工業数学 IV 第 7 回

三角関数・双曲線関数・対数関数

前回の復習 (1)

指数関数の定義 $$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

三角関数の定義 $$\cos z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} z^{2m}$$

$$\sin z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{2m+1}$$

前回の復習 (2) 公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \text{(オイラーの公式)}$$

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z$$

前回の復習 (3) 公式

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

$$\left(e^{\alpha z}\right)' = \alpha e^{\alpha z}$$

前回の復習 (4) 公式

$$\cos(-z) = \cos z$$

$$\sin(-z) = -\sin z$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

指数関数と三角関数 (p.125)

例 4.6(1) $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ である.

理由

$$
\begin{aligned}
e^{x+iy} &\underset{\text{指数関数の性質}}{=} e^x e^{iy} \\
&\underset{\text{オイラーの公式}}{=} e^x(\cos y + i \sin y)
\end{aligned}
$$

- $e^z = e^{(x+iy)}$ は…
  - ▷ $[-e^x, e^x]$ の範囲で振動
  - ▷ 実部は $e^x \cos y$, 虚部は $e^x \sin y$

三角関数の性質 (1) (p.131)

定理 4.15

$(\cos z)' = -\sin z,\ (\sin z)' = \cos z$

理由

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

を z について微分すればわかる.

三角関数の性質 (2) (p.134)

例 4.12(1)

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$$

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$$

理由　p.134 の計算を追えばよい (各自で読んでおくこと).

三角関数の性質 (3) (p.134)

例 4.12(3) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

理由　$\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ だから,

$$\cos^2 z = \frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}}{4},\ \sin^2 z = -\frac{e^{2iz}-2+e^{-2iz}}{4}.$$

よって $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

- 複素変数の三角関数の振幅の大きさを考えれば,

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

となることは不思議に感じられるかもしれないが, 実部と虚部のバランスがうまく取れた結果, このようになっている.

双曲線関数 (p.135)

定義 4.11 次式によって定義される関数を双曲線関数という.

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

- $\sinh z$:双曲線正弦関数 (または双曲正弦関数)
- $\cosh z$:双曲線余弦関数 (または双曲余弦関数)
- $\tanh z$:双曲線正接関数 (または双曲正接関数)

実変数 θ の双曲線関数は…

$$\cosh\theta = \frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}, \quad \sinh\theta = \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}$$

$$\tanh\theta = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta}$$

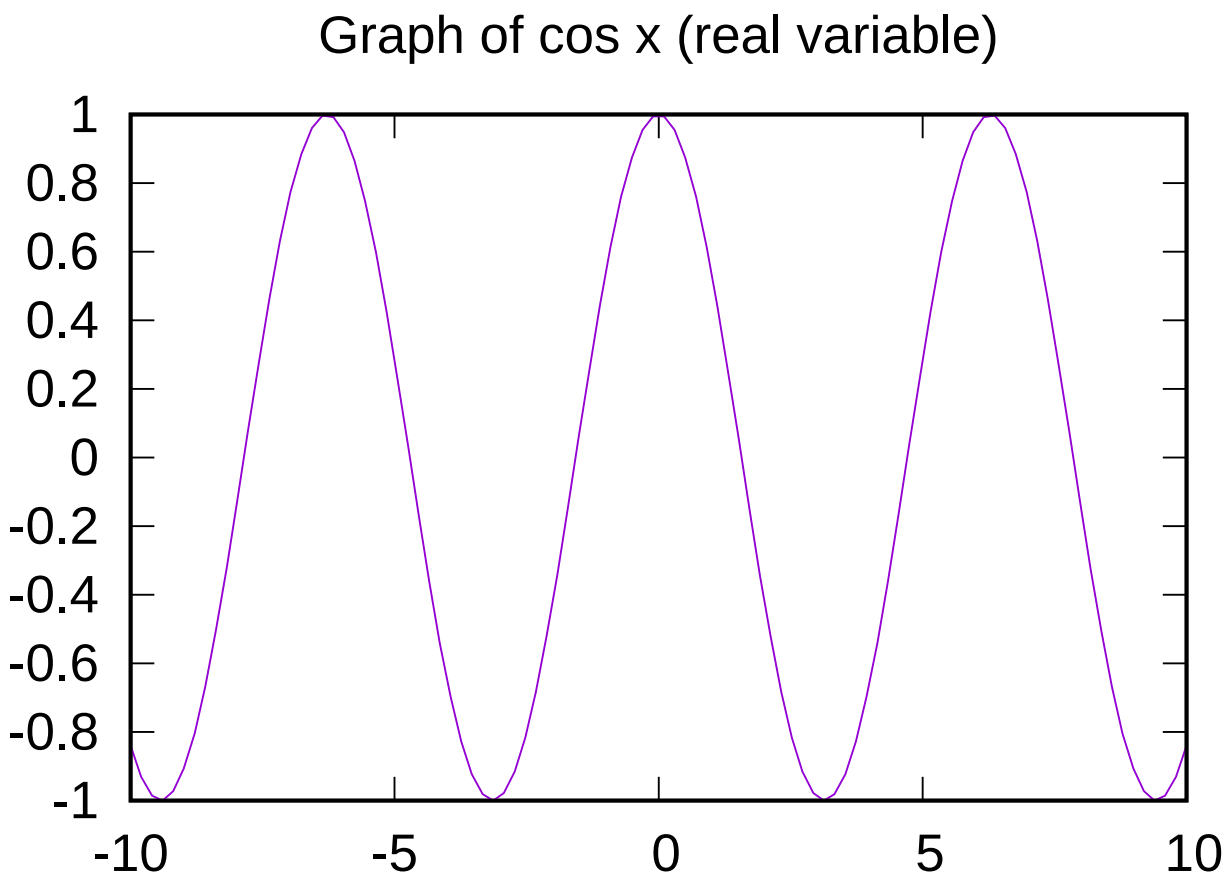
- 電気電子系では, 双曲線関数を, 分布定数回路の解析などで利用.
- 実変数の世界では…
  - ▷ $\cos\theta$, $\sin\theta$ は ± 1 の範囲で振動
  - ▷ $\cosh\theta$, $\sinh\theta$ は大きな値を取り得, 振動的でない
  - ▷ 上記以外の性質は似ている

