電 210 電気数学 IV

第 4 回

複素関数

複素関数 (1) (p.56)

定義 2.9　変数 x,y が独立で, z の値が x と y から定まるとき, x と y を独立変数, z を従属変数という

定義 2.10　複素数 z が $z = x + iy$ で与えられ, x と y が独立な実変数であるとき, z を複素変数という. 実数値を取る変数を実変数という.

複素関数 (2) (p.56)

- 実変数とは, 実軸上を自由に動きまわる点のこと
- 複素変数とは, 複素平面内を自由に動きまわる点のこと

複素関数 (3) (p.56)

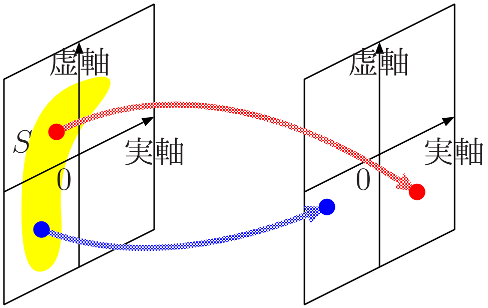
定義 2.11 (1) 複素平面の集合 S が与えられ, S の各点 z にある複素数 $f(z)$ を対応させる規則が定まっているとき, f を**複素関数**という. この対応を

$$w = f(z)$$

と書く. また, 集合 S を f の**定義域**という.

複素関数 (4) (p.56)

定義 2.11 (2) 実数の集合 S が与えられ, S の各点 x にある実数 $f(x)$ を対応させる規則が定まっているとき, f を実関数という.



複素関数

複素関数 (5) (p.57)

- $z = x + iy$, $w = u + iv$ としたとき, z に w を対応させる規則は, 点 (x, y) に点 (u, v) を対応させる規則と解釈することができる.

- 以上の解釈に基づき,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

と書く (わかりにくい記法なので注意).

複素関数 (6) (p.57)

定義 変数 z が動く複素平面を z **平面**, 変数 w が動く複素平面を w **平面**という.

- 関数の定義域を「あらかじめ与えておく」流儀 (定義 2.11) と，「関数の定義式から定義域を定める」流儀 (例 2.3 (p.57)) がある．例 2.3 は暗黙のうちに定義 2.11 と異なる用語を採用しているので誤解しないよう注意すること.
- 例 2.4 は各自で読んでおくこと.

$$f : S \to \mathbb{C}$$

f の定義域は S, 値域は $\mathbb{C}$

$$f : z \mapsto w$$

f は複素数 z を複素数 w に写す,
あるいは f による z の像は w

$$\rightarrow \mapsto$$

意味が違うので注意

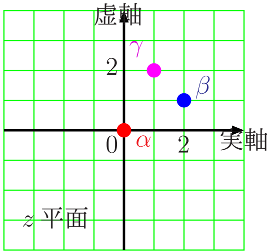
演習 4-1

空欄を埋め, z 平面 (左側) に α, β, γ を, w 平面 (右側) に $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)$ を書き込め.

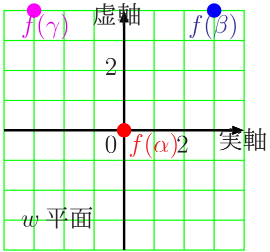
演習 4-1 解答 (1)

$$f(\alpha) = 0$$
$$f(\beta) = 3 + 4i$$
$$f(\gamma) = -3 + 4i$$

演習 4-1 解答 (2)



虚軸
γ
2
β
0
α
2
実軸
z 平面



$f(\gamma)$
虚軸
$f(\beta)$
2
0
$f(\alpha)$
2
実軸
w 平面

領域 (1) (p.61)

定義 2.12 点 z_0 を中心とする半径 δ の開円板を z_0 の δ 近傍という．z_0 の δ 近傍を $U_\delta(z_0)$ で表す．

領域 (2) (p.61)

定義 2.13　複素平面の集合 S の点 z_0 が

$$\exists\delta > 0, U_\delta(z_0) \subset S$$

を満たすとき, z_0 を S の**内点**という. S の内点を集めたものを S の**内部**といい, $\mathring{S}$ あるいは $\mathrm{Int}\, S$ であらわす.

