

工共 212 工業数学 IV

第 4 回

複素関数

複素関数 (1) (p.56)

定義 2.9 変数 x, y が独立で, z の値が x と y から定まるとき, x と y を**独立変数**, z を**従属変数**という

定義 2.10 複素数 z が $z = x + iy$ で与えられ, x と y が独立な実変数であるとき, z を**複素変数**という. 実数値を取る変数を**実変数**という.

複素関数 (2) (p.56)

- 実変数とは, 実軸上を自由に動きまわる点のこと
- 複素変数とは, 複素平面内を自由に動きまわる点のこと

複素関数 (3) (p.56)

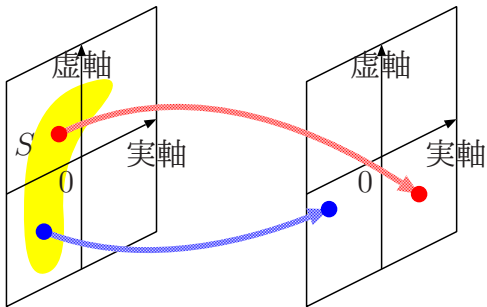
定義 2.11 (1) 複素平面の集合 S が与えられ、 S の各点 z にある複素数 $f(z)$ を対応させる規則が定まっているとき、 f を**複素関数**という。この対応を

$$w = f(z)$$

と書く。また、集合 S を f の**定義域**という。

複素関数 (4) (p.56)

定義 2.11 (2) 実数の集合 S が与えられ, S の各点 x にある実数 $f(x)$ を対応させる規則が定まっているとき, f を**実関数**という.



複素関数

複素関数 (5) (p.57)

- $z = x + iy$, $w = u + iv$ としたとき, z に w を対応させる規則は, 点 (x, y) に点 (u, v) を対応させる規則と解釈することができる.
- 以上の解釈に基づき,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

と書く (わかりにくい記法なので注意).

複素関数 (6) (p.57)

定義 変数 z が動く複素平面を z 平面, 変数 w が動く複素平面を w 平面という.

- 関数の定義域を「あらかじめ与えておく」流儀 (定義 2.11) と, 「関数の定義式から定義域を定める」流儀 (例 2.3 (p.57)) がある. 例 2.3 は暗黙のうちに定義 2.11 と異なる用語を採用しているので誤解しないよう注意すること.
- 例 2.4 は各自で読んでおくこと.

$$f : S \rightarrow \mathbb{C}$$

f の定義域は S , 値域は \mathbb{C}

$$f : z \mapsto w$$

f は複素数 z を複素数 w に写す,
あるいは f による z の像は w



意味が違うので注意

演習 4-1

空欄を埋め, z 平面 (左側) に α, β, γ を, w 平面 (右側) に $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)$ を書き込め.

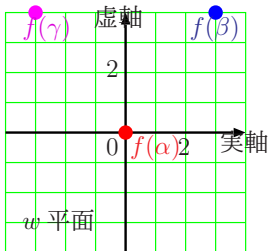
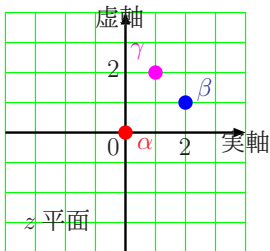
演習 4-1 解答 (1)

$$f(\alpha) = 0$$

$$f(\beta) = 3 + 4i$$

$$f(\gamma) = -3 + 4i$$

演習 4-1 解答 (2)



領域 (1) (p.61)

定義 2.12 点 z_0 を中心とする半径 δ の開円板を z_0 の δ 近傍という. z_0 の δ 近傍を $U_\delta(z_0)$ で表す.

領域 (2) (p.61)

定義 2.13

複素平面の集合 S の点 z_0 が

$$\exists \delta > 0, U_\delta(z_0) \subset S$$

を満たすとき, z_0 を S の内点という. S の内点を集めたものを S の内部といい, $\overset{\circ}{S}$ あるいは $\text{Int } S$ であらわす.