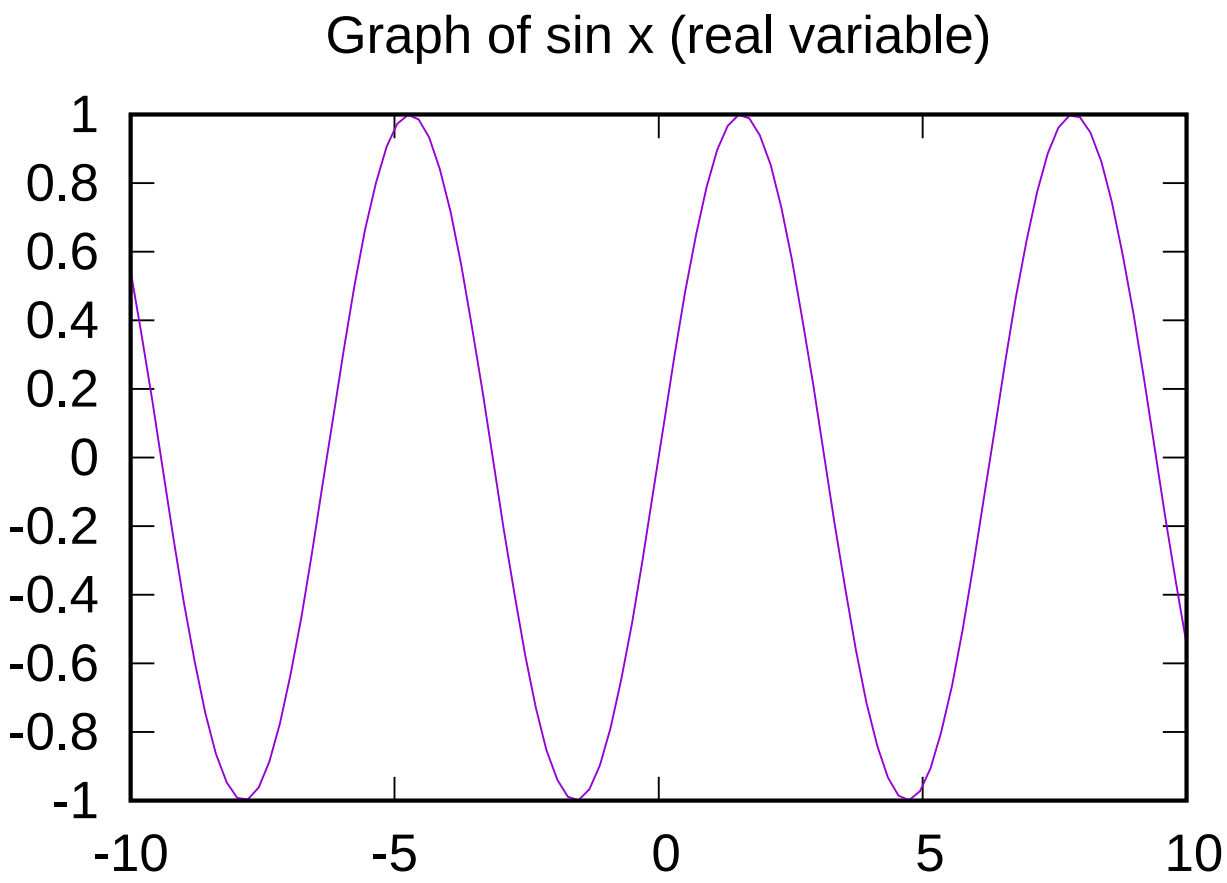
- 双曲線関数と三角関数が類似した性質を持つ理由は…

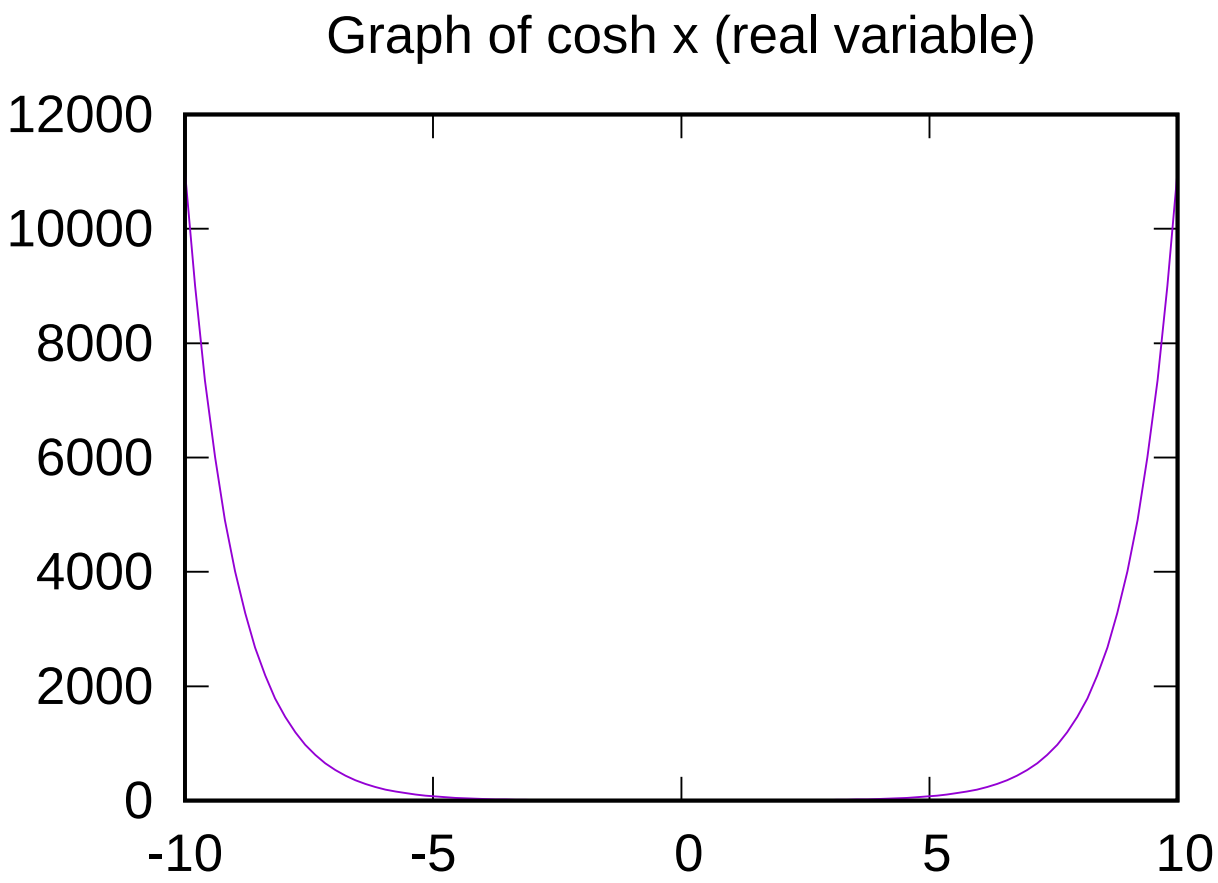
双曲線関数	三角関数
$\cosh z = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}$	$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
$\sinh z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$	$\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

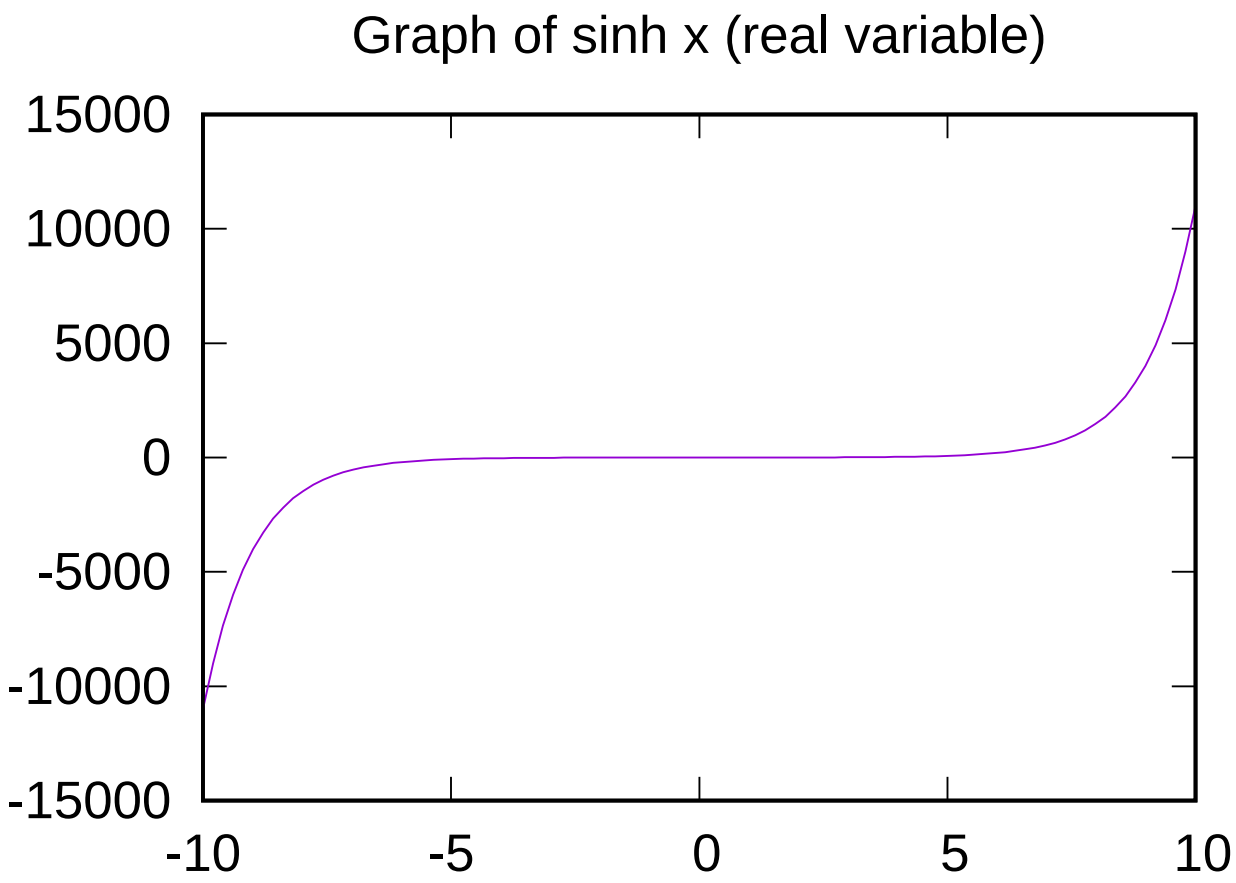
- 複素変数の世界では,
  $\cos(iz) = \cosh z \ \sin(iz) = i \sinh z$
- だから, 大部分の性質は同じ (あたりまえ)
- 変数を実数に限定すると別物に見える

- 実変数の世界で三角関数と双曲線関数のグラフを比較すると…

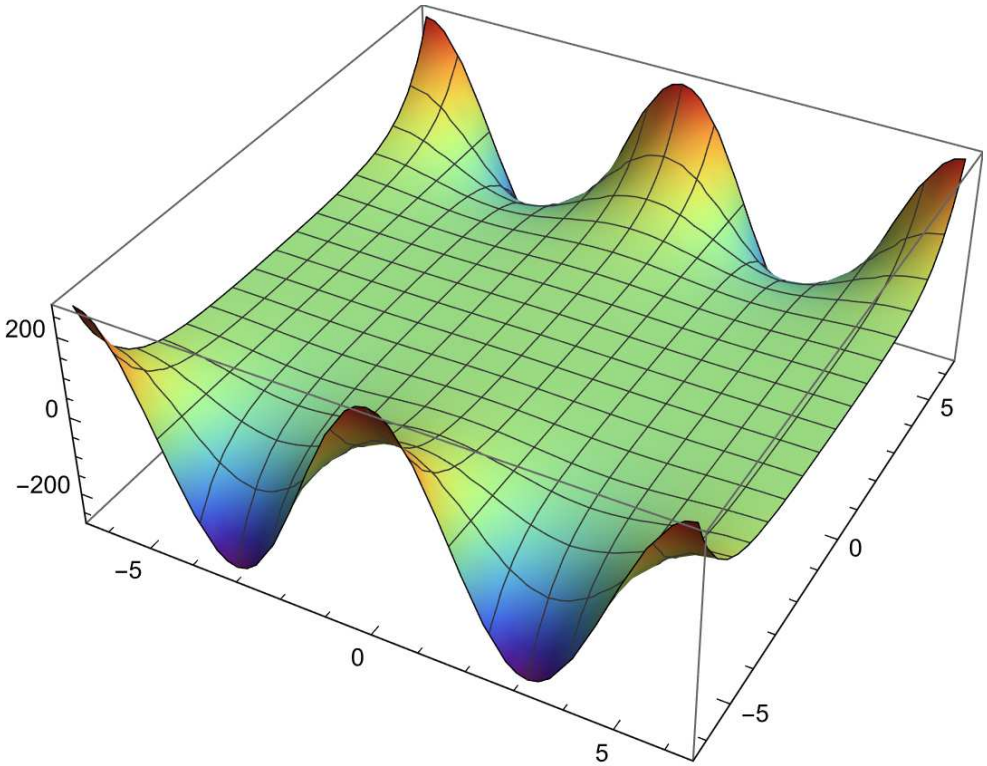

Graph of cos x (real variable)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-10
-5
0
5
10


Graph of sin x (real variable)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-10
-5
0
5
10

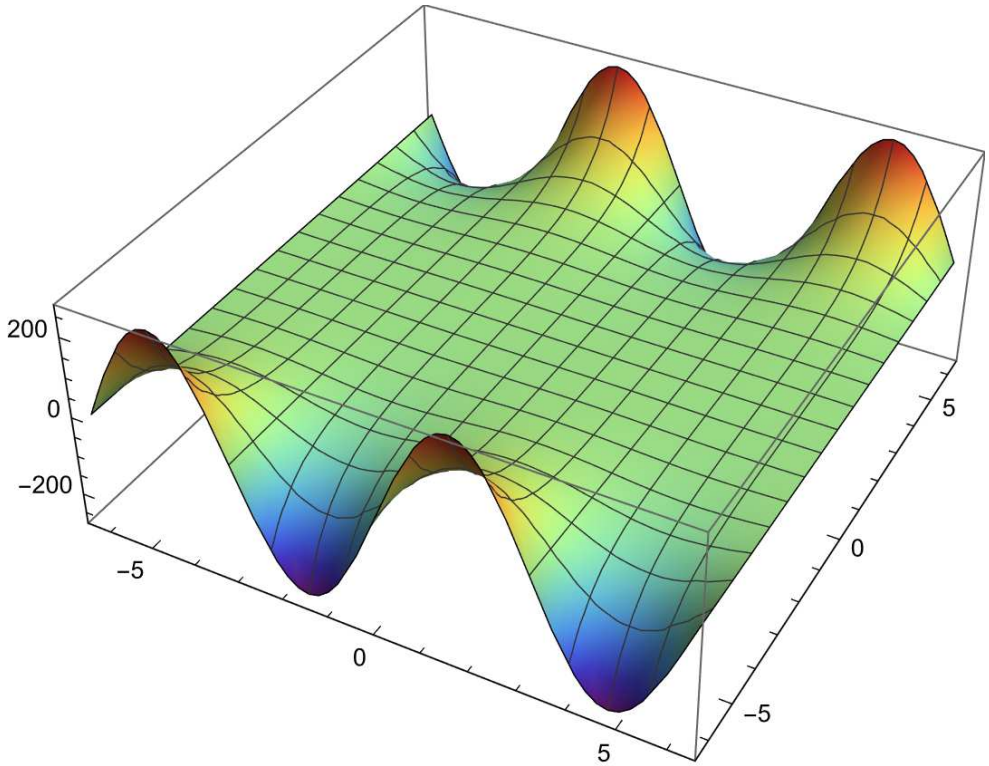

Graph of cosh x (real variable)
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
-10
-5
0
5
10


