工業数学 IV 第 6 回
整級数・初等関数

- 複素数列は, 教科書の第 2 章で導入
- 講義では飛ばしていた
- 今回の講義は複素数列が必要になる
  $\Rightarrow$ 2 章と 4 章の内容を説明

整級数 (1)

定義 2.1 (p.47) 複素数の無限列 $c_0, c_1, \ldots$ を**複素数列**または **数列**といい, $\{c_n\}$ であらわす.

定義 2.5 (p.52) 複素数列 $\{c_n\}$ の形式的な無限和 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ を**複素級数**, **無限級数**あるいは**級数**という.

- 教科書では $\cdots$ 複素数列 $\{z_n\}$
- 講義では $\cdots$ 複素数列 $\{c_n\}$
- 整級数の部分と整合性を取るために記号を変更している

整級数 (2)

定義 4.1 (p.98) 複素数列 $\{c_n\}$ および複素数 z に対し, 形式的な無限和

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

を**整級数**または**べき級数**という.

整級数 (3)

定義 2.2 (p.48)　複素数列 $\{c_n\}$ が γ に収束するとは,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |c_n - \gamma| < \varepsilon$$

p となることをいう．収束しない複素数列は発散するという．

整級数 (4)

定義 2.6 (p.52)　複素級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ が収束するとは，部分和 $S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$ の作る数列が収束することをいう．この極限を複素級数の和といい，$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ であらわす．複素級数が収束しないときには発散するという．

複素級数が収束するとき, 級数とその和に同じ記号 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ を使う (混乱しやすいので注意).

整級数 (5)

定義 2.8 (p.54)

複素級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ が絶対収束するとは，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ が収束することをいう．

定理 2.6 (p.54)

絶対収束する級数は収束する．

- 絶対収束とは絶対値に関して収束するという意味
- 絶対に収束するという意味ではない (誤解しやすい用語なので注意).

整級数 (6)

定義　整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ が z_0 で収束するとは, z に z_0 を代入して得られる複素級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$ が収束することという.

整級数 (7) (p.98)

定理 4.1(1) 整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ が $z = z_0$ で収束するとき, $|z| < |z_0|$ をみたすすべての z に対し $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は絶対収束する.

整級数 (8) (p.98)

定理 4.1(2)　整級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ が $z = z_0$ で発散するとき, $|z| > |z_0|$ をみたすすべての z に対し $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は発散する.

- 数列 (級数) の収束について厳密に説明するには完備性という概念が必要
- 今日では, 完備性についてきちんと述べた微分積分学の教科書は非常に少ない
- 興味がある者は, 柳原 弘志, 織田 進, 数をとらえ直す, 裳華房, 2005 などを参照.

整級数 (9) (p.99)

定義 4.2(1) ある実数 $r > 0$ に対し，整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ が $|z| < r$ であれば収束し，$|z| > r$ であれば発散するとき，r をこの整級数の**収束半径**という．整級数がつねに収束する場合は収束半径は ∞，整級数が $z = 0$ 以外では収束しない場合は収束半径は 0 と定義する．

整級数 (10) (p.99)

定義 4.2(2) 整級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ の収束半径が r であるとき, 半径 r の開円板 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ をこの整級数の**収束円**という.

- 定理 4.2 は定理 4.1 を言い換えているだけなので略す.
- 整級数の収束半径を求めることは必ずしも易しくない. まず, 計算には使いやすいが, つねに使えるとは限らない方法を紹介する.

整級数 (10) (p.103)

定理 4.4 整級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = r$$

が存在するとき，この整級数の収束半径は r である.

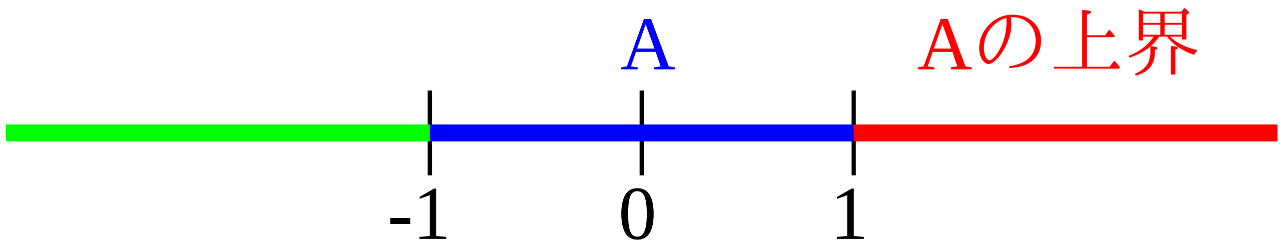
- 定理 4.4 において, $\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ が $n \to \infty$ としたとき無限大に発散する場合には, 収束半径は ∞ である.

- いつでも使える方法は繁雑で, 説明のために, いくつか定義が必要である.

