工共 212 工業数学 IV

第 5 回

正則関数

正則関数 (1) (p.74)

定義 3.1 (1)　D を領域 (弧状連結な開集合), $f(z)$ を D で定義された関数, $\alpha \in D$ とする. 極限

$$\lim_{z \to \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha}$$

が定まるとき, $f(z)$ は α で**微分可能**であるという.

正則関数 (2) (p.74)

定義 3.1 (2) この極限値を $f(z)$ の α における微分係数といい,

$$f'(\alpha) \text{ または } \frac{df}{dz}(\alpha)$$

とあらわす.

- 教科書 74 ページ注意 3.1 の上の行の「$z \in D$ とは限らない」という記述は間違いである. $f(z)$ の定義域が D であるから, $z \in D$ でなければ $f(z)$ という表現は意味を持たない.

- この講義では深入りしないが, 微分の定義をする際には, 定義域 D が開集合であることが一定の役割を果たしている.

正則関数 (3) (p.75)

定義 3.2 (1)　領域 D で定義された関数 $w = f(z)$ が D のすべての点で微分可能であるとき, $f(z)$ は D で正則であるという. 正則な関数のことを正則関数という.

正則関数 (4) (p.75)

定義 3.2 (2) D の各点 α に $f'(\alpha)$ を対応させる規則, すなわち $D \ni \alpha \mapsto f'(\alpha) \in \mathbb{C}$ は D で定義された関数であるが, この関数を f の導関数といい,

$$f'(z), \quad \frac{df}{dz}(z), \quad \frac{dw}{dz}$$

などのように表す.

正則関数 (5) (p.75)

定義 3.2 (3) 複素平面全体で正則な関数を整関数と呼ぶ.

- 導関数の変数 z は省略されることがあるので混乱しないよう注意せよ.

正則関数 (6) (p.75)

- $f'(z)$ の導関数を $f(z)$ の第 2 次導関数といい, $f''(z)$, $\dfrac{d^2 f}{dz^2}(z)$ などと書く.

- $f(z)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(z)$, $\dfrac{d^n f}{dz^n}(z)$ などと書く．これは, $f^{(n-1)}(z)$ の導関数として定義される (帰納的な定義).

正則関数 (7) (p.75)

注意 3.2 関数 $f(z)$ の定義域 E が領域でないとき, $f(z)$ が E において正則であるとは, E を含むある領域 D が取れ, $f(z)$ が D において微分可能であることをいう. 特に, $f(z)$ が z_0 で正則であるとは, $f(z)$ が z_0 のある近傍で微分可能であることをいう.

正則関数 (8) (p.76)

定理 3.1 関数 $f(z)$ が D で微分可能なら, $f(z)$ は D で連続である.

正則関数 (8) (p.77)

定理 3.2 領域 D において $f(z), g(z)$ が正則であるとき，これらの線形結合 $\alpha f(z) + \beta g(z)$ (ただし α, β は任意の複素数) および積 $f(z)g(z)$ は正則である．また，$f(z)/g(z)$ は $g(z) \neq 0$ を満たす点で正則である．さらに，$(\alpha f + \beta g)'(z) = \alpha f'(z) + \beta g'(z)$, $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$, $(\frac{f}{g})'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$ である．

定理 3.2 の証明は実数値関数の場合と同様であるが講義では省略する．実数値関数に関する証明は, 微分積分学の教科書 (たとえば杉浦光夫, 解析入門 I, 東京大学出版会, 1980, p.85) に記載されている．複素関数に関する証明は, たとえば小平邦彦, 複素解析, 岩波書店, 1991, pp.14∼15 に記載されている．なお, 講義資料の記法は教科書と若干違うが意味は同じである．

定理 3.2 の結果を公式の形でまとめておく．

正則関数 (9)

公式

$$
\begin{aligned}
(\alpha f + \beta g)'(z) &= \alpha f'(z) + \beta g'(z) \\
(fg)'(z) &= f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \\
\left(\frac{f}{g}\right)'(z) &= \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}
\end{aligned}
$$

正則関数 (10) (p.77)

定理 3.3 $f(z)$ が z_0 の近傍で微分可能で, $g(w)$ が $w_0 = f(z_0)$ の近傍で微分可能であるとき, $(g \circ f)(z)$ は z_0 の近傍で微分可能で,

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(w_0) f'(z_0)$$

となる.