Graph of sinh x (real variable)
15000
10000
5000
0
-5000
-10000
-15000
-10
-5
0
5
10

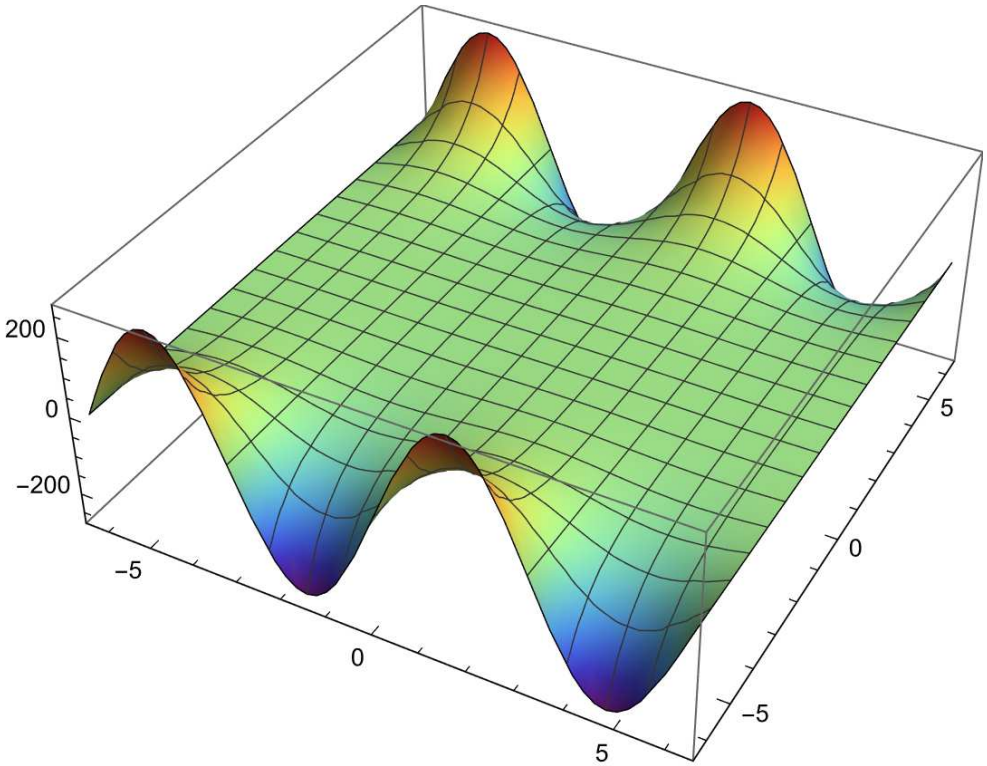
- 複素変数の世界で三角関数と双曲線関数のグラフを比較すると…



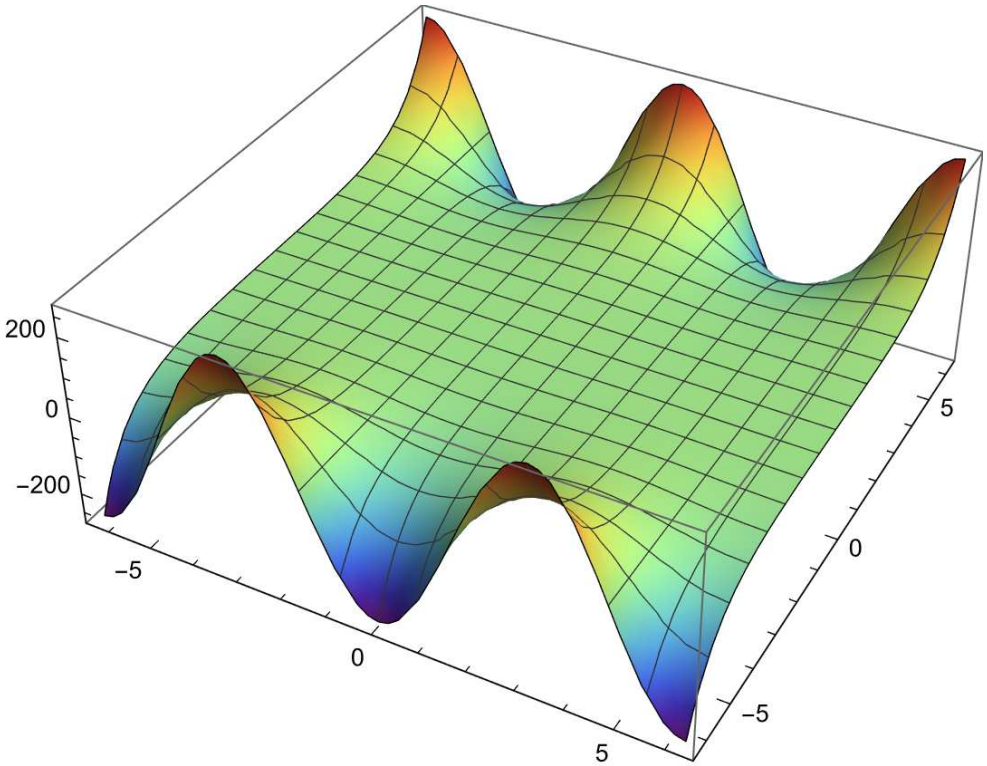
$\cos z$ の実部



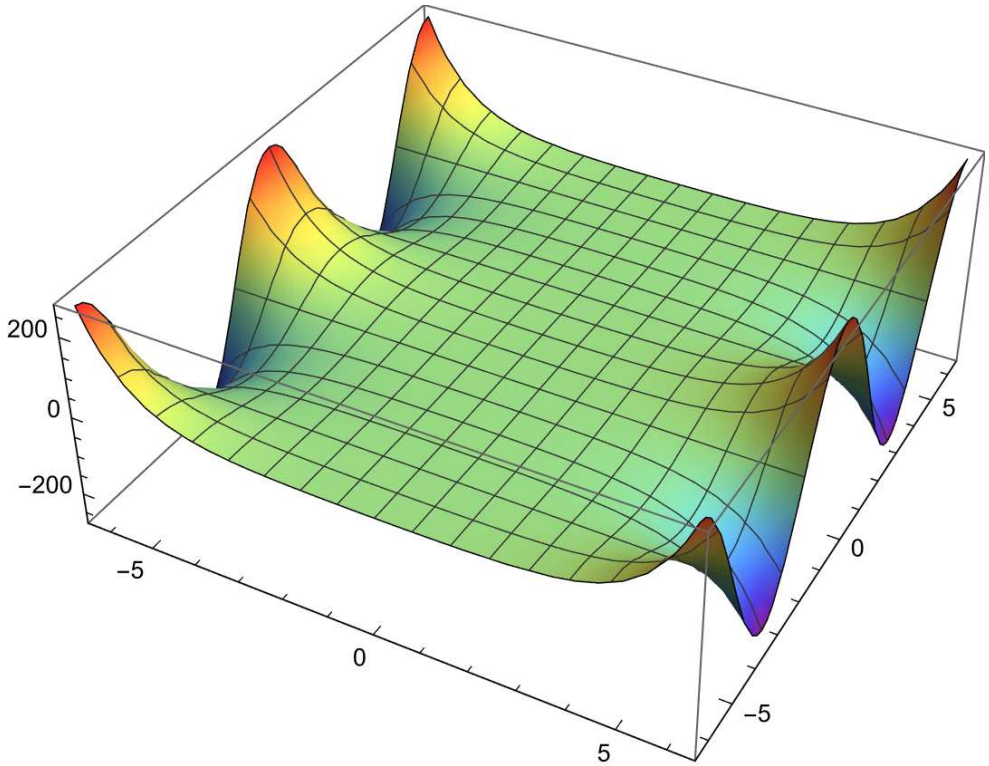
$\cos z$ の虚部



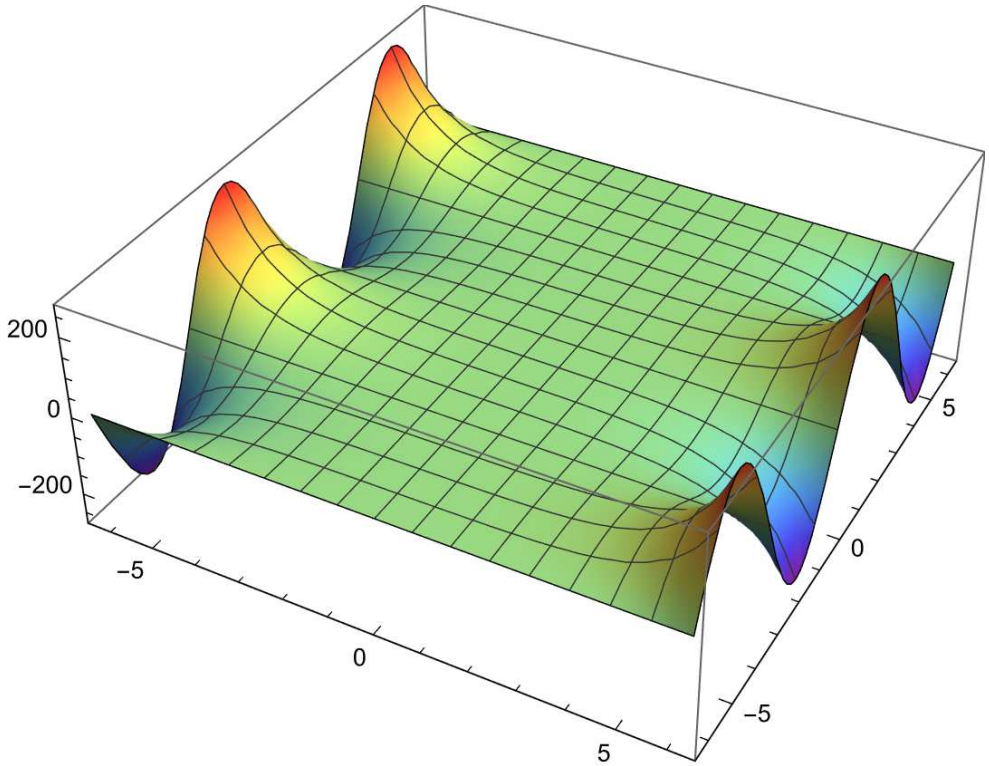
$\sin z$ の実部



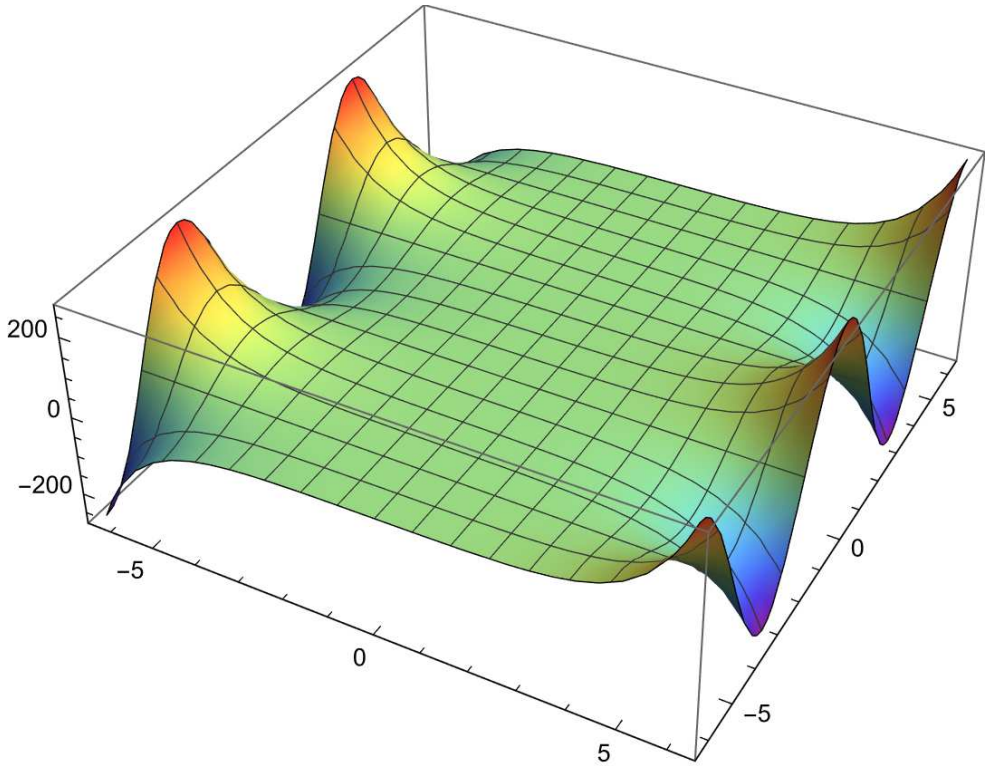
