必要十分条件は $u(x, y)$ と $v(x, y)$ が (a, b) において微分可能で, かつコーシー・リーマンの方程式: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ を満たすことである.

$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}(a,b)\right)$ を $f_x(\alpha)$, $\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + i\dfrac{\partial v}{\partial y}(a,b)\right)$ を $f_y(\alpha)$ とすると, 以下が成り立つ:

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= (\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x})(a,b) = f_x(\alpha) \\ &= \frac{1}{i}(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y})(a,b) = \frac{1}{i}f_y(\alpha) \end{aligned}$$

演習 8-9

空欄を埋め, 正しいと思う方を選択せよ.

演習 8-9 解答

$z = x+iy$ とし, $f(z) = \overline{z}$ を $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ の形に書き直すと $u(x,y) = \boxed{x}$, $v(x,y) = \boxed{-y}$ である. $\frac{\partial u}{\partial x} = \boxed{1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \boxed{0}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \boxed{0}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \boxed{-1}$ であるから, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ と $\boxed{\text{ならず}}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ と $\boxed{\text{なる}}$. したがって, $f(z)$ は正則で $\boxed{\text{ない}}$.

演習 8-10

空欄を埋めよ.

演習 8-10 解答 (1)

$u(x, y) = \boxed{x^2 - y^2}$, $v(x, y) = \boxed{2xy}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \boxed{2x}$,
$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \boxed{-2y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \boxed{2y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \boxed{2x}$ となる.

演習 8-10 解答 (2)

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \boxed{2x} + i\boxed{2y}$$

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{i}\left(\boxed{-2y} + i\boxed{2x}\right) \\ &= \boxed{2x} + i\boxed{2y} \end{aligned}$$

整級数

定義 2.1 (p.47) 複素数の無限列 $c_0, c_1, \ldots$ を複素数列または数列といい, $\{c_n\}$ であらわす.

定義 2.5 (p.52) 複素数列 $\{c_n\}$ の形式的な無限和 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ を複素級数, 無限級数あるいは級数という.

定義 4.1 (p.98) 複素数列 $\{c_n\}$ および複素数 z に対し, 形式的な無限和 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ を**整級数**またはべき**級数**という.

定義 2.2 (p.48) 複素数列 $\{c_n\}$ が γ に**収束**するとは, $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n \geq N, |c_n - \gamma| < \varepsilon$ となることをいう. 収束しない複素数列は**発散**するという.

定義 2.6 (p.52) 複素級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ が収束するとは, 部分和 $S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$ の作る数列が収束することをいう．この極限を複素級数の和といい, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ であらわす．複素級数が収束しないときには発散するという．

定義 2.8 (p.54) 複素級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ が絶対収束するとは, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ が収束することをいう．

定理 2.6 (p.54) 絶対収束する級数は収束する.

定義 整級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ が z_0 で収束するとは, z に z_0 を代入して得られる複素級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$ が収束することという.

定理 4.1 (p.98) 整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ が $z = z_0$ で収束するとき, $|z| < |z_0|$ をみたすすべての z に対し $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は絶対収束する.
整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ が $z = z_0$ で発散するとき, $|z| > |z_0|$ をみたすすべての z に対し $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は発散する.

定義 4.2 (p.99) 整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ が $|z| < r$ なら収束し, $|z| > r$ なら発散するとき, r をこの整級数の収束半径という．整級数がつねに収束する場合は収束半径は ∞, 整級数がつねに収束しない場合は収束半径は 0 と定義する．

整級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ の収束半径が r であるとき, 半径 r の開円板 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ をこの整級数の収束円という．

定理 4.4 (p.103) 整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = r$$

が存在するとき，この整級数の収束半径は r である.

定理 4.3 (p.101) 整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ の収束半径を r とすると, $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|c_n|}$ が零でなく有限のときには

$r = \dfrac{1}{\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|c_n|}}$ である. また, $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|c_n|} = 0$ のときは $r = \infty$, $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|c_n|} = \infty$ のときは $r = 0$ とする.