- $\forall x$: 任意の x に対し…
「 \forall 」は「任意」「勝手に取った」という意味
- $\exists \delta$: ある δ が存在し…
「 \exists 」は「存在する」という意味

- $x \in S$: x は集合 S の要素
 $S \ni x$ という書き方もある
- $A \subset B$: A は B の部分集合
 $B \supset A$ という書き方もある

領域 (3) (p.61)

定義 2.14 複素平面の集合 S が $S = \overset{\circ}{S}$ を満たすとき, S を **開集合** という. また, S の補集合が開集合となるとき, S を **閉集合** という.

定義 (補集合) 集合 S に対し, S に属さない点を集めたものを S の **補集合** といい, S^c で表す.
注意: 補集合の記号は教科書によってまちまち

領域 (4) (pp.61 ~ 62)

定義 2.15 S の補集合の内点を S の**外点**という.

定義 2.16 S の内点でも外点でもない点を S の**境界点**という. S の境界点の集合を S の**境界**といい, ∂S で表す. $S \cup \partial S$ を S の**閉包**といい, \bar{S} , $\text{Cl } S$ といった記号で表す.

- $A \cup B$: A と B の和集合 (少なくともどちらか一方に属する)
- $A \cap B$: A と B の共通部分
- $A - B, A \setminus B$: 差集合, 集合 A の要素から集合 B の要素を除いたもの

領域 (5) (p.63)

定義 2.17 集合 S の任意の 2 点が S 内の連続曲線で結べるとき, S は**弧状連結**であるという.

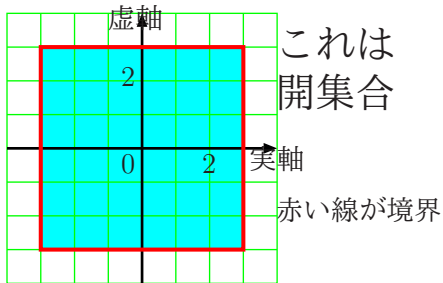
定義 2.18 弧状連結な開集合のことを**領域**または**開領域**という. 領域の閉包を**閉領域**という.

定義 2.19 $\exists r, S \subset U_r(0)$ となるとき, S は**有界**であるという.

演習 4-2

指示にしたがって作業をおこなえ.

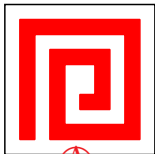
演習 4-2 解答



演習 4-3

□の中に描かれた集合 (色がついた部分) が弧状連結なものに○をつけよ.

演習 4-3 解答



A



B



C

収束 (1) (p.64)

定義 2.20 (1) 複素変数 z が α に限りなく近付くとき (ただし α には一致しないものとする), その近付き方によらず, $f(z)$ が複素数 β に限りなく近付くのであれば, $z \rightarrow \alpha$ のときの $f(z)$ の極限值は β であるまたは $z \rightarrow \alpha$ のとき $f(z)$ は β に収束するという.

収束 (2) (p.64)

定義 2.20 (2) $z \rightarrow \alpha$ のときの $f(z)$ の極限值が β であることを以下のように書く:

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = \beta \text{ または } f(z) \rightarrow \beta (z \rightarrow \alpha)$$

収束 (3)

- 「限りなく近づく」「近付き方によらない」という言い方は「何を言っているのかよくわからない」
- もう少し正確にならないか
- 「近付き方によらない」ことを言うためには距離を使うのがよい

収束 (4)

「 $f(z)$ と β の距離が一定未満」であるためには「 z と α の距離が一定未満」であればよい

という言い換えを試してみる

収束 (5)

$f(z)$ と β の距離が ε 未満であることは

$$|f(z) - \beta| < \varepsilon$$

と書ける

イ プシロン
€ , ε

ギリシア文字

字体が2種類あるので注意

収束 (5)

z と α の距離が δ 未満であることは

$$|z - \alpha| < \delta$$

と書ける

収束 (6)