整級数 (11) (p.100)

$\boxed{\textbf{定義 4.3(1)}}$ $A \subset \mathbb{R}$ が上に有界であるとは, $\exists a, \forall x \in A, x \leq a$ となることをいう．また, このとき a は A の上界であるという．

- A が上に有界であるとき，上界はたくさんある．たとえば，$A = (-1, 1)$ としたとき (開区間)，A の上界全体を集めると $[1, \infty)$ となる．



整級数 (11) (p.100)

定義 4.3(2) $A \subset \mathbb{R}$ が上に有界であるとき, A の上界の集合の最小元を A の**上限**といい, $\sup A$ で表す.

整級数 (12) (p.101)

定義 4.4 　実数の数列 $\{a_n\}$ に対し，$b_n = \sup_{k \geq n} a_k$ とし，第 n 項を b_n とする数列 $\{b_n\}$ を作ったとき，その極限を数列 $\{a_n\}$ の上極限といい，$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ あるいは $\limsup_{n\to\infty} a_n$ で表す．

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right)$$

整級数 (13)

定義 $A \subset \mathbb{R}$ が下に有界であるとは, $\exists d, \forall x \in A, x \geq d$ となることをいう. また, このとき d は A の下界であるという. A の下界の集合の最大限を A の下限といい, $\inf A$ で表す.

整級数 (12) (p.101)

定義 4.4 　実数の数列 $\{a_n\}$ に対し，$d_n = \inf_{k \geq n} a_k$ とし，第 n 項を d_n とする数列 $\{d_n\}$ を作ったとき，その極限を数列 $\{a_n\}$ の下極限といい，$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ あるいは $\liminf_{n\to\infty} a_n$ で表す．

$$
\begin{aligned}
\varliminf_{n\to\infty} a_n &= \liminf_{n\to\infty} a_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{k\geq n} a_k \right)
\end{aligned}
$$

整級数 (13) (p.101)

定理 4.3 　整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ の収束半径を r とすると, $\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}$ が零でなく有限のときには $r = \dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}}$ である. なお, $\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|} = 0$ のときは $r = \infty$, $\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|} = \infty$ のときは $r = 0$ と定める.

- 定理 4.3 を紹介するとき上極限が必要になるので定義を述べたが, この講義ではここでしか使わないので深入りしない
- 実数列が収束しない場合にも, 上極限および下極限は存在する
- 収束する実数列では上極限, 下極限, 極限はすべて一致する

- 整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ の収束半径が r であるとき, $|z| < r$ なら整級数は収束, $|z| > r$ であれば整級数は発散するが, $|z| = r$ のときにはいろいろな場合があり, 一般的なことは言えない.

- 教科書例 4.2(p.104) でこの現象が議論されているが, この講義の興味の対象ではないので取り上げない.

- 整級数は, 複素関数の微分および積分の理論と, 深く結び付いている
- 応用上重要な多くの複素関数は整級数によって定義される.
  - ▷ 指数関数, 三角関数, . . .

- 教科書では, 定理 4.8(整級数の項別微分) の説明のための準備にかなりのページが割かれているが, この講義では結果のみ紹介する.

整級数 (14) (p.112)

定理 4.8 整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ の収束半径が正であるとき (収束半径を r とする), 収束円 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ において $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ と定義すると, $f(z)$ は収束円において微分可能で, $f'(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ となる. また, 整級数 $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ の収束半径も r である.

- オイラーの公式を説明するときに使った指数関数の性質を述べるとき, 定理 4.8 を暗黙のうちに使っている.

- 定理 4.8 を繰り返し使うと, 整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ の各項を 1 回微分して作った整級数, 2 回微分して作った整級数, ... の収束半径はすべて同じで r であるということがいえる. よって, 整級数は収束円において何回でも微分できる.

初等関数

- 多項式によって定められる関数と指数関数および三角関数に関連した関数をまとめて初等関数と呼ぶ.
- 多項式 (すなわち有限級数) によって定められる関数と比較すると, 指数関数および三角関数に関連した関数には, 整級数 (無限級数) によって定義されるという特徴がある.

- 前ページの「関連した」という曖昧な言い回しの意味をもう少し明確にしておく.
- 初等関数という言葉の示す範囲には文献によって揺れがあるが, 多項式, 三角関数, 指数関数, あるいは対数関数に対して, (1) 加減乗除, (2) 関数の合成, (3) 代数方程式を解く, のいずれかの操作を有限回 (零回を含む) 施すことによって得られる関数を指すことが多い.

- なぜそれが「初等的なのか」と疑問を持つ者もいると思うが, 初等関数という言葉は英語 elementary function の訳であり, elementary を「初等」と直訳してしまったものだと思われる.