- $\forall x$: 任意の x に対し···
  「$\forall$」は「任意」「勝手に取った」という意味

- $\exists \delta$: ある δ が存在し···
  「$\exists$」は「存在する」という意味

- $x \in S$: x は集合 S の要素
  $S \ni x$ という書き方もある
- $A \subset B$: A は B の部分集合
  $B \supset A$ という書き方もある

領域 (3) (p.61)

定義 2.14 複素平面の集合 S が $S = \mathring{S}$ を満たすとき, S を**開集合**という. また, S の補集合が開集合となるとき, S を**閉集合**という.

定義 (補集合) 集合 S に対し, S に属さない点を集めたものを S の**補集合**といい, S^c で表す.

注意: 補集合の記号は教科書によってまちまち

領域 (4) (pp.61 ∼ 62)

定義 2.15 S の補集合の内点を S の**外点**という.

定義 2.16 S の内点でも外点でもない点を S の**境界点**という. S の境界点の集合を S の**境界**といい, ∂S で表す. $S \cup \partial S$ を S の**閉包**といい, $\overline{S}$, $\mathrm{Cl}\, S$ といった記号で表す.

- $A \cup B$: A と B の和集合 (少なくともどちらか一方に属する)
- $A \cap B$: A と B の共通部分
- $A - B$, $A \setminus B$: 差集合, 集合 A の要素から集合 B の要素を除いたもの

領域 (5) (p.63)

定義 2.17 集合 S の任意の 2 点が S 内の連続曲線で結べるとき, S は弧状連結であるという.

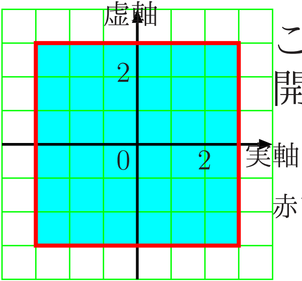
定義 2.18 弧状連結な開集合のことを領域または開領域という. 領域の閉包を閉領域という.

定義 2.19 $\exists r,\ S \subset U_r(0)$ となるとき, S は有界であるという.

演習 4-2

指示にしたがって作業をおこなえ.

演習 4-2 解答



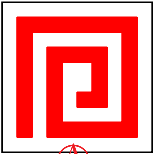
これは
開集合

赤い線が境界

演習 4-3

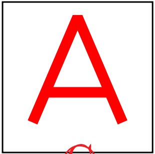
□の中に描かれた集合 (色がついた部分) が弧状連結なものに◯をつけよ.

演習 4-3 解答



Ⓐ

B



Ⓒ

収束 (1) (p.64)

定義 2.20 (1) 複素変数 z が α に限りなく近付くとき (ただし α には一致しないものとする), その近付き方によらず, $f(z)$ が複素数 β に限りなく近付くのであれば, $z \to \alpha$ **のときの** $f(z)$ **の極限値は** β **である**または $z \to \alpha$ **のとき** $f(z)$ **は** β **に収束する**という.

収束 (2) (p.64)

定義 2.20 (2) $z \to \alpha$ のときの $f(z)$ の極限値が β であることを以下のように書く:

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = \beta \text{ または } f(z) \to \beta \, (z \to \alpha)$$

収束 (3)

- 「限りなく近付く」「近付き方によらない」という言い方は「何を言っているのかよくわからない」
- もう少し正確にならないか
- 「近付き方によらない」ことを言うためには距離を使うのがよい

収束 (4)

「$f(z)$ と β の距離が一定未満」であるためには「z と α の距離が一定未満」であればよい

という言い換えをしてみる

収束 (5)

$f(z)$ と β の距離が ε 未満であることは

$$|f(z) - \beta| < \varepsilon$$

と書ける

イプシロン

ϵ, ε

ギリシア文字

字体が 2 種類あるので注意

収束 (5)

z と α の距離が δ 未満であることは

$$|z - \alpha| < \delta$$

と書ける

収束 (6)