教科書と若干書き方を変えてあるが言っていることは同じである．証明は実数値関数の場合と同様である．実数値関数に関する証明は, 微分積分学の教科書 (たとえば杉浦光夫, 解析入門 I, 東京大学出版会, 1980, pp.131∼132) に記載されている．複素関数に関する証明は, たとえば 小平邦彦, 複素解析, 岩波書店, 1991, pp.16∼17 に記載されている．教科書によって表現が若干異なることがあるので注意すること．

正則関数 (11)

- $f(z)=z$ は $\mathbb{C}$ において微分可能である. (理由: $\forall\alpha$, $\displaystyle\lim_{z\to\alpha}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}=\lim_{z\to\alpha}\frac{z-\alpha}{z-\alpha}=1$) 以上の計算から, $z'=1$ であることもわかる.

- $f(z)=\alpha$ (定数関数) としたとき, $f(z)$ は微分可能で, $f'(z)=0$ である. (理由: 定義 3.1 に $f(z)=\alpha$ を代入すると分子は常に零)

正則関数 (12)

- 定理 3.2 より, $f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n$ は微分可能である.

- 定理 3.2 より, $f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n$, $g(z) = \beta_0 + \beta_1 z + \cdots + \beta_m z^m$ としたとき, $g(z) \neq 0$ を満たす $\mathbb{C}$ の点において $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ は微分可能である.

正則関数 (13) (p.78)

例 3.1

(1) 定理 3.2 と数学的帰納法から, $n \in \mathbb{N}$ に対して $(z^n)' = nz^{n-1}$ である.

(2) $z \neq 0$ のとき, $z^n z^{-n} = 1$ の右辺を微分すると $(z^n z^{-n})' = 0$, 左辺を微分して定理 3.2 を使うと, $(z^n z^{-n})' = nz^{n-1}z^{-n} + z^n(z^{-n})'$. よって, $(z^{-n})' = -nz^{-(n+1)}$ である.

正則関数 (14)

微分可能性の定義 $\lim_{z\to\alpha}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ において, z は α にどのような近付き方をしても良かった．これは実は厳しい条件で, 勝手に取った (実変数の意味で) 微分可能な実数値関数 $u(x,y)$ と $v(x,y)$ から定めた関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ は一般には複素変数の意味で微分可能とならない．これと関係するのがコーシー・リーマンの方程式 (後述) である.

正則関数 (15)

- 先ほどの説明と関係するのが例 3.3
- 各自で読んでおくこと.

演習 5-1

各自で空欄を埋めよ.

演習 5-1 解答

$$(z^3)' = \boxed{3z^2}, \qquad \left(\frac{z+1}{z+2}\right)' = \frac{\boxed{1}}{\boxed{(z+2)^2}},$$

$$(z^{-4})' = \boxed{-4z^{-5}}$$

コーシー・リーマンの方程式 (1)

定義　2 変数実数値関数 $u(x,y)$ が点 (a,b) で微分可能であるとは, ある (c_1,c_2) が存在し,
$u(x+h,y+k)-u(x,y)=c_1h+c_2k+\varepsilon(h,k)$ かつ $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\epsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$ となることをいう. このとき, (c_1,c_2) を $u(x,y)$ の (a,b) における**微分係数**といい, $u'(a,b)$ と書く.

コーシー・リーマンの方程式 (2)

定理　2 変数実数値関数 $u(x,y)$ が点 (a,b) で微分可能であるとき，

$$u'(a,b) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(a,b), \frac{\partial u}{\partial y}(a,b)\right)$$

となる.

