

工共 212 工業数学 IV

第 5 回

正則関数

演習 5-2 解答 (2)

2. $z = x+iy$ とし, $f(z) = \bar{z}$ を $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ の形に書き直すと $u(x, y) = \boxed{x}$, $v(x, y) = \boxed{-y}$ である. $\frac{\partial u}{\partial x} = \boxed{1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \boxed{0}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \boxed{0}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \boxed{-1}$ であるから, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ と **ならず**, $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ と **なる**. したがって, $f(z)$ は正則で **ない**.

演習 5-2 解答 (5)

3-3 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ と **なり**, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ と **なる**. したがって, $f(z)$ は正則で **ある**.

演習 5-1 解答

$$(z^3)' = \boxed{3z^2}, \quad \left(\frac{z+1}{z+2}\right)' = \frac{\boxed{1}}{\boxed{(z+2)^2}},$$

$$(z^{-4})' = \boxed{-4z^{-5}}$$

演習 5-2 解答 (3)

3-1

$$\frac{1}{z} = \frac{\boxed{x-iy}}{\boxed{x^2+y^2}}$$
$$u(x, y) = \frac{\boxed{x}}{\boxed{x^2+y^2}}, \quad v(x, y) = \frac{\boxed{-y}}{\boxed{x^2+y^2}}$$

演習 5-3 解答 (1)

$$u(x, y) = \boxed{x^3 - 3xy^2}, \quad v(x, y) = \boxed{3x^2y - y^3}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \boxed{3x^2 - 3y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \boxed{-6xy}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \boxed{6xy}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \boxed{3x^2 - 3y^2}$$

となる.

演習 5-2 解答 (1)

1. $z = x+iy$ とし, $f(z) = z$ を $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ の形に書き直すと $u(x, y) = \boxed{x}$, $v(x, y) = \boxed{y}$ である. $\frac{\partial u}{\partial x} = \boxed{1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \boxed{0}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \boxed{0}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \boxed{1}$ であるから, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ と **なり**, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ と **なる**. したがって, $f(z)$ は正則で **ある**.

演習 5-2 解答 (4)

3-2

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\boxed{y^2 - x^2}}{\boxed{(x^2 + y^2)^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\boxed{-2xy}}{\boxed{(x^2 + y^2)^2}},$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\boxed{2xy}}{\boxed{(x^2 + y^2)^2}}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\boxed{y^2 - x^2}}{\boxed{(x^2 + y^2)^2}}$$

演習 5-3 解答 (2)

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \boxed{3(x^2 - y^2)} + i \boxed{6xy}$$
$$f'(z) = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{1}{i} \left(\boxed{-6xy} + i \boxed{3(x^2 - y^2)} \right)$$
$$= \boxed{3(x^2 - y^2)} + i \boxed{6xy}$$

演習 5-3 解答 (3)

気付いた者もいると思うが $f(z) = z^3$ である. また, この演習の内容は例 3.5 とほぼ同じである.

$f(z) = z^3$ だから, $f'(z) = 3z^2$, ここに $z = x + iy$ を代入すると $f'(z) = 3(x + iy)^2 = 3(x^2 - y^2) + i6xy$ となり, 計算が合っていることが確認できる.

演習 5-4 解答

$$u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = 2xy,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2,$$

$u(x, y)$ はラプラスの方程式を **満たし**,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

$v(x, y)$ はラプラスの方程式を **満たす**.