電 210 電気数学 IV
第 7 回
初等関数 (2)

前回の復習 (1)

指数関数の定義

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

三角関数の定義

$$\cos z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} z^{2m}$$

$$\sin z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{2m+1}$$

前回の復習 (2) 公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \text{(オイラーの公式)}$$

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z$$

前回の復習 (3) 公式

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

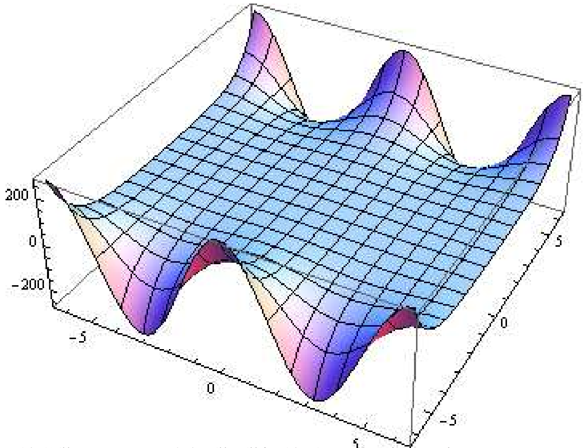
$$\left(e^{\alpha z}\right)' = \alpha e^{\alpha z}$$

前回の復習 (4) 公式

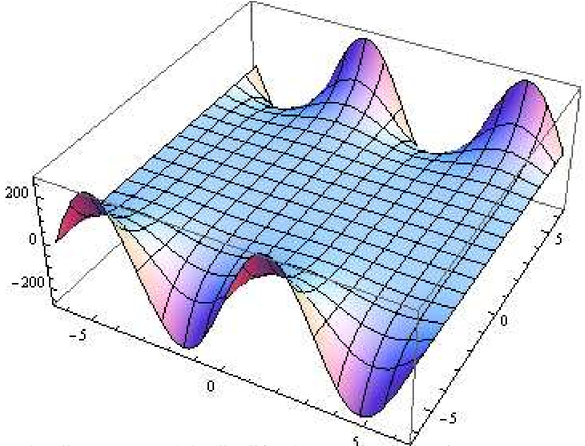
$$\cos(-z) = \cos z$$
$$\sin(-z) = -\sin z$$
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

- $\cos z$ と $\sin z$ $(z = x + iy)$ の挙動は, 実変数 (すなわち $y = 0$) の場合とかなり異なる

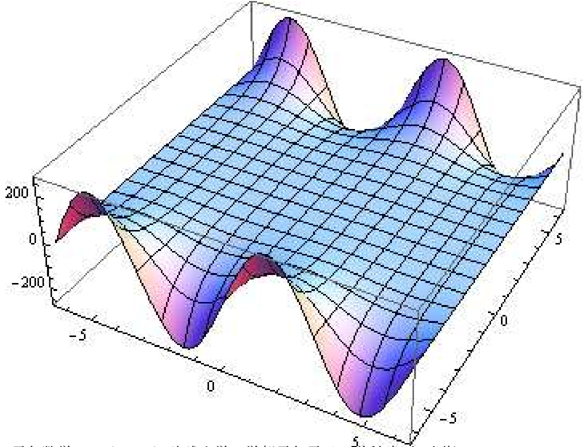
- 次のページに, x と y をともに $[-2\pi, 2\pi]$ の範囲で動かしたとの $\cos z$ と $\sin z$ の実部および虚部を描画したグラフを掲載する ((x, y) 平面が水平面で, 関数値が高さ方向 (縦軸) である. 縦軸の目盛りに注意してほしい.



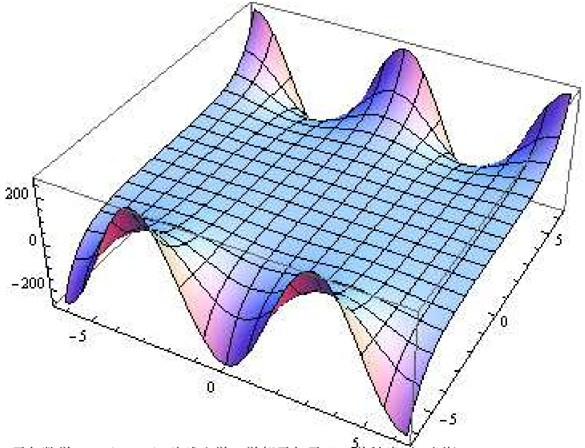
$\cos z$ の実部



$\cos z$ の虚部



$\sin z$ の実部



$\sin z$ の虚部

指数関数と三角関数 (p.125)

例 4.6(1) $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$ である.