定理 4.8 (p.112) 整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ の収束半径が >0 であるとき，収束円 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ において $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ と定義すると，$f(z)$ は収束円において微分可能で，$f'(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ となる．また，整級数 $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ の収束半径も r である．

演習 8-11

空欄を埋めよ (第 6 回演習と同内容だが重要なので再掲する).

演習 8-11 解答 (1)

$c_0 = \boxed{1}$, $c_1 = \boxed{1}$, $\ldots$, $c_n = \boxed{1}$, $c_{n+1} = \boxed{1}$,

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{1}} = \boxed{1}, \ \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = \boxed{1}, \ r = \boxed{1}.$$

$$(1-z)f(z) = \boxed{1}, \ f(z) = \frac{\boxed{1}}{\boxed{1-z}}.$$

演習 8-11 解答 (2)

$$c_0 = \boxed{1/0!},\ c_1 = \boxed{1/1!},\ \ldots,$$

$$c_n = \boxed{1/n!},\ c_{n+1} = \boxed{1/(n+1)!},$$

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{\boxed{(n+1)!}}{\boxed{n!}} = \boxed{n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = \boxed{\infty},\ r = \boxed{\infty}.$$

初等関数

定義 4.9 (p.122)　整級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots$$

が定める関数を指数関数といい，e^z あるいは $\exp z$ で表す.

定義 4.10 (p.130)

$$\cos z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} z^{2m}$$

$$\sin z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{2m+1}$$

公式

- $\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z$
- $e^{iz} = \cos z + i \sin z$
- $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
- $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

公式

- $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$
- $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$ (定理 4.15, p.131)
- $\cos(z+w) = \cos z\cos w - \sin z\sin w$
- $\sin(z+w) = \sin z\cos w + \cos z\sin w$
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ は, $\sin z$ と $\cos z$ の絶対値が非常に大きいことがあることを考えれば, 不思議に思えるかもしれない．これは, 双方がうまくキャンセルからである．$|\sin z|^2 + |\cos z|^2$ は 1 にならないことにも注意せよ．確認しておくと, $\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 = -\dfrac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{4} + \dfrac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = 1$ となる.

双曲線関数

定義 4.11 (p.135)　次式によって定義される関数を双曲線関数という.

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

対数関数

定義 (p.137) z に対応する関数値 $f(z)$ がただ一つ定まる関数を一価関数, 複数の値が対応する'関数'を多価関数という. z に対応する $f(z)$ の値が n 個ある場合には n 価関数, 無限個ある場合には無限多価関数という.

定義 (p.137) $\log$ とは, z に $\{w \in \mathbb{C} : e^w = z\}$ という集合を対応させる多価関数である.

定義 実数 $x > 0$ の自然対数を $\ln x$ であらわす.

定理 4.16 (p.137) 対数関数 $\log z$ は $\log z = \ln|z| + i \arg z$ と表せる. $z = re^{i\theta}$ なら $\log z = \ln r + i(\theta + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$ と表せる.

対数関数 (p.137)

定義 4.13 (p.139)　対数関数の虚部を $(-\pi, \pi]$ の範囲に取ったものを対数関数の主値あるいは主枝といい, $\mathrm{Log}\, z$ であらわす. すなわち,

$$\mathrm{Log}\, z = \ln|z| + i \mathrm{Arg}\, z$$

である.

対数関数 (p.140)

定義 4.13 対数関数の分枝とは, その値を $\ln|z|+i(\operatorname{Arg} z+2n\pi)$ としたものである ($n \in \mathbb{Z}$).

定理 4.17 (p.140) $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し, 分枝を適当に選べば, 以下が成立する:

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2,$$

$$\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log z_1 - \log z_2$$

定理 4.18 (p.144) 対数関数は $\mathbb{C}$ から実軸上の $x \leq 0$ の部分を除いた領域で正則で, どの分枝を選んでも $(\log z)' = \frac{1}{z}$ である.
したがって, 主値についても $(\mathrm{Log}\, z)' = \frac{1}{z}$ である.

$\boxed{\textbf{定理 4.19 (p.146)}}$ 整級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$$

は $|z| < 1$ で収束し, $\mathrm{Log}\,(1+z)$ に等しい.