- 教科書 80 ページ命題 3.2.1 は定義抜きで記載されていているが, 上記では定義と定理を分離して書いた.

- 上記定理については 杉浦光夫, 解析入門 I, 東京大学出版会, 1980, pp.120∼121 参照)

コーシー・リーマンの方程式 (3)

定理 3.4 領域 D で定義された関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ が $\alpha = a + ib$ において微分可能であるための必要十分条件は $u(x,y)$ と $v(x,y)$ が (a,b) において微分可能で, かつコーシー・リーマンの方程式: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ を満たすことである.

コーシー・リーマンの方程式 (4)

- コーシー・リーマンの方程式のことをコーシー・リーマンの関係式ともいう.
- コーシー・リーマンの方程式は複素解析で重要なので, 証明を丁寧に追うことにする.

定理 3.4 の証明 (1-1)　$f(z)$ が α で微分可能であると仮定する. $f'(\alpha) = c + di$ とすると,

$$
\begin{aligned}
&(u+iv)(a+h, b+k) - (u+iv)(a,b) \\
&\quad = (c+di)(h+ik) + (\varepsilon_1(h,k) + i\varepsilon_2(h,k))
\end{aligned}
$$

となる.

定理 3.4 の証明 (1-2)　実部と虚部に分けると,

$$
\begin{aligned}
u(a+h,b+k)-u(a,b) &= (ch-dk)+\varepsilon_1(h,k)\\
v(a+h,b+k)-v(a,b) &= (dh+ck)+\varepsilon_2(h,k)
\end{aligned}
$$

となる.

定理 3.4 の証明 (1-3) (1-2) の式は u および v の微分可能性の定義と一致するので, u および v は微分可能であり,

$$\begin{aligned} c &= \frac{\partial u}{\partial x}(a,b), & -d &= \frac{\partial u}{\partial y}(a,b) \\ d &= \frac{\partial v}{\partial x}(a,b), & c &= \frac{\partial v}{\partial y}(a,b) \end{aligned}$$

だから, コーシー・リーマンの方程式が満たされる.

定理 3.4 の証明 (2-1)　u および v が (a,b) で微分可能で, コーシー・リーマンの方程式を満たすものと仮定する.

$$\begin{aligned} c &= \frac{\partial u}{\partial x}(a,b), & -d &= \frac{\partial u}{\partial y}(a,b) \\ d &= \frac{\partial v}{\partial x}(a,b), & c &= \frac{\partial v}{\partial y}(a,b) \end{aligned}$$

とおく.

定理 3.4 の証明 (2-2)

$$u(a+h,b+k)-u(a,b)=ch-dk+\varepsilon_1(h,k),$$
$$v(a+h,b+k)-v(a,b)=dh+ck+\varepsilon_2(h,k)$$

で, $i=1,2$ に対し, 以下が成り立つ.

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\varepsilon_i(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0,$$

定理 3.4 の証明 (2-3) $z = (a+h) + i(b+k)$ とすると $f(z) = u(a+h, b+k) + iv(a+h, b+k)$ である. よって,

$$
\begin{aligned}
&f(z) - f(\alpha) \\
&\quad = (u(a+h, b+k) + iv(a+h, b+k)) \\
&\qquad -(u(a,b) + iv(a,b)
\end{aligned}
$$

であるが, ここに (2-2) の右辺を代入する.

定理 3.4 の証明 (2-4)

$$
\begin{aligned}
f(z) - f(\alpha) &= ch - dk + \varepsilon_1(h,k) \\
&\quad + i(dh + ck + \varepsilon_2(h,k)) \\
&= (c + di)(h + ik) + \varepsilon_1(h,k) + i\varepsilon_2(h,k))
\end{aligned}
$$

である.