理由

$$e^{x+iy} \underset{\text{指数関数の性質}}{=} e^x e^{iy} \underset{\text{オイラーの公式}}{=} e^x(\cos y + i\sin y)$$

三角関数の性質 (1) (p.131)

定理 4.15

$(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$

理由

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

を z について微分すればわかる.

三角関数の性質 (2) (p.134)

例 4.12(1)

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$$
$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$$

理由　p.134 の計算を追えばよい (各自で読んでおくこと).

三角関数の性質 (3) (p.134)

例 4.12(3) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

理由 p.134 の計算を追えばよい (各自で読んでおくこと).

演習 7-1

空欄を埋めよ.

演習 7-1 解答

$$
\begin{aligned}
e^{\ln 2 + i\frac{\pi}{3}} &= e^{\ln 2} e^{i\frac{\pi}{3}} \\
&= \boxed{2}\left(\cos\boxed{\frac{\pi}{3}} + i\sin\boxed{\frac{\pi}{3}}\right) \\
&= \boxed{1} + \boxed{\sqrt{3}}\,i
\end{aligned}
$$

演習 7-2

空欄を埋めよ.

演習 7-2 解答 (1)

$$\sin 3i = \frac{e^{i(\boxed{3i})} - e^{-i(\boxed{3i})}}{2i} = \frac{e^{\boxed{-3}} - e^{\boxed{3}}}{2i},$$

$e^3 \simeq 20$, $e^{-3} \simeq 0$ と近似すると $\sin 3i \simeq \boxed{0} + \boxed{10}i$

演習 7-2 解答 (2)

$$\cos(\pi + 3i) = \frac{e^{i(\boxed{\pi+3i})} + e^{-i(\boxed{\pi+3i})}}{2}$$

$$= \frac{e^{\boxed{-3}+\boxed{\pi}i} + e^{\boxed{3}+\boxed{-\pi}i}}{2}$$

演習 7-2 解答 (3)

オイラーの公式を使うと,

$$\begin{aligned}\cos(\pi + 3i) &= \frac{e^{\boxed{-3}}}{2}(\cos\boxed{\pi} + i\sin\boxed{\pi}) \\ &\quad + \frac{e^{\boxed{3}}}{2}(\cos\boxed{-\pi} + i\sin\boxed{-\pi})\end{aligned}$$

$e^3 \simeq 20$, $e^{-3} \simeq 0$ とすると

$$\cos(\pi + 3i) \simeq \boxed{-10} + \boxed{0}\,i$$

双曲線関数 (p.135)

定義 4.11 次式によって定義される関数を双曲線関数という.

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

- 双曲線関数の定義と例 4.8(2)(p.132) を見比べると, $\cos(iz) = \cosh z, \quad \sin(iz) = i \sinh z$ であることがわかる.

- このため, 双曲線関数は三角関数と類似した性質を持つ (pp. 135∼136, 各自で読んでおくこと).

演習 7-3

空欄を埋めよ.

演習 7-3 解答 (1)

$\cosh 3 = \frac{e^{\boxed{3}} + e^{\boxed{-3}}}{2} \simeq \boxed{10}$, $\sinh 3 = \frac{e^{\boxed{3}} - e^{\boxed{-3}}}{2} \simeq \boxed{10}$ (より正確には $\cosh 3 = 10.067662$, $\sinh 3 = 10.017875$)

演習 7-3 解答 (2)

$$
\begin{aligned}
&\cosh^2 3 - \sinh^2 3 \\
&= \left(\frac{e^{\boxed{3}} + e^{\boxed{-3}}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{\boxed{3}} - e^{\boxed{-3}}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(\boxed{e^6} + \boxed{2} + \boxed{e^{-6}}\right) - \frac{1}{4}\left(\boxed{e^6} + \boxed{-2} + \boxed{e^{-6}}\right) \\
&= \boxed{1}
\end{aligned}
$$

対数関数 (1)