『「$f(z)$ と β の距離が一定未満」であるためには「z と α の距離が一定未満」であればよい』という文は,

- $|z-\alpha| < \delta$ なら $|f(z)-\beta| < \varepsilon$
- ε を決めれば対応する δ が決まる

というように書ける

収束 (7)

z が α と一致したら困る場合には

$$0 < |z - \alpha| < \delta$$

とすればよい

収束 (8) (p.65)

準備が長くなったが，これでようやく定義 2.20 を p.65 の記号を使って書き直すことができる:

収束 (9) (p.65)

定義 2.20(3) 複素数 α, β に対して

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z, 0 < |z - \alpha| < \delta \Rightarrow |f(z) - \beta| < \varepsilon$$

となるとき, $z \to \alpha$ のときの $f(z)$ の極限値は β であるまたは $z \to \alpha$ のとき $f(z)$ は β に収束するという.

- $A \to B$ は「A ならば B」という意味

収束 (10)

- 次に, z が「限りなく大きくなる」という状況を考える
- やはり「どのように大きくなっても」という定式化をしたい
- このためには「z の絶対値が大きくなる」という言い方をすればよい

収束 (11)

- 「z がどんどん大きくなる」という状況は, どんな $R > 0$ を取っても $|z| > R$ とできるというふうに書ける

収束 (10) (p.65)

定義　複素数 β に対して $\forall\varepsilon > 0, \exists R > 0, \forall z, |z| > R \Rightarrow |f(z) - \beta| < \varepsilon$ となるとき, $f(z)$ は無限遠点で極限値 β を持つといい, 以下のように書く.

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \beta \text{ または } f(z) \to \beta\,(z \to \infty)$$

収束 (11) (p.66)

定義 2.21(1) $z \to \alpha$ としたときの $f(z)$ の極限が定まらない場合,

$$z \to \alpha \text{ のとき } f(z) \text{ は発散する}$$

という.

収束 (12) (p.66)

定義 2.21(2) $z \to \alpha$ としたとき $|f(z)|$ が限りなく大きくなる場合,

$z \to \alpha$ のとき $f(z)$ は無限大に発散する

といい, 以下のように書く.

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = \infty \text{ または } f(z) \to \infty \; (z \to \alpha)$$

- 「発散」と「無限大に発散」は意味が違うので注意

- 「$z \to \alpha$ で $f(z)$ が無限大に発散」を先ほど定義した論理記号を使って書くと

$$\forall R > 0, \exists \delta > 0, \forall z,$$
$$|z - \alpha| < \delta \Rightarrow |f(z)| > R$$

収束 (13) (p.66)

定義 $|z|$ が限りなく大きくなるとき, $|f(z)|$ も限りなく大きくなる場合,

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \text{ または } f(z) \to \infty \, (z \to \infty)$$

と書く.

「$|z|$ が限りなく大きくなるとき, $|f(z)|$ も限りなく大きくなる」を論理記号を使って書くと

$$\forall R > 0, \exists R' > 0, \forall z,$$
$$|z| > R' \Rightarrow |f(z)| > R$$

この講義ではε, δを使った記法には深入りしない

収束 (14) (p.66)

定理 2.8 $f(z)$, $g(z)$ および β, γ に対し, $\lim_{z\to\alpha} f(z) = \beta$, $\lim_{z\to\alpha} g(z) = \gamma$, であるとき,

$$\lim_{z\to\alpha}(f \pm g)(z) = \beta \pm \gamma \qquad \text{(複合同順)}$$

$$\lim_{z\to\alpha} f(z)g(z) = \beta\gamma$$

$$\lim_{z\to\alpha} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\beta}{\gamma} \qquad (\gamma \neq 0 \text{ のとき})$$

- 定理 2.8 が成り立つ理由の説明には ε, δ を使った記法を多用する必要があるので, この講義では立ち入らない.