- 実は，英単語 elementary には「基本的」と「初等的」という異なる意味があり，elementary function に相応しいのは「基本的関数」であると思われるのだが，「初等関数」という言葉がすでに定着している．

指数関数 (p.122)

定義 4.9 整級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots$$

が定める関数を指数関数といい，e^z あるいは $\exp z$ で表す．

- 定理 4.4 により指数関数の収束半径を求める
- $r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ で, $c_n = 1/n!$ だから…
- $r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$
- よって, 指数関数の収束半径は無限大なので, 安心して項別微分等の計算ができる

定理 4.12 $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

これは第 2 回ですでに説明した.

定理 4.13 $(e^z)' = e^z$

定理 4.13 の証明 第 2 回で $\dfrac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$ であることを見たが, この事実を導くときには整級数の性質しか使っていなかったので, 実数 a と x を複素数 α と z に置き換えた等式 $\dfrac{d}{dz}e^{\alpha z} = \alpha e^{\alpha z}$ が成り立ち, $\alpha = 1$ とすると定理 4.13 が得られる.

オイラーの公式

第 2 回の講義では, 「$\theta = 0$ において点 $(1, 0)$ を出発し, 単位円上を周期 2π で運動している点が上から光を当てたとき x 軸に落とす影が $\cos\theta$, 真横から光を当てたとき y 軸に落とす影が $\sin\theta$」という高等学校の物理での三角関数の定義と指数関数の性質からオイラーの公式を導いた.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

- オイラーの公式 (オイラーの関係式とも呼ぶ)
- 複素解析ではこれだけは覚えて!

三角関数 (1)

- 三角関数という数学的な概念を定義するときに「円運動」という物理的な概念を用いるのは少し都合が悪い.

- 三角関数を数学的に定義するには, 整級数を使うのが標準的.

三角関数 (1)

三角関数をどう定義すれば良いかはオイラーの公式を見ればわかる:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(i\theta)^n$$

これらの実部と虚部が等しいことから, $\cos\theta$ および $\sin\theta$ の整級数による表現が出て来る.

三角関数 (2)

$i^2 = -1$ より,

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(i\theta)^n$$

の実部は偶数次のべきの項をまとめたもので, 虚部は奇数次の項をまとめたものである.

三角関数 (3)

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} &= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2m)!}(i\theta)^{2m} + \frac{1}{(2m+1)!}(i\theta)^{2m+1}\right) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^m}{(2m)!}\theta^{2m} + i\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\theta^{2m+1}\right)
\end{aligned}
$$

実部と虚部に分ければ実部が $\cos\theta$, 虚部が $\sin\theta$ だから…

三角関数 (4)

$$\cos\theta = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!}\theta^{2m}$$

$$\sin\theta = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\theta^{2m+1}$$

と定義すれば良いことがわかる (教科書 124 ページとは逆方向の説明)

三角関数 (5)

三角関数を以上のように整級数で定義したとき,

> 整級数を使って定義した三角関数は高等学校の物理で学んだ三角関数と同じものである (説明の仕方が違うだけ)

ということがオイラーの公式によって保証されていると考えることもできる.

三角関数 (6)

三角関数を整級数によって定義するなら変数を実数に限る必要はないので, 初めから変数を複素数として定義し直しておく．収束半径は指数関数と同じで ∞ である.

三角関数 (8) (p.130)

定義 4.10

$$\cos z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} z^{2m}$$

$$\sin z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{2m+1}$$

三角関数 (9)

$\cos z$ は偶数次の項のみから成る整級数, $\sin z$ は奇数次の項のみから成る整級数だから,

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z \tag{6-B}$$

である.

三角関数 (10)

変数 θ を z に書き換えただけなので, オイラーの公式と同じ形の公式が成り立つ.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad (\text{オイラーの公式})$$

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z \quad (\theta \text{ を } z \text{ に変える})$$

三角関数 (11)

$$
\begin{aligned}
e^{iz} &= \cos z + i \sin z \\
e^{i(-z)} &= \cos(-z) + i \sin(-z) \quad && (z \text{ を } -z \text{ に変更}) \\
&= \cos z - i \sin z && ((6\text{-B}) \text{ より}) \\
e^{i(-z)} &= e^{-iz}
\end{aligned}
$$

三角関数 (12)

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

第 1 式と第 2 式の両辺をそれぞれ加えて

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2 \cos z$$

両辺を 2 で割って右辺と左辺を入れ換えると

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad (\text{例 } 4.8(2), \text{ p.}132)$$

三角関数 (13)