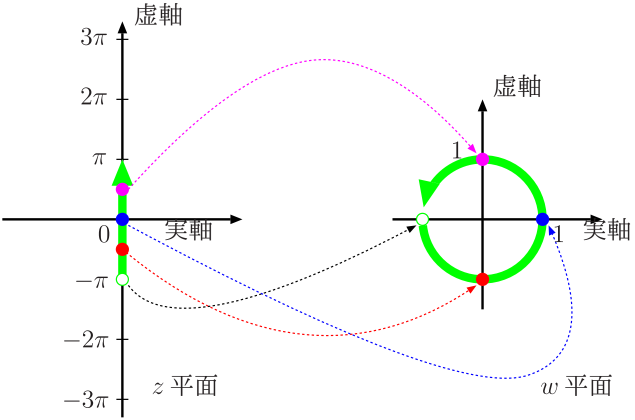
- 複素解析の分野では, 対数関数の定義にいくつかの流儀がある.
- 実変数の場合と同様に対数関数を指数関数の逆関数として定義したいのだが…

対数関数 (2)

- 実変数の指数関数は単射 (1 対 1 写像) なので, 逆関数が定義できる
- 複素変数の指数関数は単射ではないので, 逆関数がうまく定義できない

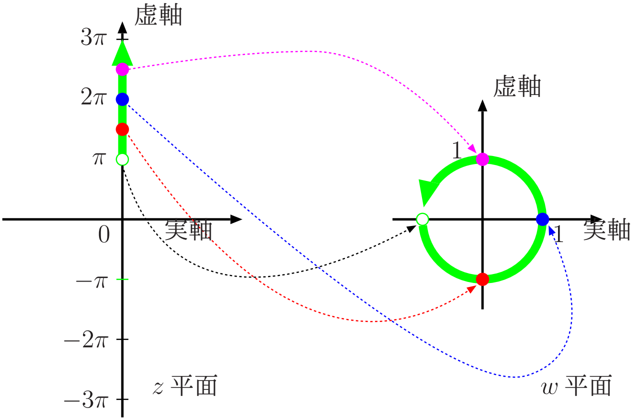
対数関数 (3)

- e^z による虚軸の部分集合 $A_0 = \{x + iy : x = 0, -\pi < y < \pi\}$ の像を考える.
- $z \in A_0$ なら $e^z = e^{0+iy} = e^0(\cos y + i \sin y) = (\cos y + i \sin y)$ だから, この像は単位円から -1 を除いたものに一致する.


虚軸
3π
2π
π
0
実軸
$-\pi$
-2π
-3π
z 平面
虚軸
1
1
実軸
w 平面

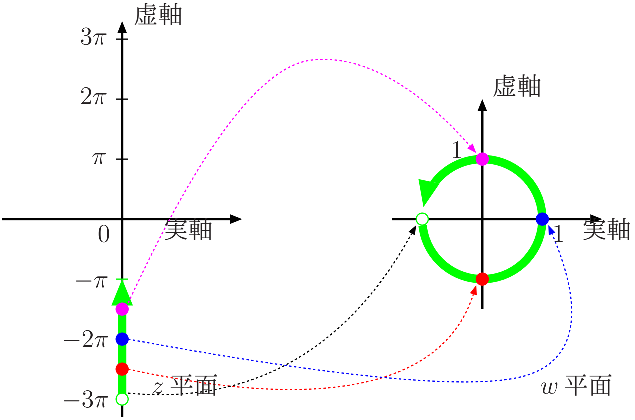
対数関数 (4)

- ここまでは良いのだが…
- e^z による虚軸の部分集合 $A_0 = \{x + iy : x = 0, \pi < y < 3\pi\}$ の像を考える.
- $z \in A_0$ なら $e^z = e^{0+iy} = e^0(\cos y + i \sin y) = (\cos y + i \sin y)$ だから, この像は単位円から -1 を除いたものに一致する.


虚軸
3π
2π
π
0
実軸
−π
−2π
−3π
z 平面
虚軸
1
1
実軸
w 平面

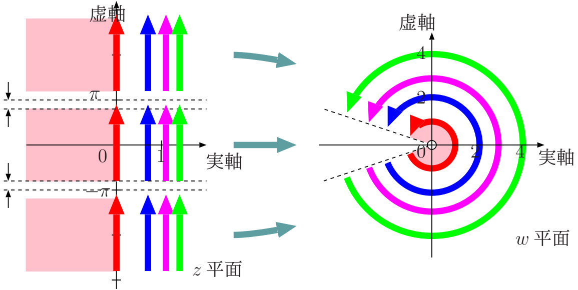
対数関数 (5)

- さらに…
- e^z による虚軸の部分集合 $A_0 = \{x + iy : x = 0, -3\pi < y < -\pi\}$ の像を考える.
- $z \in A_0$ なら $e^z = e^{0+iy} = e^0(\cos y + i \sin y) = (\cos y + i \sin y)$ だから, この像は単位円から -1 を除いたものに一致する.


