電 210 電気数学 IV
第 5 回
正則関数

演習 5-1 解答

$$(z^3)' = \boxed{3z^2}, \quad \left(\frac{z+1}{z+2}\right)' = \frac{\boxed{1}}{\boxed{(z+2)^2}},$$

$$(z^{-4})' = \boxed{-4z^{-5}}$$

演習 5-2 解答 (1)

1. $z = x+iy$ とし, $f(z) = z$ を $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ の形に書き直すと $u(x,y) = \boxed{x}$, $v(x,y) = \boxed{y}$ である. $\frac{\partial u}{\partial x} = \boxed{1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \boxed{0}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \boxed{0}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \boxed{1}$ であるから, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ と $\boxed{\text{なり}}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ と $\boxed{\text{なる}}$. したがって, $f(z)$ は正則で $\boxed{\text{ある}}$.

演習 5-2 解答 (2)

2. $z = x+iy$ とし, $f(z) = \overline{z}$ を $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ の形に書き直すと $u(x,y) = \boxed{x}$, $v(x,y) = \boxed{-y}$ である. $\frac{\partial u}{\partial x} = \boxed{1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \boxed{0}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \boxed{0}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \boxed{-1}$ であるから, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ と $\boxed{\text{ならず}}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ と $\boxed{\text{なる}}$. したがって, $f(z)$ は正則で $\boxed{\text{ない}}$.

演習 5-2 解答 (3)

3-1

$$\frac{1}{z} = \frac{\boxed{x-iy}}{\boxed{x^2+y^2}}$$

$$u(x,y) = \frac{\boxed{x}}{\boxed{x^2+y^2}}, v(x,y) = \frac{\boxed{-y}}{\boxed{x^2+y^2}}$$

演習 5-2 解答 (4)

3-2

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \boxed{\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \boxed{\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \boxed{\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \boxed{\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}}$$

演習 5-2 解答 (5)

3-3 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ と $\boxed{\text{なり}}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ と $\boxed{\text{なる}}$. したがって, $f(z)$ は正則で $\boxed{\text{ある}}$.

演習 5-3 解答 (1)

$u(x,y) = \boxed{x^3-3xy^2}$, $v(x,y) = \boxed{3x^2y-y^3}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \boxed{3x^2-3y^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \boxed{-6xy}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \boxed{6xy}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \boxed{3x^2-3y^2}$ となる.

演習 5-3 解答 (2)

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \boxed{3(x^2-y^2)} + i\boxed{6xy}$$

$$f'(z) = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{i}\left(\boxed{-6xy} + i\boxed{3(x^2-y^2)}\right)$$

$$= \boxed{3(x^2-y^2)} + i\boxed{6xy}$$

演習 5-3 解答 (3)

気付いた者もいると思うが $f(z) = z^3$ である. また, この演習の内容は例 3.5 とほぼ同じである. $f(z) = z^3$ だから, $f'(z) = 3z^2$, ここに $z = x+iy$ を代入すると $f'(z) = 3(x+iy)^2 = 3(x^2-y^2) + i6xy$ となり, 計算が合っていることが確認できる.

演習 5-4 解答

$u(x,y) = \boxed{x^2-y^2}$, $v(x,y) = \boxed{2xy}$,

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \boxed{2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \boxed{-2}$,

$u(x,y)$ はラプラスの方程式を $\boxed{\text{満たし}}$,

$\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \boxed{0}$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \boxed{0}$,

$v(x,y)$ はラプラスの方程式を $\boxed{\text{満たす}}$.