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

第 1 式と第 2 式の両辺をそれぞれ引いて

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sin z$$

両辺を 2 で割って右辺と左辺を入れ換えると

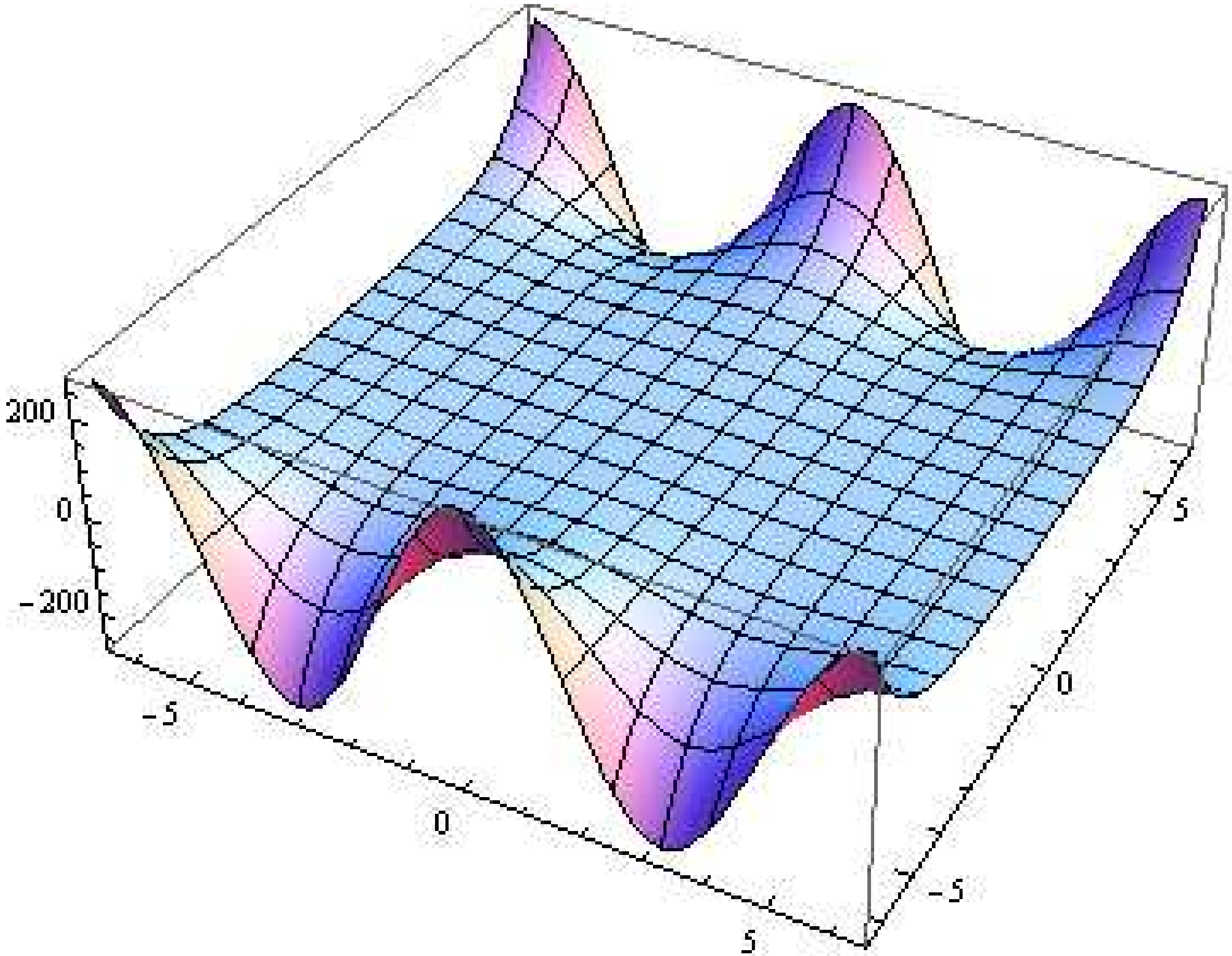
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \text{(例 4.8(2), p.132)}$$

三角関数 (14)