虚軸
3π
2π
π
0
実軸
−π
−2π
−3π
z 平面
虚軸
1
実軸
1
w 平面

対数関数 (6)

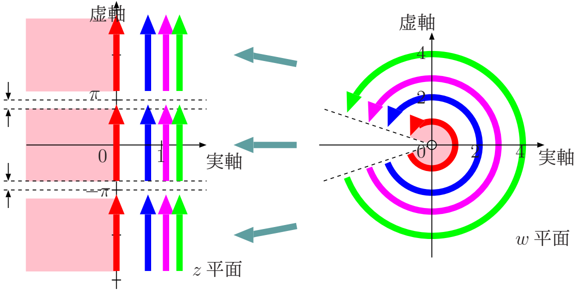
- e^z の z 平面と w 平面の対応関係をもう少し詳しく見る (次のページの図)
- $z = x + iy$ とし, x を固定して y だけ動かすと, $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ は半径 e^x の円周上を動く
- z 平面と w 平面で同じ色の矢印が対応



複素指数関数 e^z は多対一の対応

対数関数 (7)

- 逆関数を定めるということは z 平面と w 平面の対応関係を逆にすることだったから…
- 逆像は無数にある



逆関数を一意的に定めることはできない

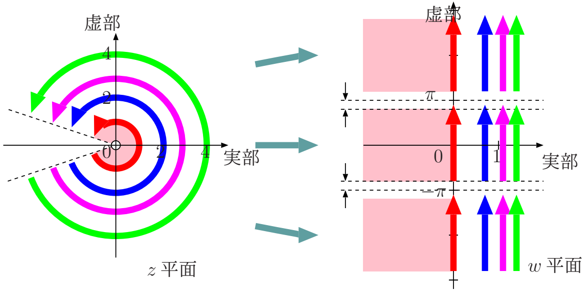
対数関数 (8)

これ以降は, 対数関数に関する議論をするとき, 教科書に合わせて,

定義域を z 平面

値域を w 平面

に変更する.


虚部
4
2
0
2
4
実部
z 平面
虚部
π
0
1
実部
$-\pi$
w 平面

対数関数 (9) (p.137)

定義　z に対応する関数値 $f(z)$ がただ一つ定まる関数を一価関数, 複数の値が対応する ‘関数’ を多価関数という. z に対応する $f(z)$ の値が n 個ある場合には n 価関数, 無限個ある場合には無限多価関数という.

- 多価関数は通常の意味の関数ではないので,「多価関数」という言葉は混乱のもとなのだが, すでに定着しているのでこの講義でも利用する.

- 複素変数の指数関数は無限対1の対応なので, その'逆関数'としての対数関数は1対無限, すなわち無限多価関数になる.

対数関数 (10)

定義 $\log$ とは, z に $\{w \in \mathbb{C} : e^w = z\}$ という集合を対応させる多価関数である.

- 教科書の記述 (定義 4.12(p.137)) は論理的に正しくないので注意せよ.

対数関数 (11) (p.137)

定義 実数$x > 0$の自然対数を$\ln x$であらわす.

定理 4.16 対数関数 $\log z$ は $\log z = \ln|z| + i\arg z$ と表せる. $z = re^{i\theta}$ なら $\log z = \ln r + i(\theta + 2n\pi),\ n \in \mathbb{Z}$ と表せる.

整数全体を…

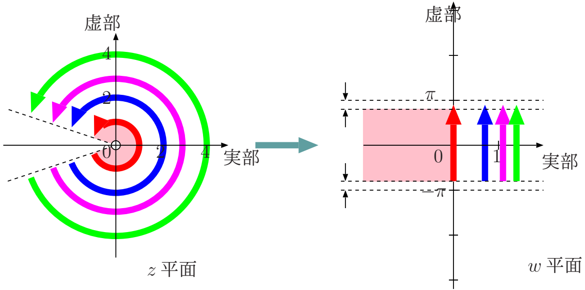
$$\mathbb{Z}$$

対数関数 (12) (p.139)

定義 4.13 対数関数の虚部を $(-\pi, \pi]$ の範囲に取ったものを対数関数の主値あるいは主枝といい, $\mathrm{Log}\, z$ であらわす. すなわち,

$$\mathrm{Log}\, z = \ln |z| + i\mathrm{Arg}\, z$$

である.