$\sin z$ の虚部



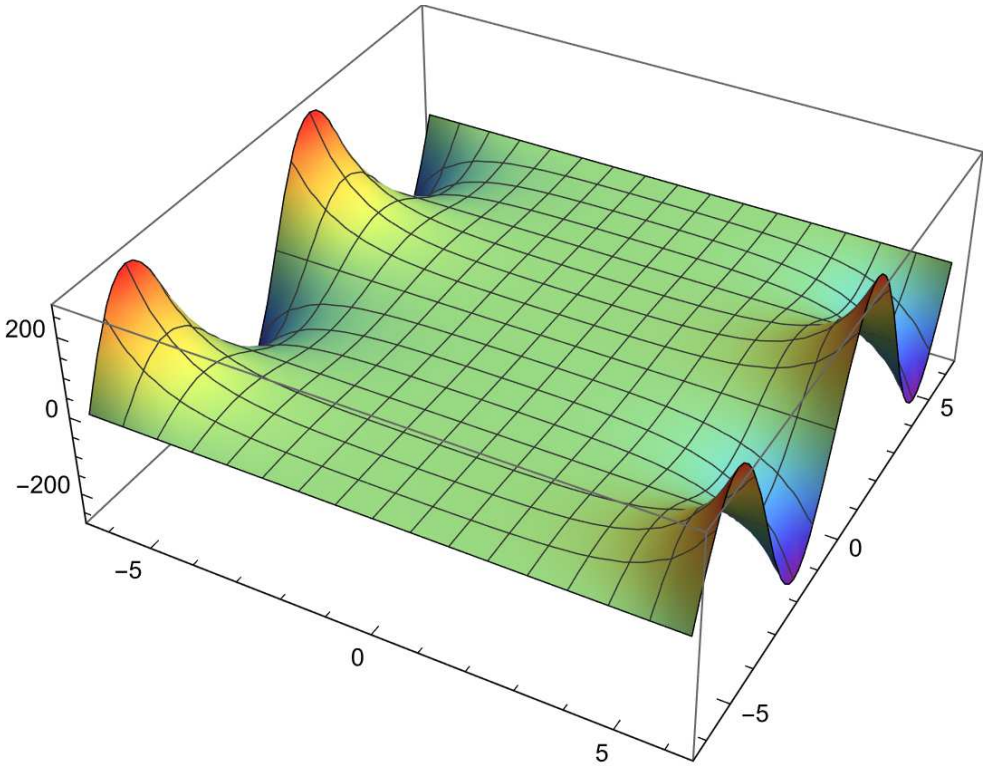
$\cosh z$ の実部



$\cosh z$ の虚部



$\sinh z$ の実部

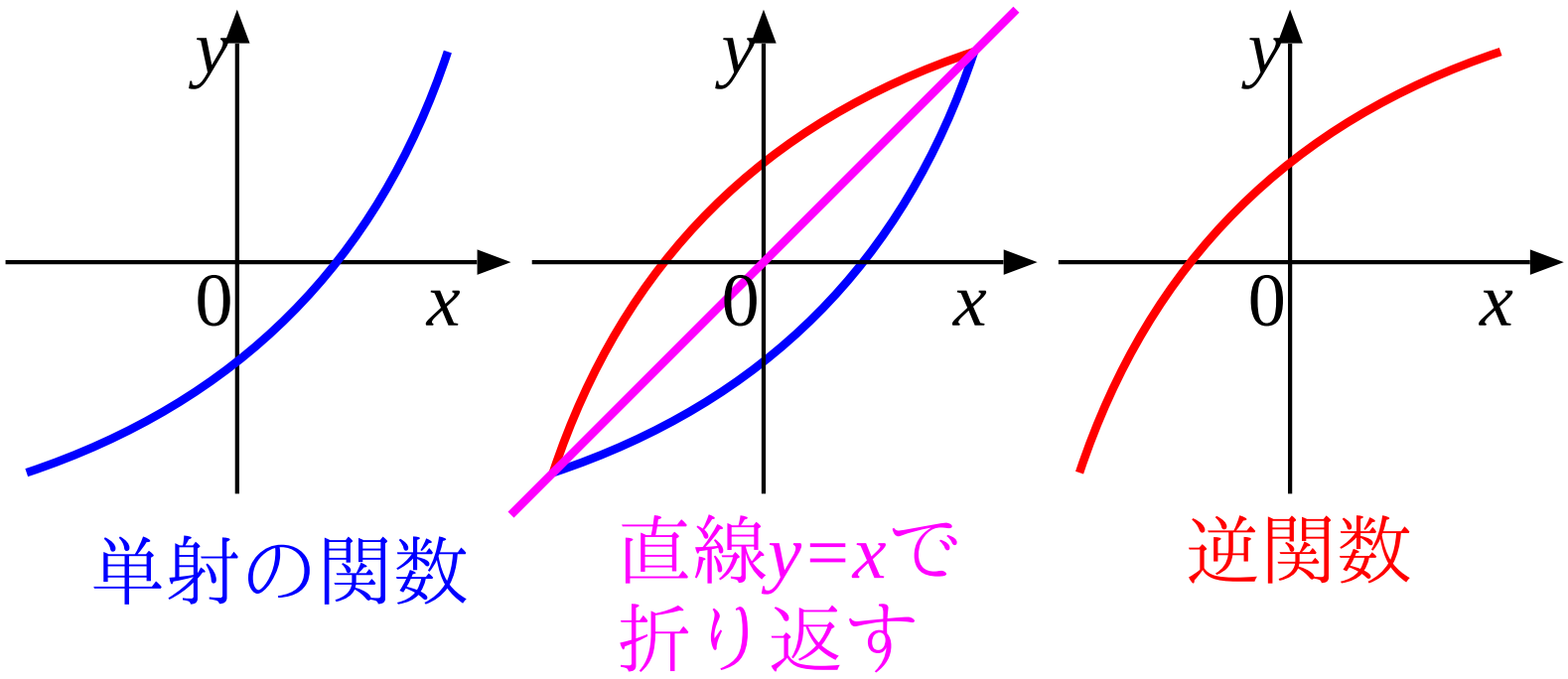


$\sinh z$ の虚部

- どれもあまり変わらない.

対数関数 (1)

- 複素解析の分野では, 対数関数の定義にいくつかの流儀がある.
- 実変数の場合と同様に対数関数を指数関数の逆関数として定義したいのだが…



実変数の関数 (単射) の逆関数の作り方

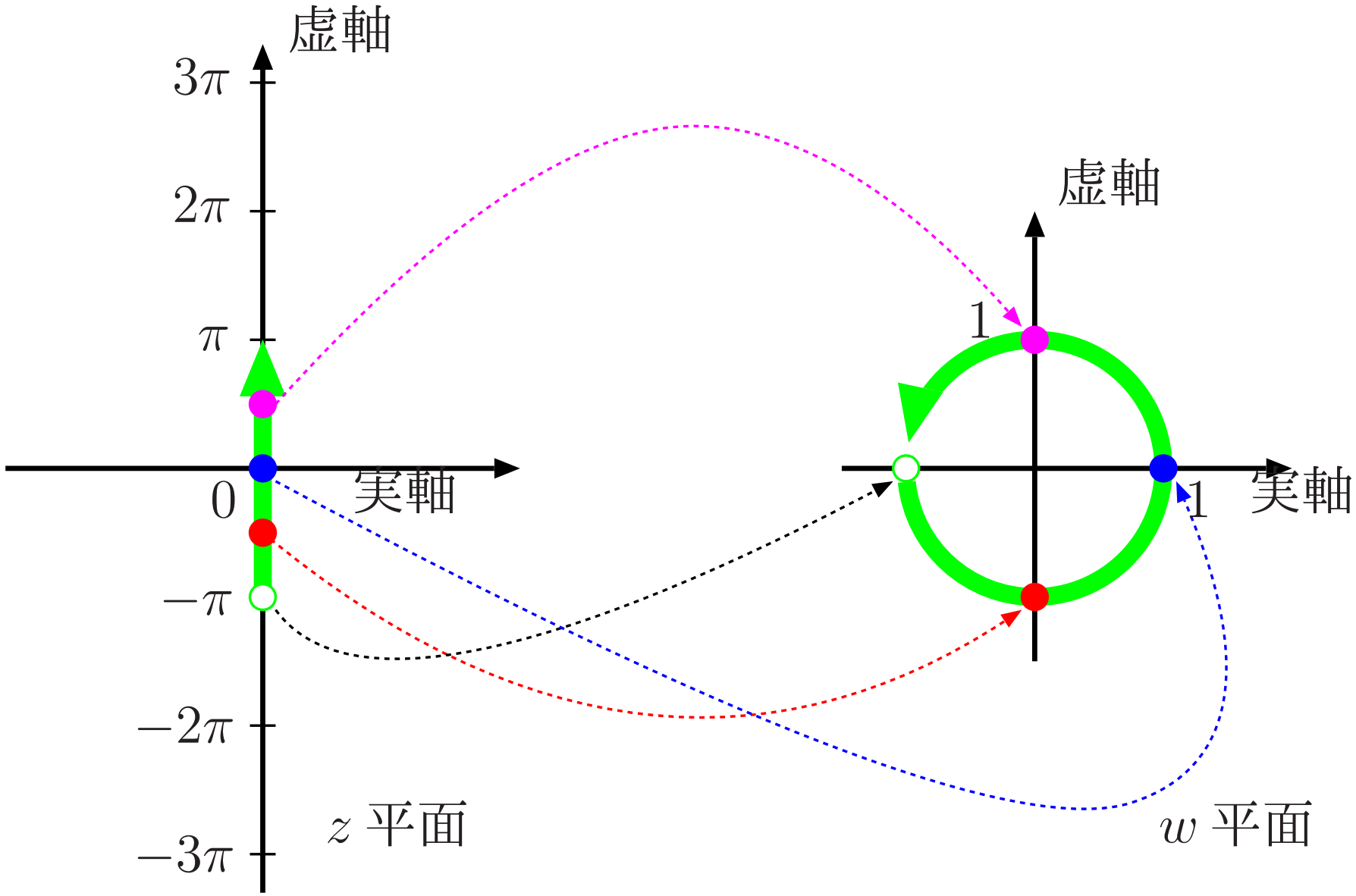
対数関数 (2)