定理 3.4 の証明 (2-5) $z=(a+h)+i(b+k)$ と定義すると, $\alpha=a+ib$ だったので,

$$z-\alpha=(h+ik)$$

であり, $z\to\alpha$ となるとき h と k はともに零に近付く. そこで, $\varepsilon(h,k)=\varepsilon_1(h,k)+i\varepsilon_2(h,k)$ とおくと,

$$\lim_{z\to\alpha}\varepsilon(h,k)=0$$

である.

定理 3.4 の証明 (2-6)　(2-4) と (2-5) をまとめると,

$$\lim_{z \to \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} = c + di$$

となり, $f(z)$ が α で微分可能であることがわかる.　(証明終)

講義資料では点 $\alpha = a + ib$ における微分可能性について議論していたが, 領域 D で関数 $f(z)$ が微分可能であることを示すためには, D のすべての点を考える必要がある (α を z で置き換えて考える). 教科書の記述はこのスタイルになっている.

- 系 3.1(p.83) は定理 3.4 を言い換えているだけなので略す.

- $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(a, b)$ を $f_x(\alpha)$ と書く

- $\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)(a, b)$ を $f_y(\alpha)$ と書く

定理 3.4 の証明の記号を使うと, $f'(\alpha) = c + di$ であるが, 一方 $c = \frac{\partial u}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial v}{\partial y}(a,b)$, $d = \frac{\partial v}{\partial x}(a,b) = -\frac{\partial u}{\partial y}(a,b)$ だったから, 次式が成り立つ (系 3.2).

$$
\begin{aligned}
f'(\alpha) &= (\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x})(a,b) = f_x(\alpha) \\
&= \frac{1}{i}(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y})(a,b) = \frac{1}{i}f_y(\alpha)
\end{aligned}
$$

演習 5-2

空欄を埋め, 正しいと思う方を選択せよ.

演習 5-2 解答 (1)

1. $z = x + iy$ とし, $f(z) = z$ を $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ の形に書き直すと $u(x, y) = \boxed{x}$, $v(x, y) = \boxed{y}$ である. $\frac{\partial u}{\partial x} = \boxed{1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \boxed{0}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \boxed{0}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \boxed{1}$ であるから, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ と $\boxed{\text{なり}}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ と $\boxed{\text{なる}}$. したがって, $f(z)$ は正則で $\boxed{\text{ある}}$.

演習 5-2 解答 (2)

2. $z = x + iy$ とし, $f(z) = \overline{z}$ を $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ の形に書き直すと $u(x, y) = \boxed{x}$, $v(x, y) = \boxed{-y}$ である. $\frac{\partial u}{\partial x} = \boxed{1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \boxed{0}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \boxed{0}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \boxed{-1}$ であるから, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ と $\boxed{\text{ならず}}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ と $\boxed{\text{なる}}$. したがって, $f(z)$ は正則で $\boxed{\text{ない}}$.

演習 5-2 解答 (3)

3-1

$$\frac{1}{z} = \frac{\boxed{x - iy}}{\boxed{x^2 + y^2}}$$

$$u(x, y) = \frac{\boxed{x}}{\boxed{x^2 + y^2}}, v(x, y) = \frac{\boxed{-y}}{\boxed{x^2 + y^2}}$$

演習 5-2 解答 (4)

3-2

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \boxed{\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \boxed{\frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \boxed{\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \boxed{\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}}$$

演習 5-2 解答 (5)

3-3 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ と $\boxed{\text{なり}}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$ と $\boxed{\text{なる}}$. したがって, $f(z)$ は正則で $\boxed{\text{ある}}$.

演習 5-3

空欄を埋めよ.

演習 5-3 解答 (1)

$u(x,y) = \boxed{x^3 - 3xy^2}$, $v(x,y) = \boxed{3x^2y - y^3}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \boxed{3x^2 - 3y^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \boxed{-6xy}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \boxed{6xy}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \boxed{3x^2 - 3y^2}$ となる.