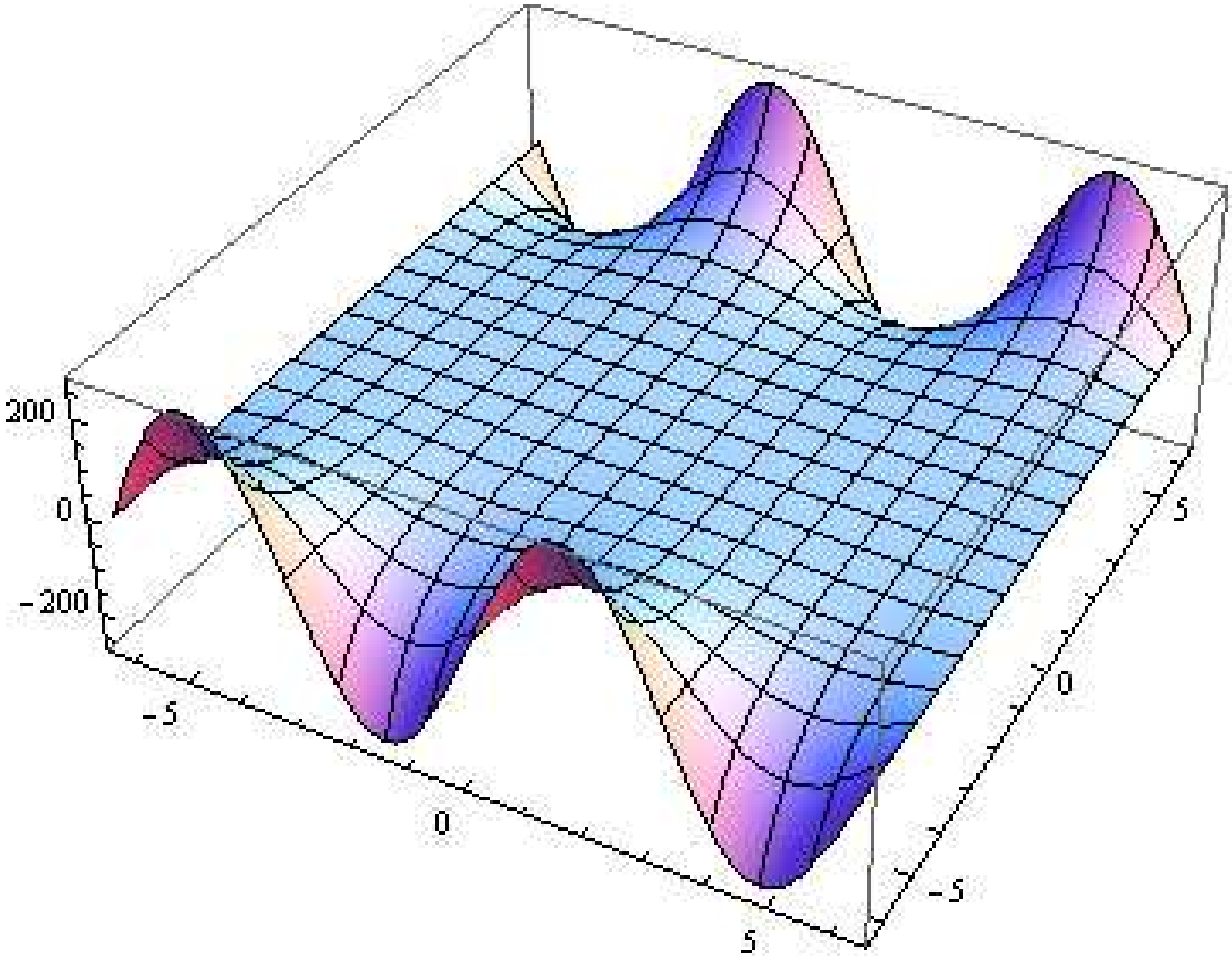
- 複素変数の三角関数の性質の多くは実変数の複素関数と同じだが, 振幅が 1 という性質は複素変数の場合は不成立.

- $\cos z$ と $\sin z$ $(z = x + iy)$ の挙動は, 実変数 (すなわち $y = 0$) の場合とかなり異なる

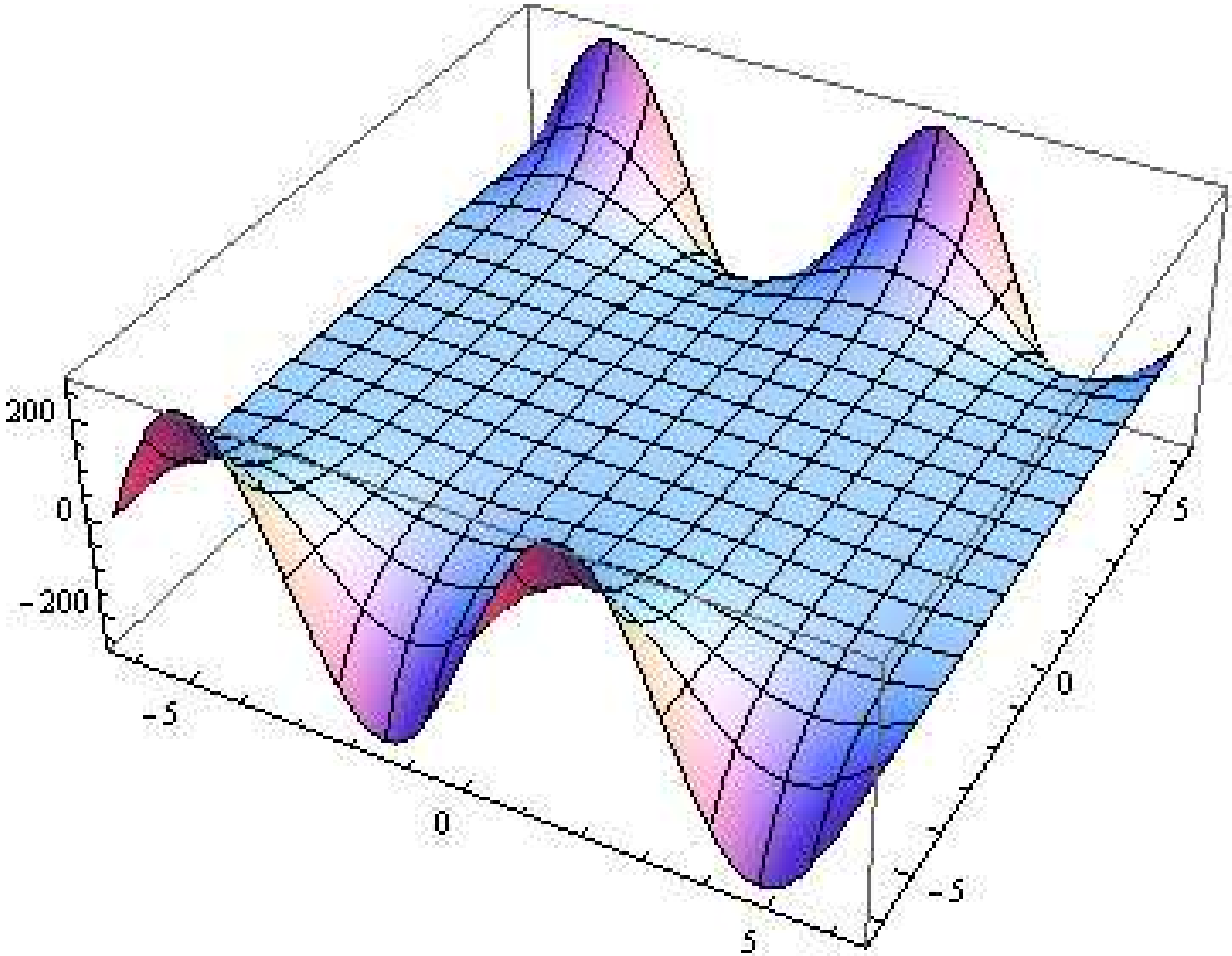
- 次ページに $\cos z$ と $\sin z$ の実部および虚部を描画したグラフ. 縦軸の目盛りに注意.



