工共 212 工業数学 IV
第 6 回
整級数, 初等関数 (1)

- 教科書では第 2 章で複素数列が導入されていたが，講義では (当面不要なので) 飛ばしていた
- 今回の講義では第 2 章で飛ばした複素数列が必要になるので，2 章と 4 章を行ったり来たりする

整級数 (1)

定義 2.1 (p.47)　複素数の無限列 $c_0, c_1, \ldots$ を**複素数列**または **数列**といい, $\{c_n\}$ であらわす.

定義 2.5 (p.52)　複素数列 $\{c_n\}$ の形式的な無限和 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ を**複素級数**, **無限級数**あるいは**級数**という.

教科書では複素数列に $\{z_n\}$ という記号が使われているが，この講義資料では，次に出て来る整級数と記号を合わせるため, 複素数列を $\{c_n\}$ と書いている.

整級数 (2)

定義 4.1 (p.98)　複素数列 $\{c_n\}$ および複素数 z に対し, 形式的な無限和 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ を整級数またはべき級数という.

整級数 (3)

定義 2.2 (p.48) 複素数列 $\{c_n\}$ が γ に収束するとは, $\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n \geq N, |c_n - \gamma| < \varepsilon$ となることをいう. 収束しない複素数列は発散するという.

整級数 (4)

定義 2.6 (p.52) 複素級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ が収束するとは, 部分和 $S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$ の作る数列が収束することをいう．この極限を複素級数の和といい, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ であらわす．複素級数が収束しないときには発散するという．

複素級数が収束するとき, 級数とその和に同じ記号 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ を使う (混乱しやすいので注意).

整級数 (5)

定義 2.8 (p.54) 複素級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ が絶対収束するとは, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ が収束することをいう.

定理 2.6 (p.54) 絶対収束する級数は収束する.

「絶対収束」とは「絶対値に関して収束する」の意味の熟語, 誤解しやすい用語なので注意(「絶対に収束する」という意味ではない)

整級数 (6)

定義　整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ が z_0 で収束するとは, z に z_0 を代入して得られる複素級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$ が収束することという.

整級数 (7) (p.98)

定理 4.1(1)　整級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ が $z = z_0$ で収束するとき, $|z| < |z_0|$ をみたすすべての z に対し $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は絶対収束する.

整級数 (8) (p.98)

定理 4.1(2) 整級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ が $z = z_0$ で発散するとき, $|z| > |z_0|$ をみたすすべての z に対し $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は発散する.

数列 (級数) の収束について厳密に説明するには「完備性」という概念が必要であるが, この講義の趣旨から外れるので取り扱わない. 興味がある者はたとえば 柳原 弘志, 織田 進, 数をとらえ直す, 裳華房, 2005 などを参照せよ.

整級数 (9) (p.99)

定義 4.2(1) ある実数 $r > 0$ に対し, 整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ が $|z| < r$ であれば収束し, $|z| > r$ であれば発散するとき, r をこの整級数の収束半径という. 整級数がつねに収束する場合は収束半径は ∞, 整級数が $z = 0$ 以外では収束しない場合は収束半径は 0 と定義する.

整級数 (10) (p.99)

定義 4.2(2) 整級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ の収束半径が r であるとき, 半径 r の開円板 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ をこの整級数の収束円という.

- 定理 4.2 は定理 4.1 を言い換えているだけなので略す.

- 整級数の収束半径を求めることは必ずしも易しくない. まず, 計算には使いやすいが, つねに使えるとは限らない方法を紹介する.

整級数 (10) (p.103)

定理 4.4 整級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = r$$

が存在するとき，この整級数の収束半径は r である.

- 定理 4.4 において, $\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ が $n \to \infty$ としたとき無限大に発散する場合には, 収束半径は ∞ である.

- いつでも使える方法は繁雑で, 説明のために, いくつか定義が必要である.

整級数 (11) (p.100)

定義 4.3(1) $A \subset \mathbb{R}$ が上に有界であるとは, $\exists a, \forall x \in A, x \leq a$ となることをいう. また, このとき a は A の上界であるという.

- 教科書では「A のどの数も a より小さい」となっているが, これは間違いで, $x \leq a$ が正しい.

- A が上に有界であるとき, 上界はたくさんある. たとえば, $A = (-1, 1)$ としたとき (開区間), A の上界全体を集めると $[1, \infty)$ となる.

整級数 (11) (p.100)

定義 4.3(2) $A \subset \mathbb{R}$ が上に有界であるとき, A の上界の集合の最小元を A の上限といい, $\sup A$ で表す.