- 実変数の指数関数は単射 (1 対 1 写像) なので, 逆関数が定義できる
- 複素変数の指数関数は単射ではないので, 逆関数がうまく定義できない

対数関数 (3)

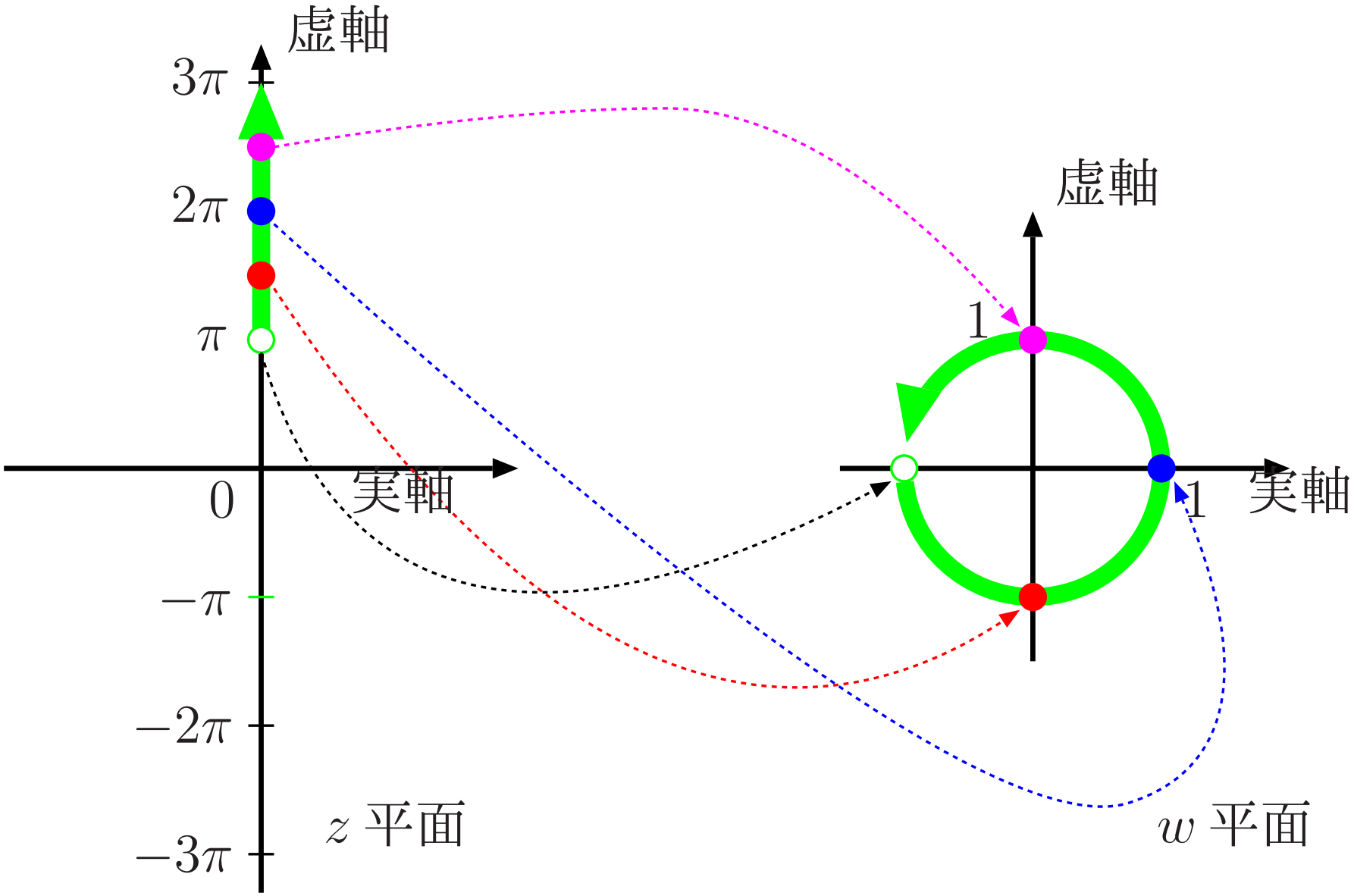
- e^z による虚軸の部分集合 $A_0 = \{x + iy : x = 0, -\pi < y < \pi\}$ の像を考える.

- $z \in A_0$ なら $e^z = e^{0+iy} = e^0(\cos y + i \sin y) = (\cos y + i \sin y)$ だから, この像は単位円から -1 を除いたものに一致する.


虚軸
3π
2π
π
0
実軸
$-\pi$
-2π
-3π
z 平面
虚軸
1
1
実軸
w 平面

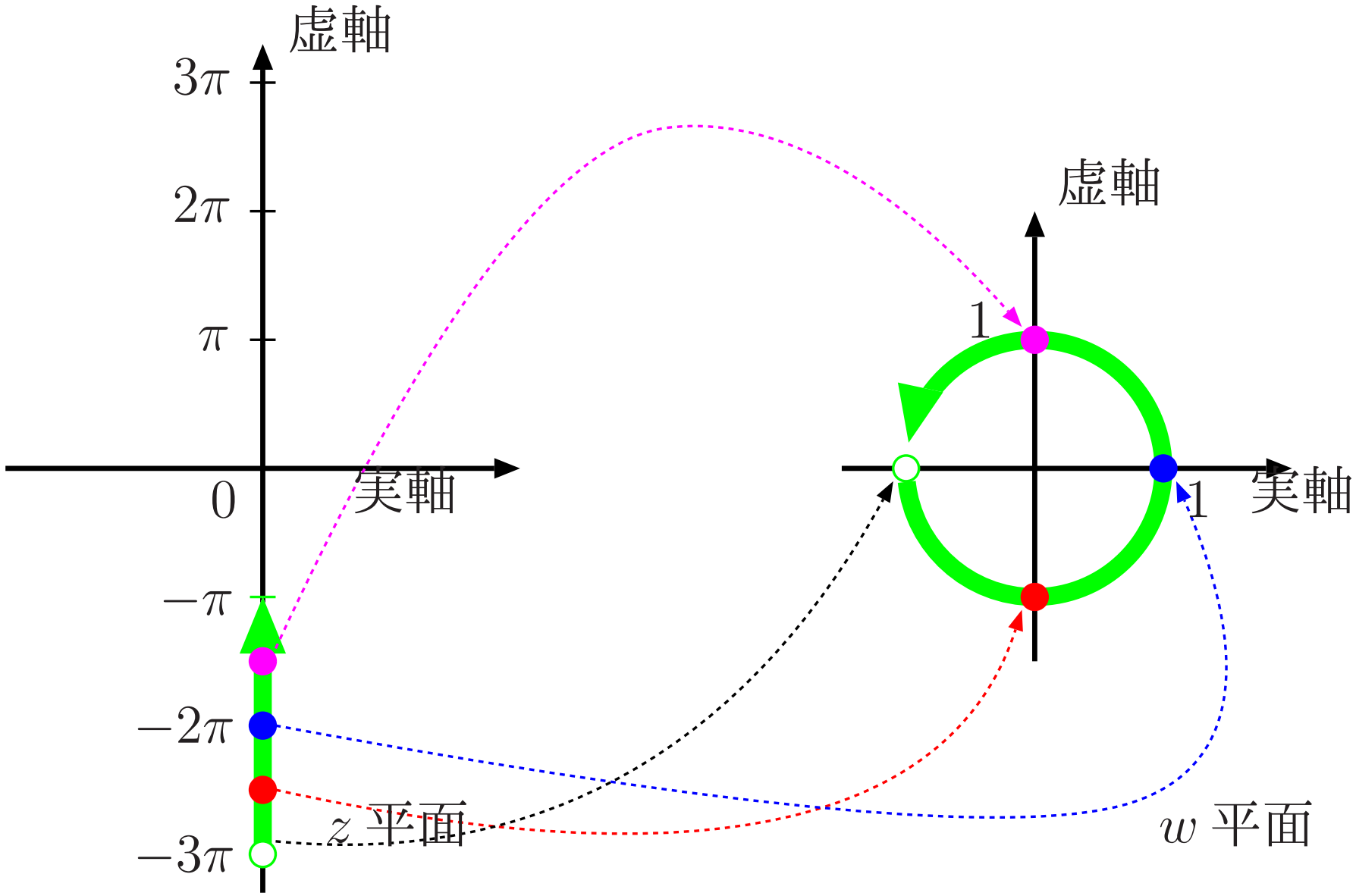
対数関数 (4)

- ここまでは良いのだが…
- e^z による虚軸の部分集合 $A_1 = \{x + iy : x = 0, \pi < y < 3\pi\}$ の像を考える.
- $z \in A_1$ なら $e^z = e^{0+iy} = e^0(\cos y + i \sin y) = (\cos y + i \sin y)$ だから, この像は単位円から -1 を除いたものに一致する.