『「 $f(z)$ と β の距離が一定未満」であるためには「 z と α の距離が一定未満」であればよい』という文は、

- $|z - \alpha| < \delta$ なら $|f(z) - \beta| < \varepsilon$
- ε を決めれば対応する δ が決まる

というように書ける

収束 (7)

z が α と一致したら困る場合には

$$0 < |z - \alpha| < \delta$$

とすればよい

収束 (8) (p.65)

準備が長くなったが、これでようやく定義 2.20 を p.65 の記号を使って書き直すことができる:

収束 (9) (p.65)

定義 2.20(3) 複素数 α, β に対して

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z, 0 < |z - \alpha| < \delta \Rightarrow |f(z) - \beta| < \varepsilon$$

となるとき, $z \rightarrow \alpha$ のときの $f(z)$ の極限值は β であるまたは $z \rightarrow \alpha$ のとき $f(z)$ は β に収束するという.

- $A \rightarrow B$ は「 A ならば B 」
という意味

収束 (10)

- 次に, z が「限りなく大きくなる」という状況を考える
- やはり「どのように大きくなっても」という定式化をしたい
- このためには「 z の絶対値が大きくなる」という言い方をすればよい

収束 (11)

- 「 z がどんどん大きくなる」という状況は、どんな $R > 0$ を取っても $|z| > R$ とできるというふうにかける

収束 (10) (p.65)

定義 複素数 β に対して

$\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0, \forall z, |z| > R \Rightarrow |f(z) - \beta| < \varepsilon$ となるとき, $f(z)$ は無限遠点で極限值 β を持つといい, 以下のように書く.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \beta \text{ または } f(z) \rightarrow \beta (z \rightarrow \infty)$$

収束 (11) (p.66)

定義 2.21(1) $z \rightarrow \alpha$ としたときの $f(z)$ の極限が定まらない場合,
 $z \rightarrow \alpha$ のとき $f(z)$ は**発散**する
という.

収束 (12) (p.66)

定義 2.21(2) $z \rightarrow \alpha$ としたとき $|f(z)|$ が限りなく大きくなる場合,

$z \rightarrow \alpha$ のとき $f(z)$ は**無限大に発散**する
といい, 以下のように書く.

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = \infty \text{ または } f(z) \rightarrow \infty (z \rightarrow \alpha)$$

- 「発散」と「無限大に発散」は意味が違うので注意
- 「 $z \rightarrow \alpha$ で $f(z)$ が無限大に発散」を先ほど定義した論理記号を使って書くと

$$\forall R > 0, \exists \delta > 0, \forall z,$$

$$|z - \alpha| < \delta \Rightarrow |f(z)| > R$$

収束 (13) (p.66)

定義 $|z|$ が限りなく大きくなるとき, $|f(z)|$ も限りなく大きくなる場合,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty \text{ または } f(z) \rightarrow \infty (z \rightarrow \infty)$$

と書く.

「 $|z|$ が限りなく大きくなるとき, $|f(z)|$ も限りなく大きくなる」を論理記号を使って書くと

$$\forall R > 0, \exists R' > 0, \forall z, \\ |z| > R' \Rightarrow |f(z)| > R$$

この講義では ε, δ を使った記法には深入りしない

収束 (14) (p.66)

定理 2.8 $f(z)$, $g(z)$ および β, γ に対し,
 $\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = \beta$, $\lim_{z \rightarrow \alpha} g(z) = \gamma$, であるとき,

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} (f \pm g)(z) = \beta \pm \gamma \quad (\text{複合同順})$$

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z)g(z) = \beta\gamma$$

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\beta}{\gamma} \quad (\gamma \neq 0 \text{ のとき})$$

- 定理 2.8 が成り立つ理由の説明には ε, δ を使った記法を多用する必要があるので, この講義では立ち入らない.
- 例 2.8 は各自で読んでおくこと

収束 (15) (p.66)