整級数 (12) (p.101)

定義 4.4 実数の数列 $\{a_n\}$ に対し，$b_n = \sup_{k \geq n} a_k$ とし，第 n 項を b_n とする数列 $\{b_n\}$ を作ったとき，その極限を数列 $\{a_n\}$ の上極限といい，$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ あるいは $\limsup_{n\to\infty} a_n$ で表す．

$$
\begin{aligned}
\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n &= \limsup_{n\to\infty} a_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k\geq n} a_k \right)
\end{aligned}
$$

整級数 (13)

定義 $A \subset \mathbb{R}$ が下に有界であるとは, $\exists d, \forall x \in A, x \geq d$ となることをいう. また, このとき d は A の下界であるという. A の下界の集合の最大限を A の下限といい, $\inf A$ で表す.

整級数 (12) (p.101)

定義 4.4 実数の数列 $\{a_n\}$ に対し, $d_n = \inf_{k \geq n} a_k$ とし, 第 n 項を d_n とする数列 $\{d_n\}$ を作ったとき, その極限を数列 $\{a_n\}$ の下極限といい, $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ あるいは $\liminf_{n\to\infty} a_n$ で表す.

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{k\geq n} a_k \right)$$

整級数 (13) (p.101)

定理 4.3 整級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ の収束半径を r とすると，$\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}$ が零でなく有限のときには $r = \dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}}$ である．なお，$\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|} = 0$ のときは $r = \infty$，$\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|} = \infty$ のときは $r = 0$ と定める．

- 定理 4.3 を紹介するとき上極限が必要になるので定義を述べたが, この講義ではここでしか使わないので深入りしない
- 収束する数列では上極限, 下極限, 極限はすべて一致する
- 数列が収束しない場合にも, 上極限および下極限は存在する

- 整級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ の収束半径が r であるとき, $|z| < r$ なら整級数は収束, $|z| > r$ であれば整級数は発散するが, $|z| = r$ のときにはいろいろな場合があり, 一般的なことは言えない.
- 教科書例 4.2(p.104) でこの現象が議論されているが, この講義の興味の対象ではないので取り上げない.

- 整級数の収束について詳しく述べたのは, 重要な複素関数が整級数によって定義されるからである

- 教科書では, 定理 4.8(整級数の項別微分) の説明のための準備にかなりのページが割かれているが, この講義では結果のみ紹介する.

整級数 (14) (p.112)

定理 4.8 整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ の収束半径が正であるとき (収束半径を r とする), 収束円 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ において $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ と定義すると, $f(z)$ は収束円において微分可能で, $f'(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ となる. また, 整級数 $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ の収束半径も r である.

- オイラーの公式を説明するときに使った指数関数の性質を述べるとき, 定理 4.8 を暗黙のうちに使っている.
- 定理 4.8 を繰り返し使うと, 整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ の各項を 1 回微分して作った整級数, 2 回微分して作った整級数, ... の収束半径はすべて同じで r であるということがいえる. よって, 整級数は収束円において何回でも微分できる.

演習 6-1

空欄を埋めよ.

演習 6-1 解答 (1)

$c_0 = \boxed{1}$, $c_1 = \boxed{1}$, $\ldots$, $c_n = \boxed{1}$, $c_{n+1} = \boxed{1}$,

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{1}} = \boxed{1},\ \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = \boxed{1},\ r = \boxed{1}.$$

$$(1-z)f(z) = \boxed{1},\ f(z) = \frac{\boxed{1}}{\boxed{1-z}}.$$

演習 6-1 解答 (2)

$$c_0 = \boxed{1/0!},\ c_1 = \boxed{1/1!},\ \ldots,$$

$$c_n = \boxed{1/n!},\ c_{n+1} = \boxed{1/(n+1)!},$$

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{\boxed{(n+1)!}}{\boxed{n!}} = \boxed{n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = \boxed{\infty},\ r = \boxed{\infty}.$$

初等関数 (1-1) (p.122)

定義 4.9 整級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots$$

が定める関数を**指数関数**といい，e^z あるいは $\exp z$ で表す.

- 定理 4.4 により指数関数の収束半径を求める
- $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ で, $c_n = 1/n!$ だから···
- $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$
- よって, 指数関数の収束半径は無限大なので, 安心して項別微分等の計算ができる

初等関数 (1-2) (p.122)

定理 4.12 $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

これは第 2 回ですでに説明した.