虚軸
3π
2π
π
0
実軸
$-\pi$
-2π
-3π
z 平面
虚軸
1
1
実軸
w 平面

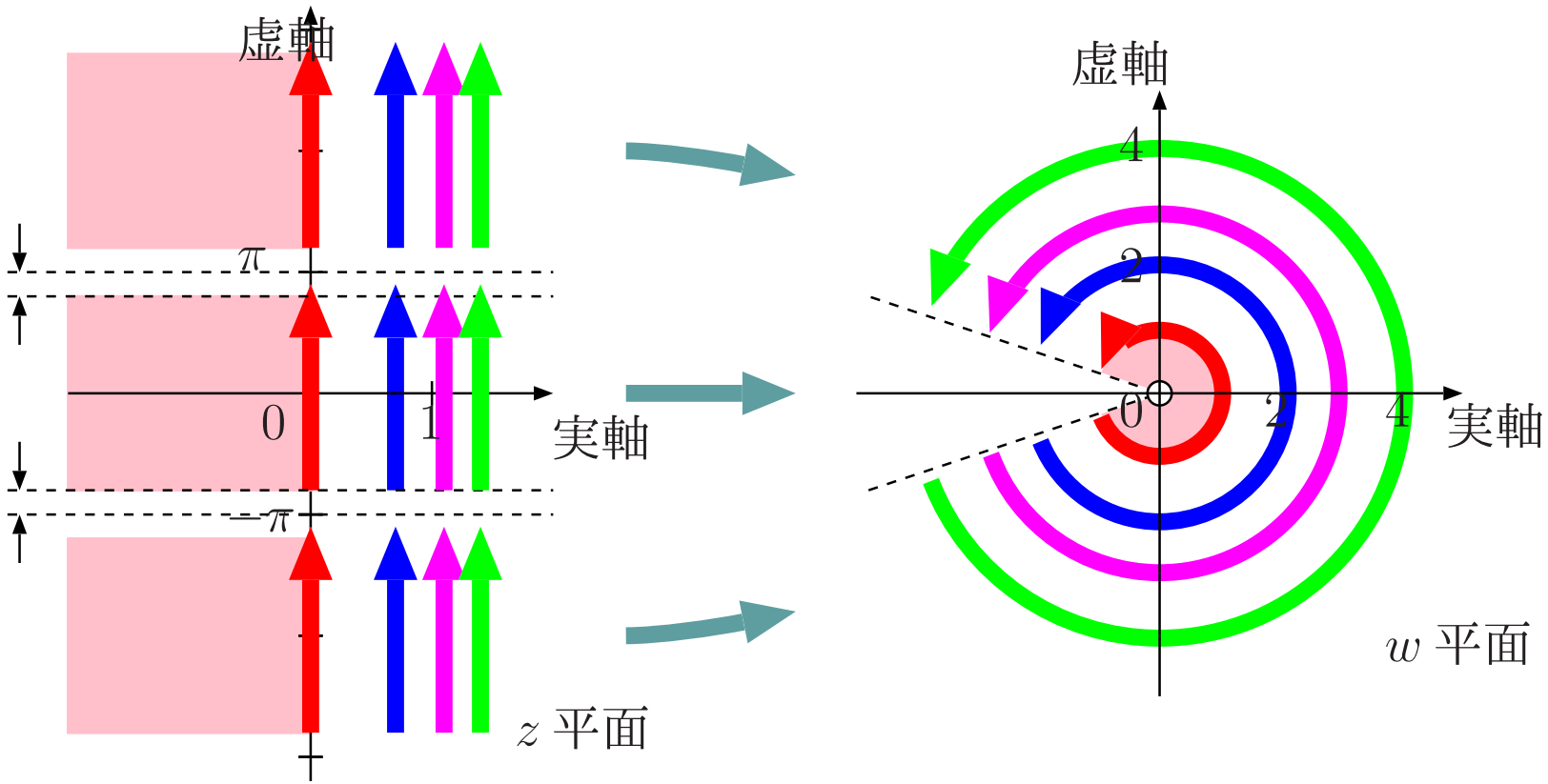
対数関数 (5)

- さらに…
- e^z による虚軸の部分集合 $A_{-1} = \{x+iy : x = 0, -3\pi < y < -\pi\}$ の像を考える.
- $z \in A_{-1}$ なら $e^z = e^{0+iy} = e^0(\cos y + i \sin y) = (\cos y + i \sin y)$ だから, この像は単位円から -1 を除いたものに一致する.


虚軸
3π
2π
π
0
実軸
$-\pi$
-2π
-3π
z 平面
虚軸
1
1
実軸
w 平面

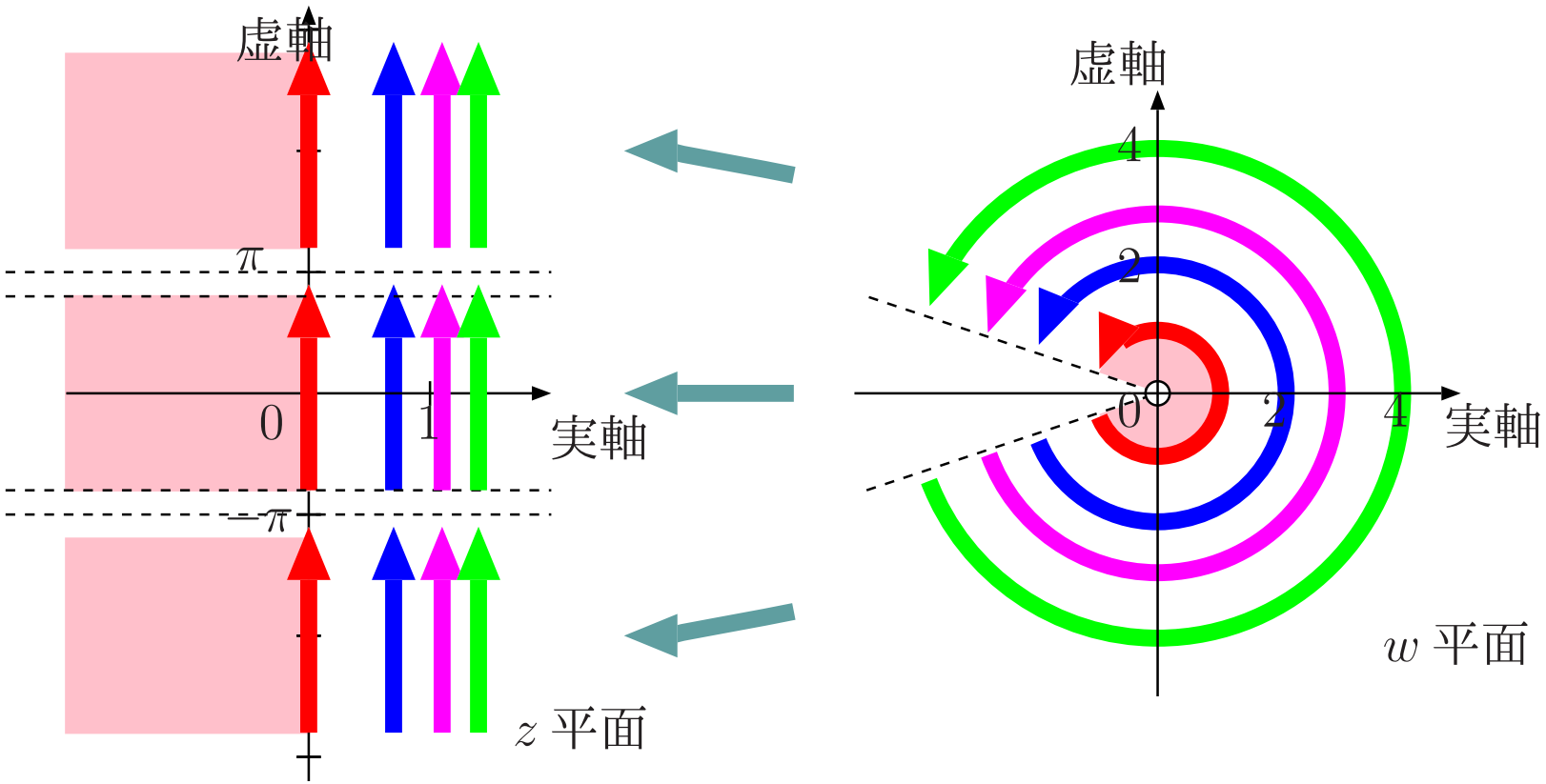
対数関数 (6)

- e^z の z 平面と w 平面の対応関係をもう少し詳しく見る (次のページの図)
- $z = x + iy$ とし, x を固定して y だけ動かすと, $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ は半径 e^x の円周上を動く
- z 平面と w 平面で同じ色の矢印が対応


虚軸
π
0
1
実軸
$-\pi$
z 平面
虚軸
4
2
0
2
4
実軸
w 平面

対数関数 (7)

- 逆関数を定めるということは z 平面と w 平面の対応関係を逆にすることだったから…
- 逆像は無数にある



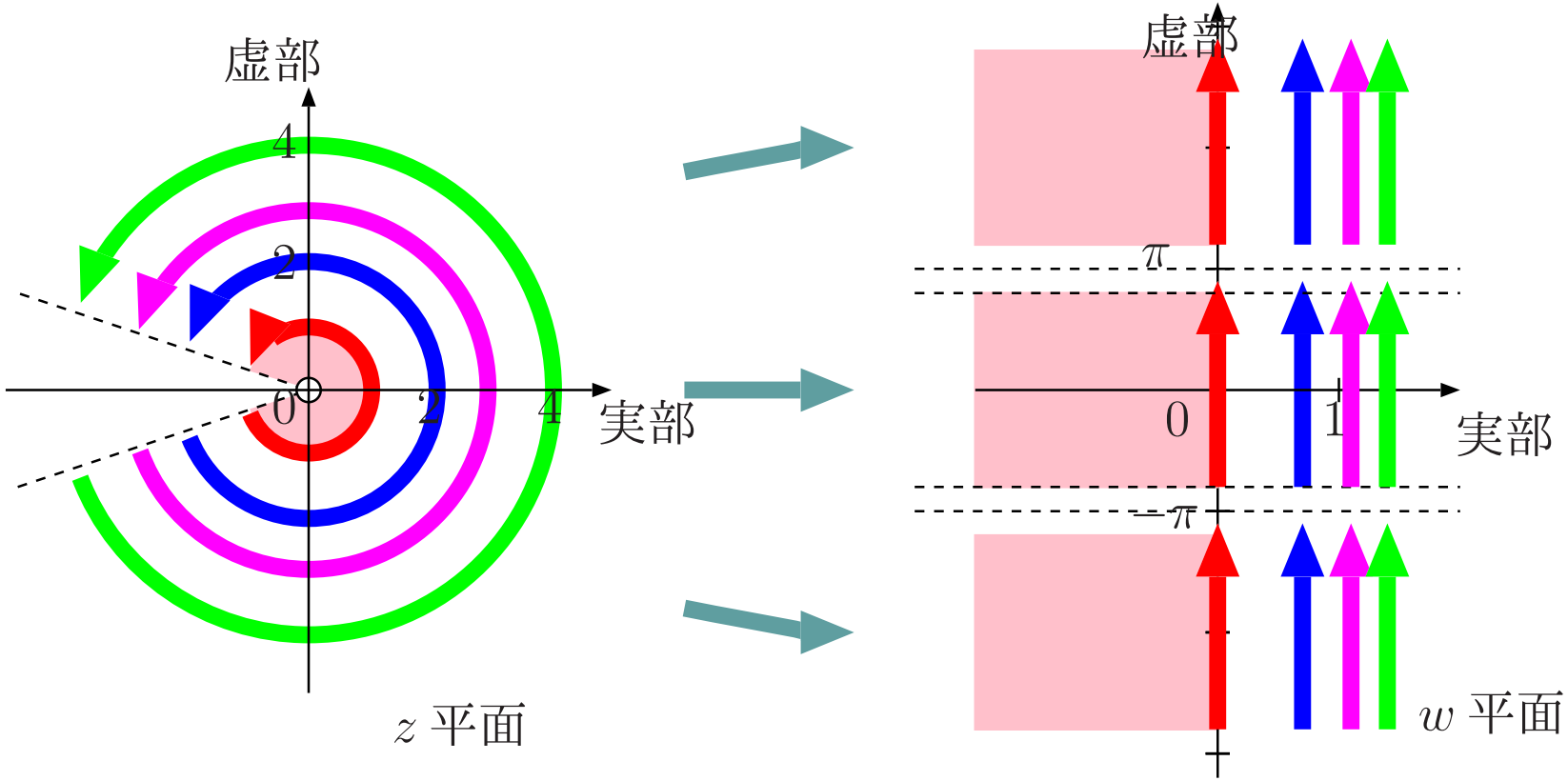
逆関数を一意的に定めることはできない

対数関数 (8)

これ以降は, 対数関数に関する議論をするとき, 教科書に合わせて,

- 定義域: z 平面
- 値域を w 平面

に変更する.