定理 2.9 $\alpha = a + ib, \beta = c + id, z = x + iy,$
 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ としたとき,

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = \beta$$

\iff

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} u(x, y) = c$$

かつ $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} v(x, y) = d$

- $(x, y) \rightarrow (a, b)$ とは, 平面上の点 (x, y) が点 (a, b) に限りなく近付くこと
- $\mathbf{z} = (x, y)$, $\boldsymbol{\alpha} = (a, b)$ としたとき,
 $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} u(x, y) = c$ の定義は次の通り:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \mathbf{z},$$

$$0 < \|\mathbf{z} - \boldsymbol{\alpha}\| < \delta \Rightarrow |u(\mathbf{z}) - c| < \varepsilon$$

複素関数の収束： $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z,$

$$0 < |z - \alpha| < \delta \Rightarrow |f(z) - \beta| < \varepsilon$$

\mathbb{R}^2 の関数の収束： $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \mathbf{z},$

$$0 < \|\mathbf{z} - \boldsymbol{\alpha}\| < \delta \Rightarrow |u(\mathbf{z}) - c| < \varepsilon$$

言っていることは同じ

演習 4-4

空欄を埋めよ.

演習 4-4 解答

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z + i}{z + 2i} = \boxed{1/2}$$

$$\lim_{z \rightarrow -i} \frac{2}{z - i} = \boxed{i}$$

連続関数 (1) (p.68)

定義 2.22 関数 $w = f(z)$ が定義域 D の点 α で連続であるとは,

$\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = f(\alpha)$ となることをいう. 定義域のすべての点で $w = f(z)$ が連続であるとき, $w = f(z)$ は D において連続であるという.

- 定義 2.22 では z は定義域 D の点であること仮定されている. これを強調するなら

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \alpha \\ z \in D}} f(z) = f(\alpha)$$

と書くべきであろうが, このような書き方はふつう使われない.

連続関数 (2) (p.69)

定理 2.10 関数 $f(z)$ および $g(z)$ が D で連続であるとき, $f(z) \pm g(z)$, $f(z)g(z)$ は D で連続である. また, $f(z)/g(z)$ は定義域から $g(z) = 0$ となる点を除いた点で連続である.

定理 2.10(追加) 関数 $f(z)$ が D で連続であるとき, 複素数 γ に対し, $\gamma f(z)$ は D で連続である.

連続関数 (3) (p.69)

定理 2.11 $z = x+iy, f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$ としたとき, $f(z)$ が連続であるための必要十分条件は $u(x, y)$ および $v(x, y)$ が連続であることである.

$\mathbf{z} = (x, y)$, $\boldsymbol{\alpha} = (a, b)$, $u(x, y)$ が定義域を $D \in \mathbb{R}^2$ とする実数値関数としたとき, $u(x, y)$ が $\boldsymbol{\alpha}$ において連続であることの定義は以下の通り:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \mathbf{z} \in D, \\ \|\mathbf{z} - \boldsymbol{\alpha}\| < \delta \Rightarrow |u(\mathbf{z}) - u(\boldsymbol{\alpha})| < \varepsilon$$

連続関数 (4) (p.69)

定理 2.12 関数 $f(z)$ が $z = z_0$ で連続, 関数 $g(w)$ が $w = f(z_0)$ で連続であるとき, $(g \circ f)(z) = g(f(z))$ は $z = z_0$ で連続である.

定理 2.13 関数 $f(z)$ の定義域が有界閉集合で, $f(z)$ が D において連続であるとき, $|f(z)|$ は D において最大値と最小値を取る.

- $f(z) = z$ は連続である.
(理由: $\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = \lim_{z \rightarrow \alpha} z = \alpha$)
- 定理 2.10(および追加した分) を使うと, 複素係数の多項式が定める関数 $p(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n$ は連続であることがわかる.
- $p(z), q(z)$ を複素係数の多項式としたとき, 定理 2.10 により, $g(z) = p(z)/q(z)$ は $q(z) \neq 0$ を満たす点において連続である.