演習 5-3 解答 (2)

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \boxed{3(x^2 - y^2)} + i\boxed{6xy}$$

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{i}\left(\boxed{-6xy} + i\boxed{3(x^2 - y^2)}\right) \\ &= \boxed{3(x^2 - y^2)} + i\boxed{6xy} \end{aligned}$$

演習 5-3 解答 (3)

気付いた者もいると思うが $f(z) = z^3$ である．また, この演習の内容は例 3.5 とほぼ同じである．

$f(z) = z^3$ だから, $f'(z) = 3z^2$, ここに $z = x + iy$ を代入すると $f'(z) = 3(x + iy)^2 = 3(x^2 - y^2) + i6xy$ となり, 計算が合っていることが確認できる．

調和関数 (1) (p.91)

定義 3.3　実変数の 2 変数実数値関数 $F(x,y)$ が連続な 2 次偏導関数を持ち,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=0$$

を満たすとき, $F(x,y)$ を**調和関数**という. また, 上記の方程式を**ラプラスの方程式**という.

調和関数 (2)

定義　作用素 (演算子)Δ を

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

のように定義し, これをラプラスの作用素, ラプラスの演算子あるいは ラプラシアンと呼ぶ.

ラプラスの演算子は変数がいくつの場合でも定義できる. 3 変数のときは

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

であり, 電磁気学ではこの演算子がよく出て来る. Δ のかわりに ∇^2 という記号が使われることもある.

n 変数のときにはラプラスの演算子は

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

である.

調和関数 (3) (p.91)

定義 3.4 2 個の調和関数 $u(x,y)$ と $v(x,y)$ がコーシー・リーマンの方程式を満たすとき, $v(x,y)$ を $u(x,y)$ の共役調和関数といい, $u(x,y)$ と $v(x,y)$ はたがいに共役な調和関数という.

調和関数 (4) (p.91)

定理 3.8　$z = x + iy$ としたとき, D において正則な関数 $f(z)$ の実部を $u(x, y)$, 虚部を $v(x, y)$ とすると, $u(x, y)$ と $v(x, y)$ はたがいに共役な調和関数である.

調和関数 (5) (p.91)

定理 3.8 の証明　コーシー・リーマンの方程式の両辺をさらに偏微分すると確認できる (教科書 91〜 92 ページ)

演習 5-4

空欄を埋め, 正しいと思う方を選択せよ.

演習 5-4 解答

$$u(x,y) = \boxed{x^2 - y^2},\ v(x,y) = \boxed{2xy},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \boxed{2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \boxed{-2},$$

$u(x,y)$ はラプラスの方程式を $\boxed{\text{満たし}}$,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \boxed{0},\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \boxed{0},$$

$v(x,y)$ はラプラスの方程式を $\boxed{\text{満たす}}$.

等角写像 (1) (p.94)

定義 3.5(1) 領域 D で連続な関数 $f(z)$ が i) z_0 を通る滑らかな曲線を $f(z_0)$ を通る滑らかな曲線に写し, ii) 点 z_0 を通る曲線 C_1, C_2 の $f(z)$ による像を Γ_1, Γ_2 としたとき, z_0 における C_1 の接線と C_2 の接線の交わる角度が, $f(z_0)$ における Γ_1 の接線と Γ_2 の接線の交わる角度と向きを含めて一致するとき, $f(z)$ は z_0 で**等角**であるという.

等角写像 (2) (p.94)

定義 3.5(2) D の各点で $f(z)$ が等角のとき, $f(z)$ は D で等角であるという. 等角な写像のことを等角写像という.

ガンマ

Γ

ギリシア文字 (大文字)

等角写像 (3) (p.94)

定理 3.9 　$f(z)$ が z_0 で正則で $f'(z_0) \neq 0$ なら $f(z)$ は z_0 で等角である.

等角写像は流体力学で重要であるが, 電気電子工学科ではそれほど使わないので, 定義および定理の紹介に留め, 詳細は略す.