- 例 2.8 は各自で読んでおくこと

収束 (15) (p.66)

定理 2.9 $\alpha = a + ib,\ \beta = c + id,\ z = x + iy,$
$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ としたとき,

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = \beta \overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} \lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x, y) = c$$

$$\text{かつ} \lim_{(x,y)\to(a,b)} v(x, y) = d$$

- $(x, y) \to (a, b)$ とは, 平面上の点 (x, y) が点 (a, b) に限りなく近付くこと

- $\boldsymbol{z} = (x, y)$, $\boldsymbol{\alpha} = (a, b)$ としたとき, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x, y) = c$ の定義は次の通り:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall\boldsymbol{z},$$
$$0 < \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\alpha}\| < \delta \Rightarrow |u(\boldsymbol{z}) - c| < \varepsilon$$

$$
\begin{aligned}
&\text{複素関数の収束：} && \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z, \\
&\quad 0 < |z - \alpha| < \delta && \Rightarrow |f(z) - \beta| < \varepsilon \\
&\mathbb{R}^2\ \text{の関数の収束：} && \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \boldsymbol{z}, \\
&\quad 0 < \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\alpha}\| < \delta && \Rightarrow |u(\boldsymbol{z}) - c| < \varepsilon
\end{aligned}
$$

言っていることは同じ

演習 4-4

空欄を埋めよ.

演習 4-4 解答

$$\lim_{z \to 0} \frac{z+i}{z+2i} = \boxed{1/2} \qquad \lim_{z \to -i} \frac{2}{z-i} = \boxed{i}$$

連続関数 (1) (p.68)

定義 2.22 関数 $w = f(z)$ が定義域 D の点 α で連続であるとは,

$$\lim_{z\to\alpha} f(z) = f(\alpha)$$

となることをいう. 定義域のすべての点で $w = f(z)$ が連続であるとき, $w = f(z)$ は D において連続であるという.

- 定義 2.22 では z は定義域 D の点であること仮定されている. これを強調するなら

$$\lim_{\substack{z\to\alpha \\ z\in D}} f(z) = f(\alpha)$$

と書くべきであろうが, このような書き方はふつう使われない.

連続関数 (2) (p.69)

定理 2.10　関数 $f(z)$ および $g(z)$ が D で連続であるとき, $f(z) \pm g(z)$, $f(z)g(z)$ は D で連続である．また, $f(z)/g(z)$ は定義域から $g(z) = 0$ となる点を除いた点で連続である.

定理 2.10(追加)　関数 $f(z)$ が D で連続であるとき, 複素数 γ に対し, $\gamma f(z)$ は D で連続である.

連続関数 (3) (p.69)

定理 2.11 $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ としたとき, $f(z)$ が連続であるための必要十分条件は $u(x, y)$ および $v(x, y)$ が連続であることである.

$\boldsymbol{z} = (x, y)$, $\boldsymbol{\alpha} = (a, b)$, $u(x, y)$ が定義域を $D \in \mathbb{R}^2$ とする実数値関数としたとき, $u(x, y)$ が $\boldsymbol{\alpha}$ において連続であることの定義は以下の通り:

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \boldsymbol{z} \in D, \\ &\quad \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\alpha}\| < \delta \Rightarrow |u(\boldsymbol{z}) - u(\boldsymbol{\alpha})| < \varepsilon \end{aligned}$$

連続関数 (4) (p.69)

定理 2.12 関数 $f(z)$ が $z = z_0$ で連続, 関数 $g(w)$ が $w = f(z_0)$ で連続であるとき, $(g \circ f)(z) = g(f(z))$ は $z = z_0$ で連続である.

定理 2.13 関数 $f(z)$ の定義域が有界閉集合で, $f(z)$ が D において連続であるとき, $|f(z)|$ は D において最大値と最小値を取る.

- $f(z) = z$ は連続である.
(理由: $\lim_{z\to\alpha} f(z) = \lim_{z\to\alpha} z = \alpha$)

- 定理 2.10(および追加した分) を使うと, 複素係数の多項式が定める関数 $p(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n$ は連続であることがわかる.

- $p(z), q(z)$ を複素係数の多項式としたとき, 定理 2.10 により, $g(z) = p(z)/q(z)$ は $q(z) \neq 0$ を満たす点において連続である.