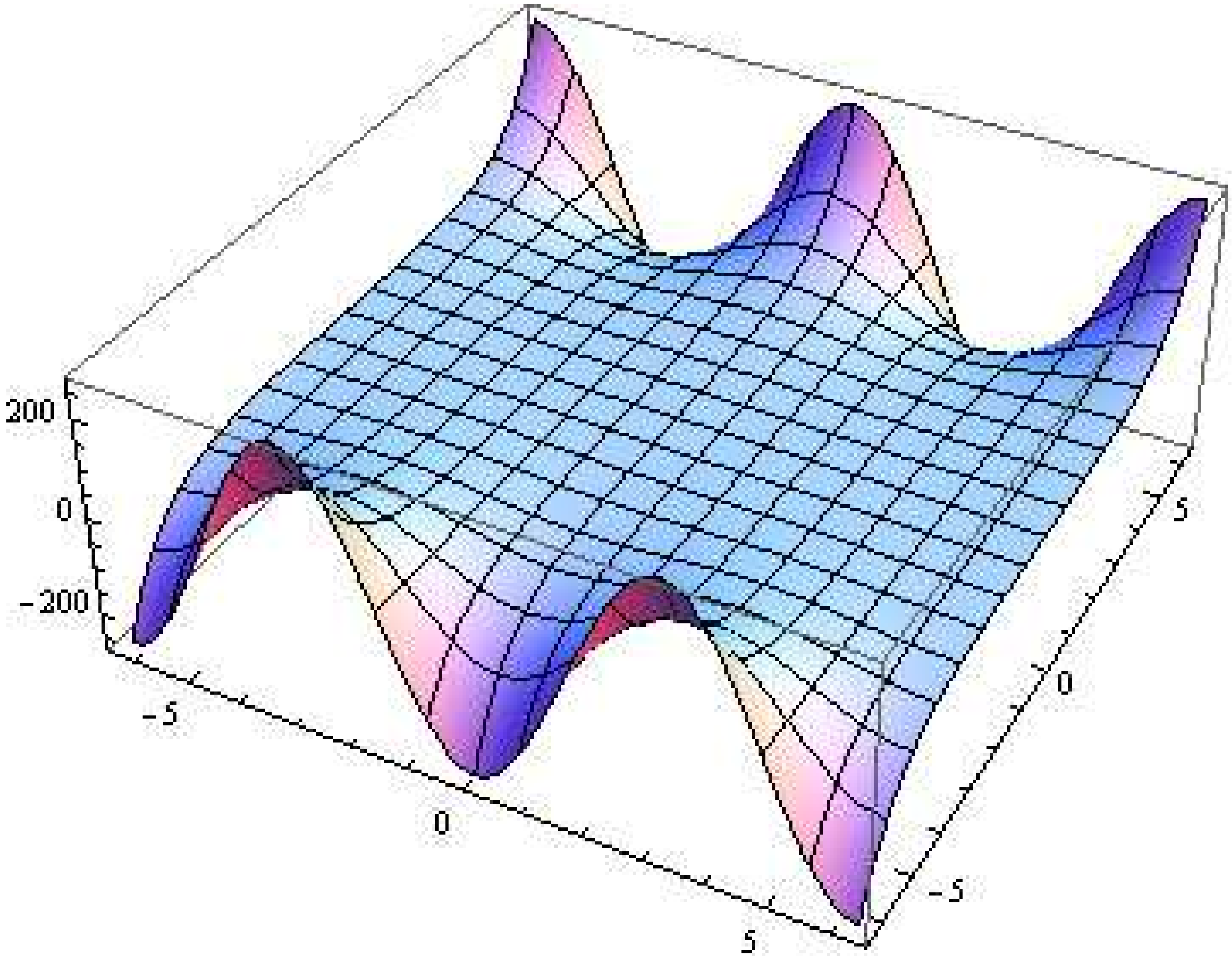
$\cos z$ の実部



$\cos z$ の虚部



$\sin z$ の実部



$\sin z$ の虚部

- $\cos z$ と $\sin z$ (ただし $z = x + iy$) はともに振動的な関数ではあるが, 振幅が 1 という性質は失われている.

- $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ であったから, $z = x + iy$ とすると,

$$\cos(x + iy) = \frac{e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y}}{2}$$

である.

- よって,

$$\mathrm{Re}\ \cos(x+iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}\cos x$$
$$\mathrm{Im}\ \cos(x+iy) = \frac{e^{-y} - e^y}{2}\sin x$$