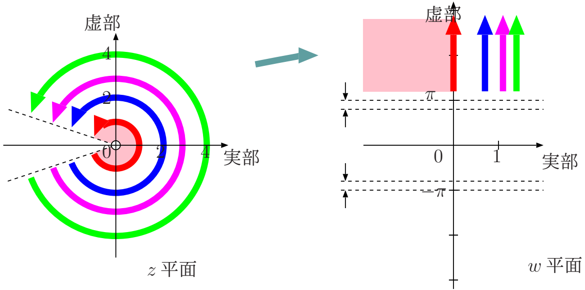
Log z(主値) はこの部分を選んでいる

対数関数 (13) (p.140)

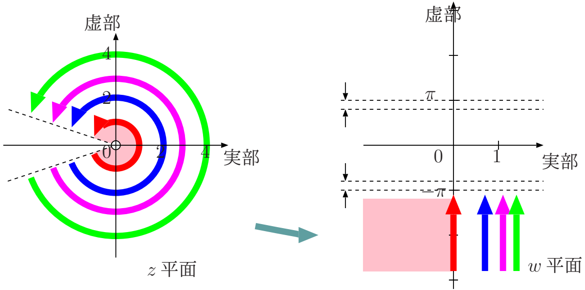
定義 4.13 対数関数の分枝とは, その値を

$$\ln|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2n\pi)$$

としたものである ($n \in \mathbb{Z}$).



log z の分枝には, こういう選び方もある



こういう選び方もある (選び方は無数)

対数関数 (14) (p.140)

定理 4.17 $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し, 分枝を適当に選べば, 以下が成立する:

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2,$$
$$\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log z_1 - \log z_2$$

- 分枝を辻褄が合うように選ぶ; たとえば $\log z_1$ と $\log(z_1 z_2)$ が同じ分枝とは限らない
- 主値については定理 4.17 は成立しない (注意 4.9, p. 141)
- 定理 4.17 は多価関数として考えても成立するが (分枝に関する記述は不要), 新たに集合どうしの加減算を導入する必要があるので, この講義では取り上げない.

- 以下では対数関数の正則性について議論するが…
- 対数関数のどのような分枝を選んでも実軸上の $x \leq 0$ の部分で不連続性が発生する
- 対数関数の正則性について論ずるときには実軸上の $x \leq 0$ の部分を除いて考える

対数関数 (15) (p.144)

定理 4.18(1) 対数関数は $\mathbb{C}$ から実軸上の $x \leq 0$ の部分を除いた領域で正則で, どの分枝を選んでも

$$(\log z)' = \frac{1}{z}$$

である.

対数関数 (16) (p.144)

定理 4.18(2) したがって, 主値についても

$$(\mathrm{Log}\, z)' = \frac{1}{z}$$

である.

対数関数 (17) (p.146)

定理 4.19 整級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$$

は $|z|<1$ で収束し, $\mathrm{Log}\,(1+z)$ に等しい.

一般のべき (p.148)

定義 4.15 複素数 α と $z \neq 0$ に対し, z の α 乗を

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \log z}$$

により定義する.

α が整数でないときには z^α は多価関数になるが，詳細は略す．興味がある者教科書 pp. 148∼150 を参照せよ．

演習 7-4

空欄を埋めよ.

演習 7-4 解答

$|i| = \boxed{1}$, $\mathrm{Arg}\, i = \boxed{\pi/2}$, $r = \boxed{1}$, $\theta = \boxed{\pi/2}$, $\log z = \ln r + i(\theta + 2n\pi)$ だから, $\log i = \boxed{0} + i\left(\boxed{\pi/2 + 2n\pi}\right)$ である.

演習 7-5

空欄を埋めよ.

演習 7-5 解答

$|e^4| = \boxed{e^4}$, $\mathrm{Arg}\, i = \boxed{0}$, $\arg i = \boxed{2n\pi}$ $(n \in \mathbb{Z})$, $e^4 = re^{i(\theta+2n\pi)}$ とすると $r = \boxed{e^4}$, $\theta = \boxed{0}$, $\log e^4 = \boxed{4} + i\left(\boxed{2n\pi}\right)$, $(n \in \mathbb{Z})$ であり, 一方 $\mathrm{Log}\, e^4 = \boxed{4} + i\left(\boxed{0}\right)$ である.