虚部
4
2
0
2
4
実部
z 平面
虚部
π
0
1
実部
−π
w 平面

対数関数 (9) (p.137)

定義 z に対応する関数値 $f(z)$ がただ一つ定まる関数を**一価関数**, 複数の値が対応する '関数' を**多価関数**という. z に対応する $f(z)$ の値が n 個ある場合には n **価関数**, 無限個ある場合には**無限多価関数**という.

- 多価関数は通常の意味の関数ではないので,「多価関数」という言葉は混乱のもとなのだが, すでに定着しているのでこの講義でも利用する.

- 複素変数の指数関数は無限対 1 の対応なので, その ‘逆関数’ としての対数関数は 1 対無限, すなわち無限多価関数になる.

対数関数 (10)

定義 $\log$ とは, z に $\{w \in \mathbb{C} : e^w = z\}$ という集合を対応させる多価関数である.

対数関数 (11) (p.137)

定義 実数 $x > 0$ の自然対数を $\ln x$ であらわす.

定理 4.16

- $\log z = \ln |z| + i \arg z$ と表せる.
- $z = re^{i\theta}$ とすると,
  $\log z = \ln r + i(\theta + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$ と表せる.

整数全体を…

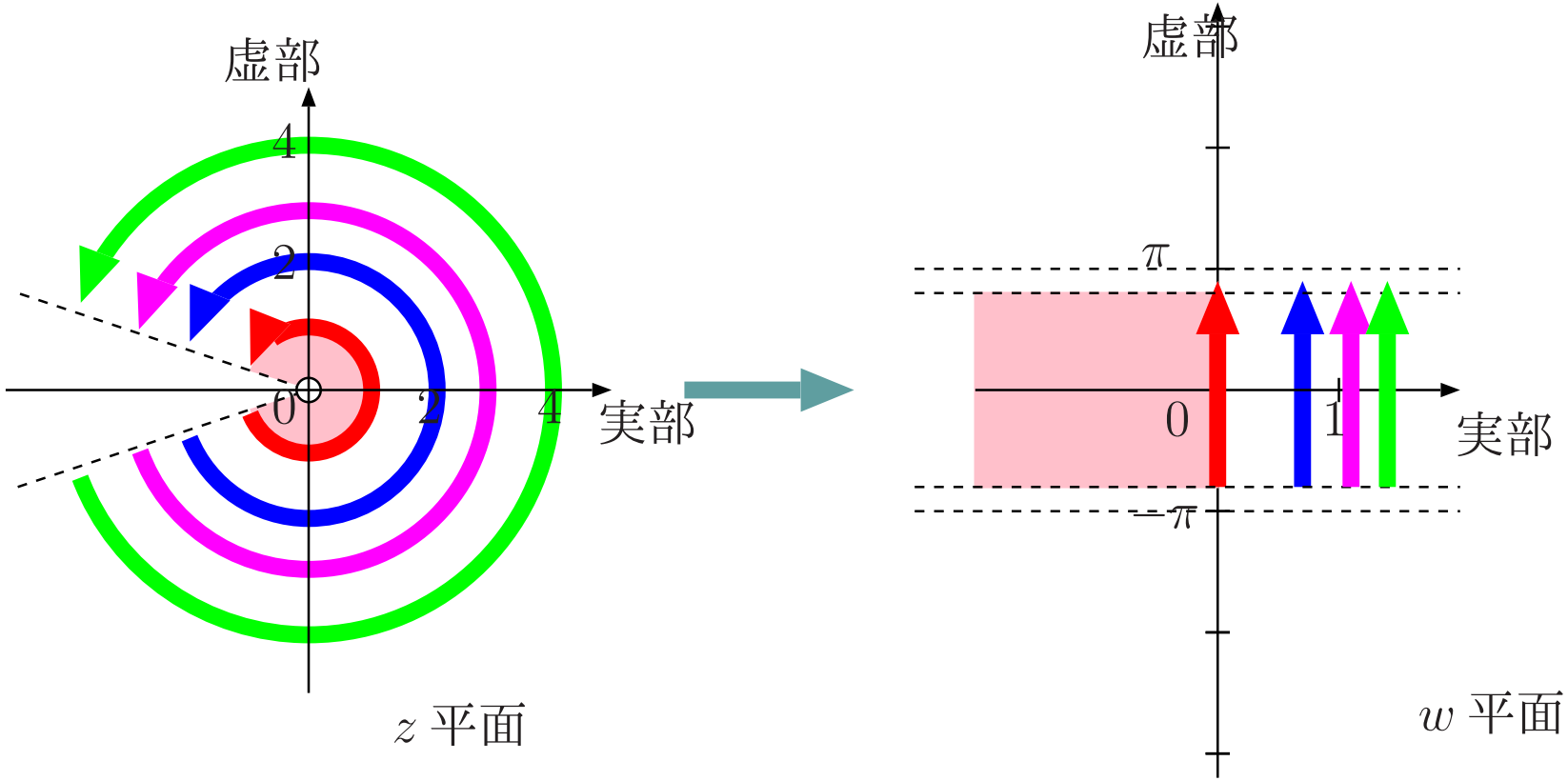
$$\mathbb{Z}$$

対数関数 (12) (p.139)

定義 4.13 対数関数の虚部を $(-\pi, \pi]$ の範囲に取ったものを対数関数の主値あるいは主枝といい, $\mathrm{Log}\, z$ であらわす. すなわち,

$$\mathrm{Log}\, z = \ln |z| + i\mathrm{Arg}\, z$$

である.



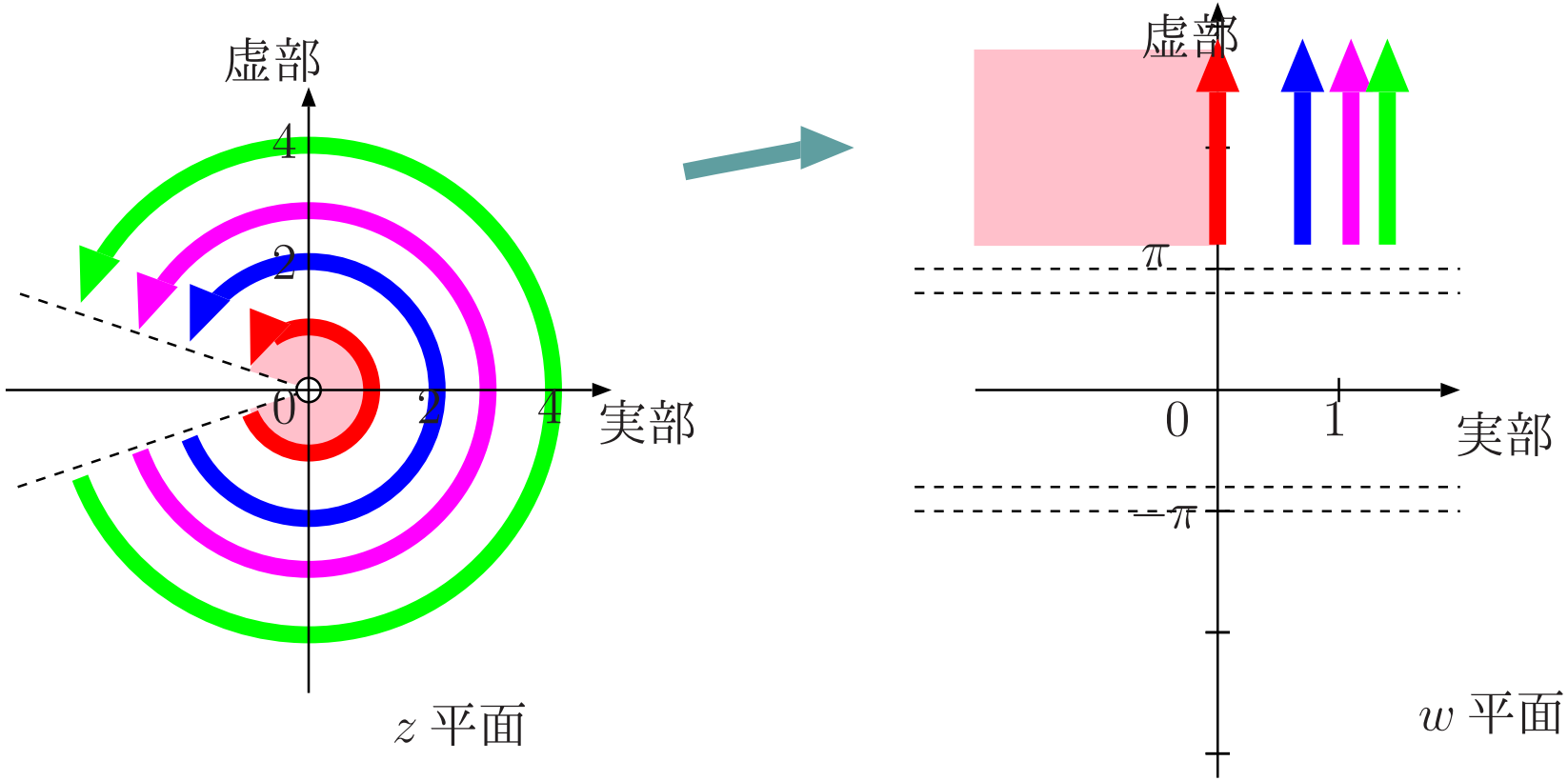
Log z(主値) はこの部分を選んでいる

対数関数 (13) (p.140)