- 上記から, $z = x + iy$ に対し, y を固定して x のみを動かしたとき, $\cos z$ の実部と虚部の振幅はそれぞれ

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad \left|\frac{e^{-y} - e^y}{2}\right|.$$

で振動することがわかる.

- $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ であったから, $z = x + iy$ とすると,

$$\sin(x+iy) = \frac{e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}}{2i}$$

である.

- よって,

$$\mathrm{Re}\,\sin(x+iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}\sin x$$

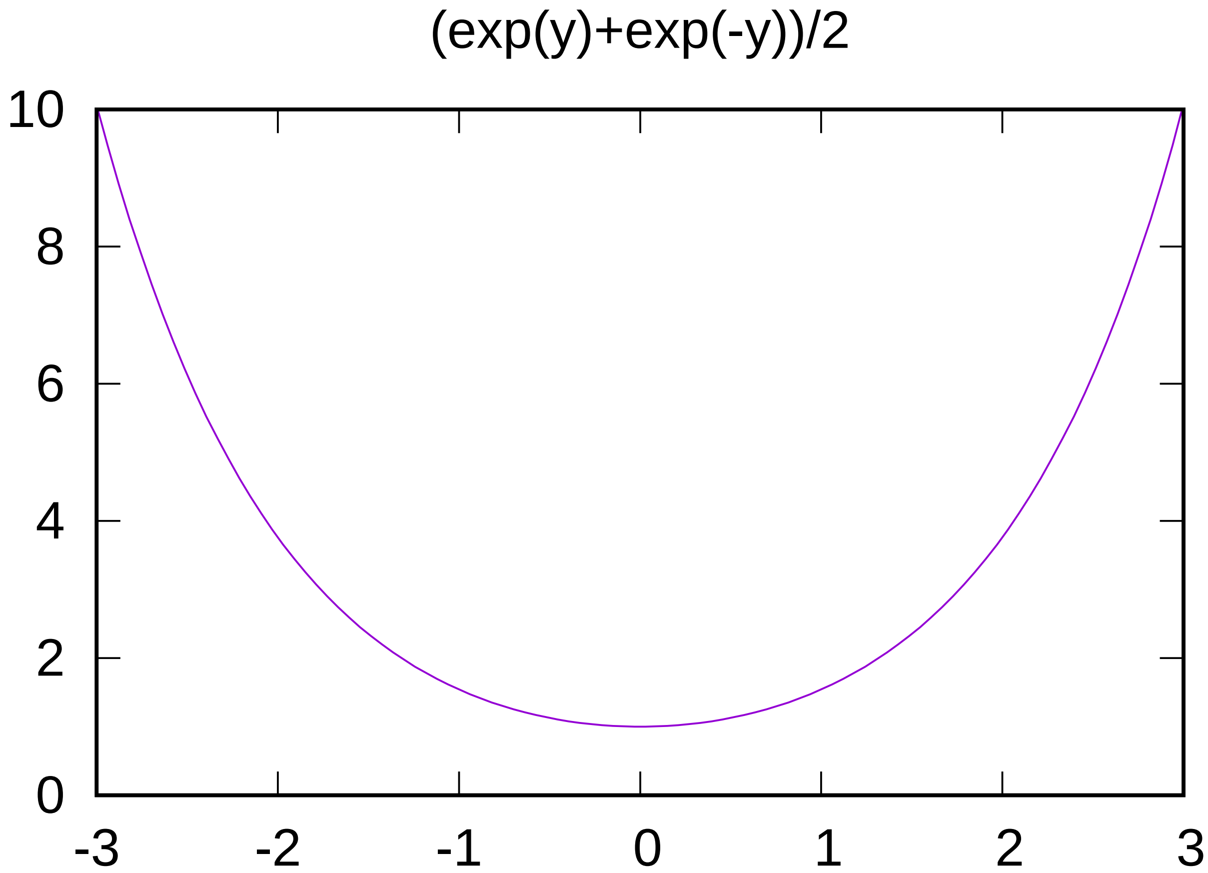
$$\mathrm{Im}\,\sin(x+iy) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}\cos x$$