初等関数 (1-3) (p.122)

定理 4.13 $(e^z)' = e^z$

定理 4.13 の証明　第 2 回で $\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$ であることを見たが, この事実を導くときには整級数の性質しか使っていなかったので, 実数 a と x を複素数 α と ζ に置き換えた等式 $\frac{d}{dz}e^{\alpha z} = \alpha e^{\alpha z}$ が成り立ち, $\alpha = 1$ とすると定理 4.13 が得られる.

オイラーの公式

第 2 回の講義では,「$\theta = 0$ において点 $(1, 0)$ を出発し, 単位円上を周期 2π で運動している点が上から光を当てたとき x 軸に落とす影が $\cos\theta$, 真横から光を当てたとき y 軸に落とす影が $\sin\theta$」という高等学校の物理での三角関数の定義と指数関数の性質からオイラーの公式を導いた.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

- オイラーの公式 (オイラーの関係式とも呼ぶ)
- 複素解析ではこれだけは覚えて!

三角関数 (1)

- 三角関数という数学的な概念を定義するときに「円運動」という物理的な概念を用いるのは少し都合が悪い.
- 三角関数を数学的に定義するには, 整級数を使うのが標準的.

三角関数 (1)

三角関数をどう定義すれば良いかはオイラーの公式を見ればわかる:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(i\theta)^n$$

これらの実部と虚部が等しいことから, $\cos\theta$ および $\sin\theta$ の整級数による表現が出て来る.

三角関数 (2)

$i^2 = -1$ より,

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(i\theta)^n$$

の実部は偶数次のべきの項をまとめたもので, 虚部は奇数次の項をまとめたものである.

三角関数 (3)

$$e^{i\theta} = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2m)!}(i\theta)^{2m} + \frac{1}{(2m+1)!}(i\theta)^{2m+1}\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^m}{(2m)!}\theta^{2m} + i\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\theta^{2m+1}\right)$$

実部と虚部に分ければ実部が $\cos\theta$, 虚部が $\sin\theta$ だから…

三角関数 (4)

$$\cos\theta = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!}\theta^{2m}$$

$$\sin\theta = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\theta^{2m+1}$$

と定義すれば良いことがわかる (教科書 124 ページとは逆方向の説明)

三角関数 (5)

三角関数を以上のように整級数で定義したとき,

> 整級数を使って定義した三角関数は高等学校の物理で学んだ三角関数と同じものである (説明の仕方が違うだけ)

ということがオイラーの公式によって保証されていると考えることもできる.

三角関数 (6)

三角関数を整級数によって定義するなら変数を実数に限る必要はないので, 初めから変数を複素数として定義し直しておく．収束半径は指数関数と同じで ∞ である．

三角関数 (8) (p.130)

定義 4.10

$$\cos z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} z^{2m}$$

$$\sin z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{2m+1}$$

三角関数 (9)

$\cos z$ は偶数次の項のみから成る整級数, $\sin z$ は奇数次の項のみから成る整級数だから,

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z \qquad \text{(6-B)}$$

である.

三角関数 (10)

変数 θ を z に書き換えただけなので, オイラーの公式と同じ形の公式が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \quad (\text{オイラーの公式}) \\
e^{iz} &= \cos z + i\sin z \quad (\theta \text{ を } z \text{ に変える})
\end{aligned}
$$

三角関数 (11)

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \qquad (例\ 4.8(1),p.132)$$

三角関数 (12)

$$
\begin{aligned}
e^{iz} &= \cos z + i \sin z \\
e^{i(-z)} &= \cos(-z) + i \sin(-z) \quad & (z \text{ を } -z \text{ に変更}) \\
&= \cos z - i \sin z \quad & ((6\text{-B}) \text{ より}) \\
e^{i(-z)} &= e^{-iz}
\end{aligned}
$$

三角関数 (13)

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

第 1 式と第 2 式の両辺をそれぞれ加えて

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2 \cos z$$

両辺を 2 で割って右辺と左辺を入れ換えると

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad (例 4.8(2), p.132)$$

三角関数 (14)

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

第 1 式と第 2 式の両辺をそれぞれ引いて

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sin z$$

両辺を 2 で割って右辺と左辺を入れ換えると

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad (例 4.8(2), p.132)$$

演習 6-2

空欄を埋めよ.

演習 6-2 解答

$e^{i(i)} = e^{\boxed{-1}}$, $e^{i(-i)} = e^{\boxed{1}}$,

$$\cos i = \frac{e^{i(i)} + e^{-i(i)}}{2} = \frac{\boxed{e^{-1} + e}}{2}$$

- 複素変数の三角関数の性質は実変数の三角関数のそれとはかなり異なる
- 初等関数についてはまだ述べるべきことがたくさん残っているが, 今回の講義ではあまり欲張らず, 次回に回す.