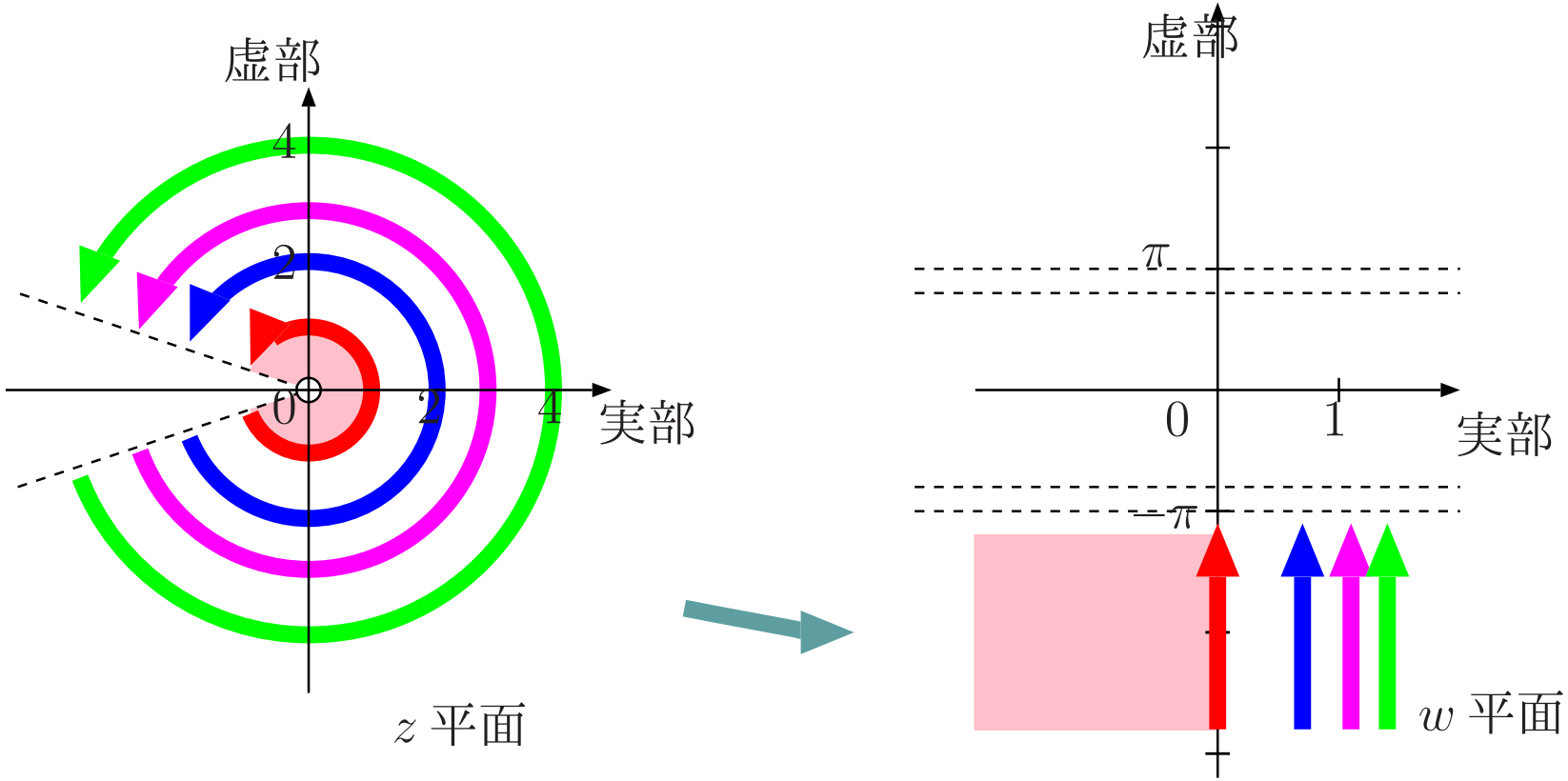
定義 4.13 対数関数の分枝とは, その値を

$$\ln|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2n\pi)$$

としたものである ($n \in \mathbb{Z}$).



$\log z$ の分枝には, こういう選び方もある

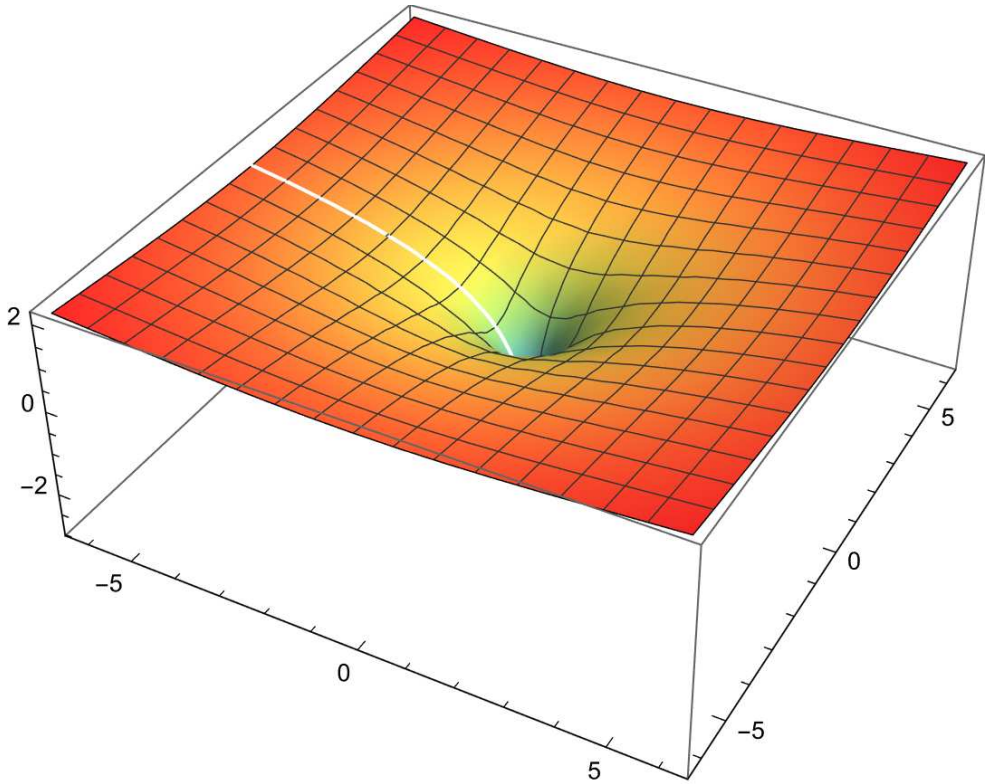


こういう選び方もある (選び方は無数)

- $x, y \in [-\pi, \pi]$ とし,

$$\log(x + iy)$$

の実部と虚部をプロットしたグラフを次ページに示す.



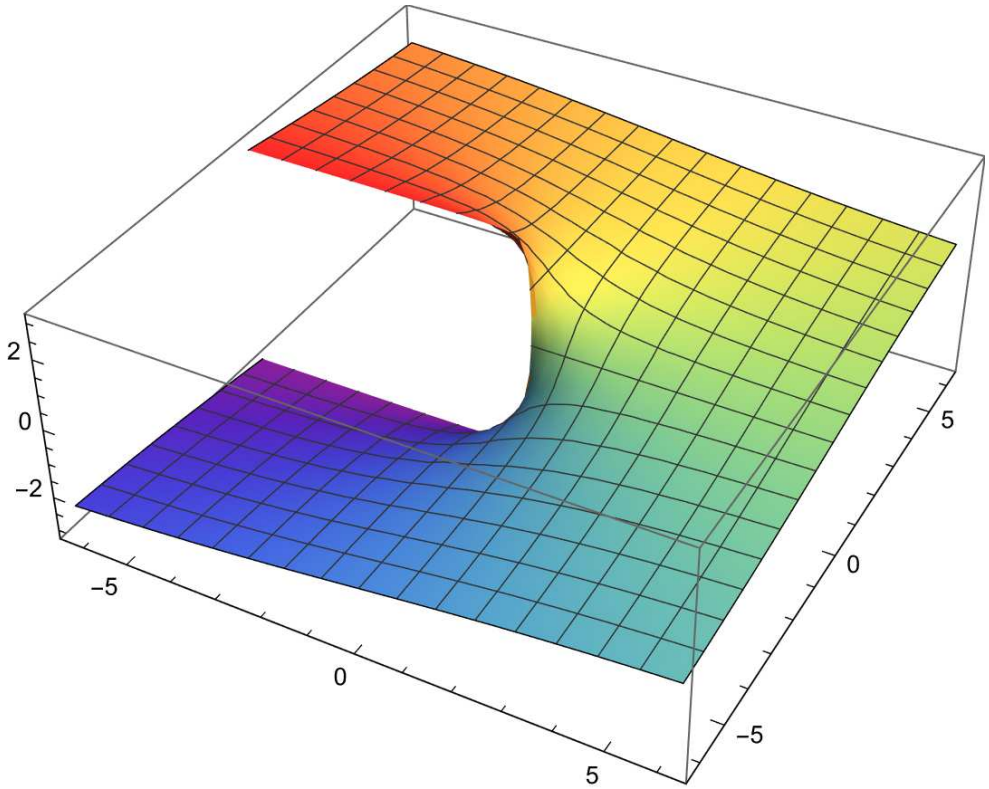
$\log(x+iy)$ の実部 $(x, y \in [-\pi, pi])$

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とすると, 実部の高さが

$$\ln r$$

になっていることが読み取れる.

- 偏角が $\pm\pi$ のとき対数関数は定義できないので, グラフに白線が入っている.



$\log(x+iy)$ の虚部 $(x, y \in [-\pi, \pi])$

- 虚部は偏角なので, 偏角が $\pm\pi$ のところでグラフが不連続になっている.

対数関数 (14) (p.140)

定理 4.17 $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し, 分枝を適当に選べば, 以下が成立する:

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2,$$

$$\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log z_1 - \log z_2$$

- 分枝を辻褄が合うように選ぶ; たとえば$\log z_1$と$\log(z_1 z_2)$が同じ分枝とは限らない
- 主値については定理 4.17 は成立しない (注意 4.9, p. 141)
- 定理 4.17 は多価関数として考えても成立するが (分枝に関する記述は不要), 新たに集合どうしの加減算を導入する必要があるので, この講義では取り上げない.

- 以下では対数関数の正則性について議論するが…
- 対数関数のどのような分枝を選んでも実軸上の $x \leq 0$ の部分で不連続性が発生する
- 対数関数の正則性について論ずるときには実軸上の $x \leq 0$ の部分を除いて考える

対数関数 (15) (p.144)

定理 4.18(1) 対数関数は $\mathbb{C}$ から実軸上の $x \leq 0$ の部分を除いた領域で正則で, どの分枝を選んでも

$$(\log z)' = \frac{1}{z}$$

である.

対数関数 (16) (p.144)

定理 4.18(2) したがって, 主値についても

$$(\mathrm{Log}\, z)' = \frac{1}{z}$$

である.

対数関数 (17) (p.146)

定理 4.19 整級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$$

は $|z| < 1$ で収束し, $\mathrm{Log}\,(1+z)$ に等しい.

一般のべき (p.148)

定義 4.15 複素数 α と $z \neq 0$ に対し, z の α 乗を

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \log z}$$

により定義する.

α が整数でないときには z^α は多価関数になるが，詳細は略す．興味がある者は教科書 pp. 148〜150 を参照せよ．