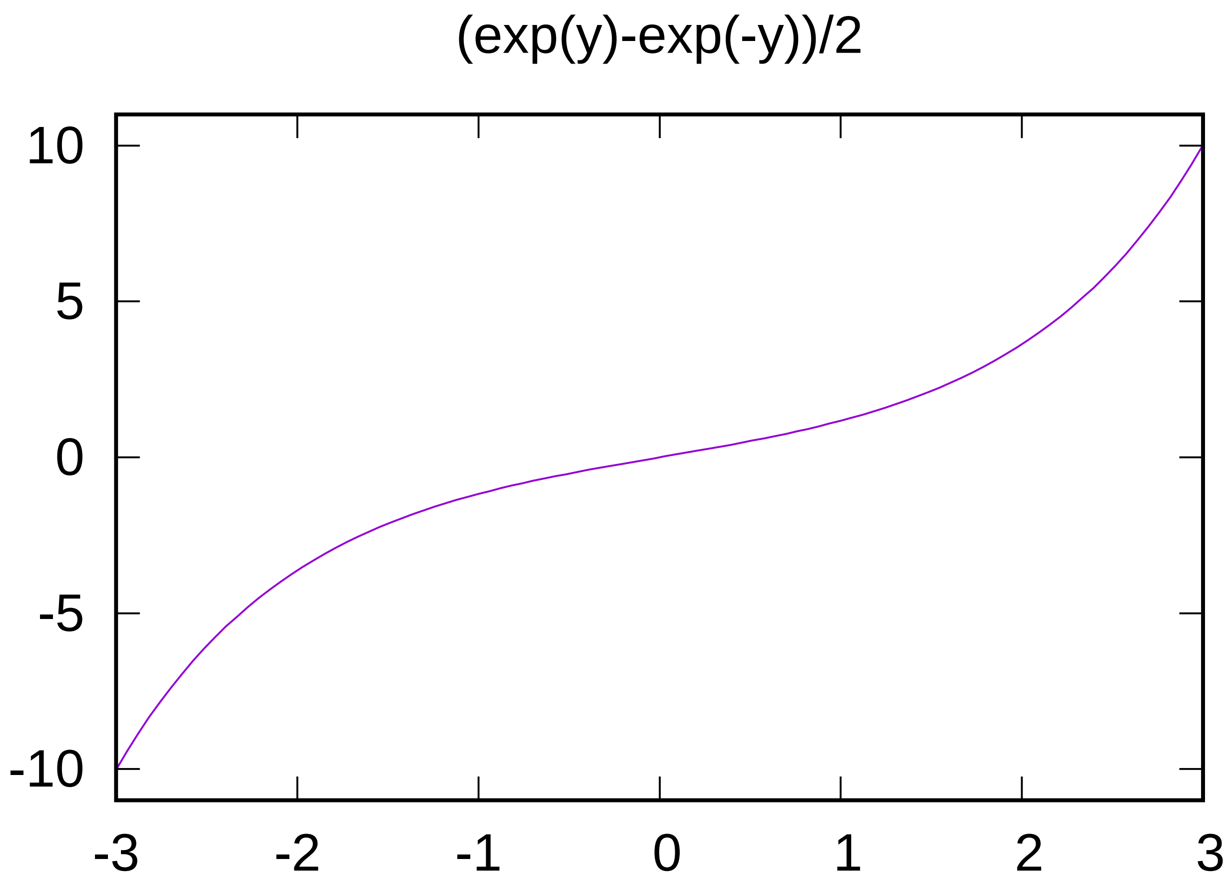
- 上記から, $z = x + iy$ に対し, y を固定して x のみを動かしたとき, $\sin z$ の実部と虚部の振幅はそれぞれ

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad \left|\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right|.$$

で振動することがわかる.

- 振幅を定める関数のグラフを次ページに示す.


(exp(y)+exp(-y))/2
10
8
6
4
2
0
-3
-2
-1
0
1
2
3


(exp(y)-exp(-y))/2
10
5
0
-5
-10
-3
-2
-1
0
1
2
3

- 以上から, $\cos z$ と $\sin z$ (ただし $z = x + iy$) において振幅が1という性質が失われる理由がわかる.

- 三角関数についてはまだ述べるべきことがあるが, 次回に回す.