工業数学 IV 第 4 回
複素関数

複素関数 (1) (p.56)

定義 2.9 変数 x,y が独立で, z の値が x と y から定まるとき, x と y を独立変数, z を従属変数という

複素関数 (2) (p.56)

定義 2.10 　複素数 z が $z = x + iy$ で与えられ, x と y が独立な実変数であるとき, z を複素変数という. なお, 実数値を取る変数を実変数という.

複素関数 (3) (p.56)

- 実変数とは, 実軸上を自由に動きまわる点のこと
- 複素変数とは, 複素平面内を自由に動きまわる点のこと

複素関数 (4) (p.56)

定義 2.11 (1) 複素平面の集合 S が与えられ, S の各点 z にある複素数 $f(z)$ を対応させる規則が定まっているとき, f を**複素関数**という. この対応を

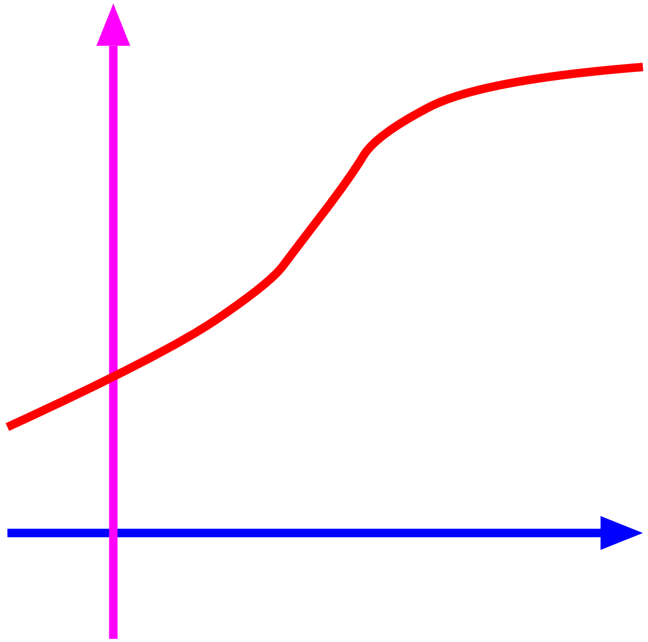
$$w = f(z)$$

と書く. また, 集合 S を f の**定義域**という.

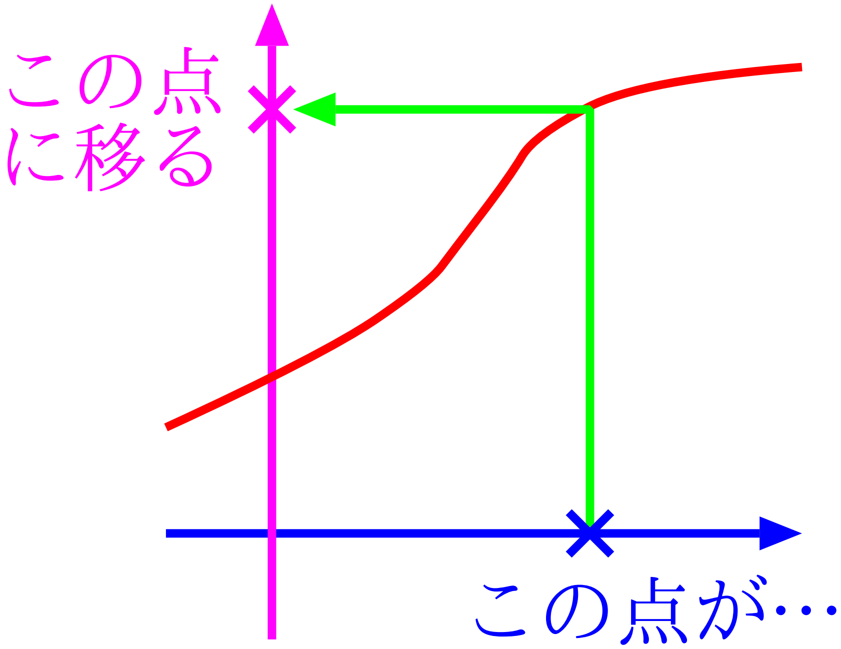
複素関数 (4) (p.56)

定義 2.11 (2) なお, 実数の集合 S が与えられ, S の各点 x にある実数 $f(x)$ を対応させる規則が定まっているとき, f を実関数という.

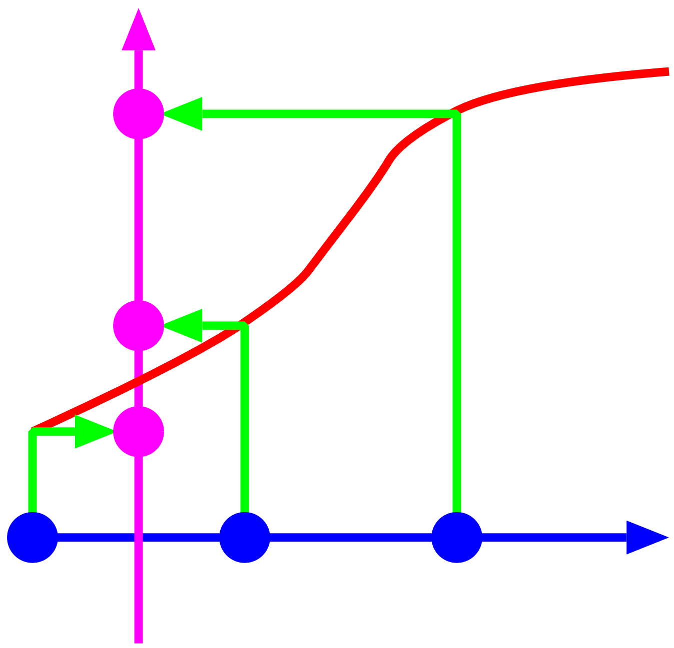
- 実関数のグラフを描くと…
    - ▷ 定義域, 値域ともに 1 次元
    - ▷ グラフは 2 次元
    - ▷ このタイプのグラフは見慣れている筈



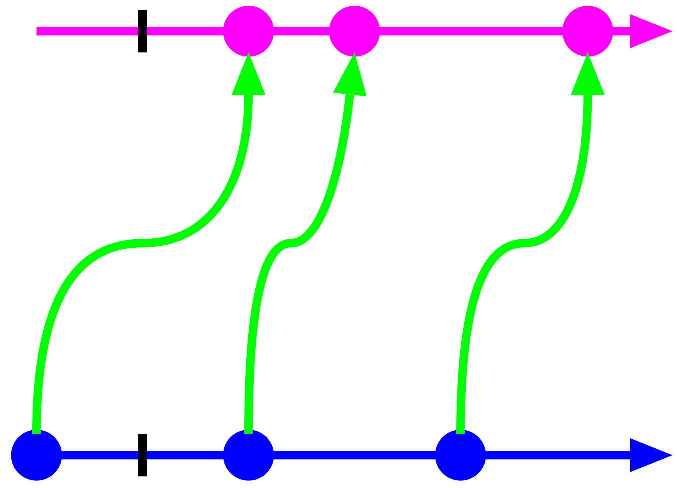
実関数のグラフは…



定義域の点と
値域の点の対応

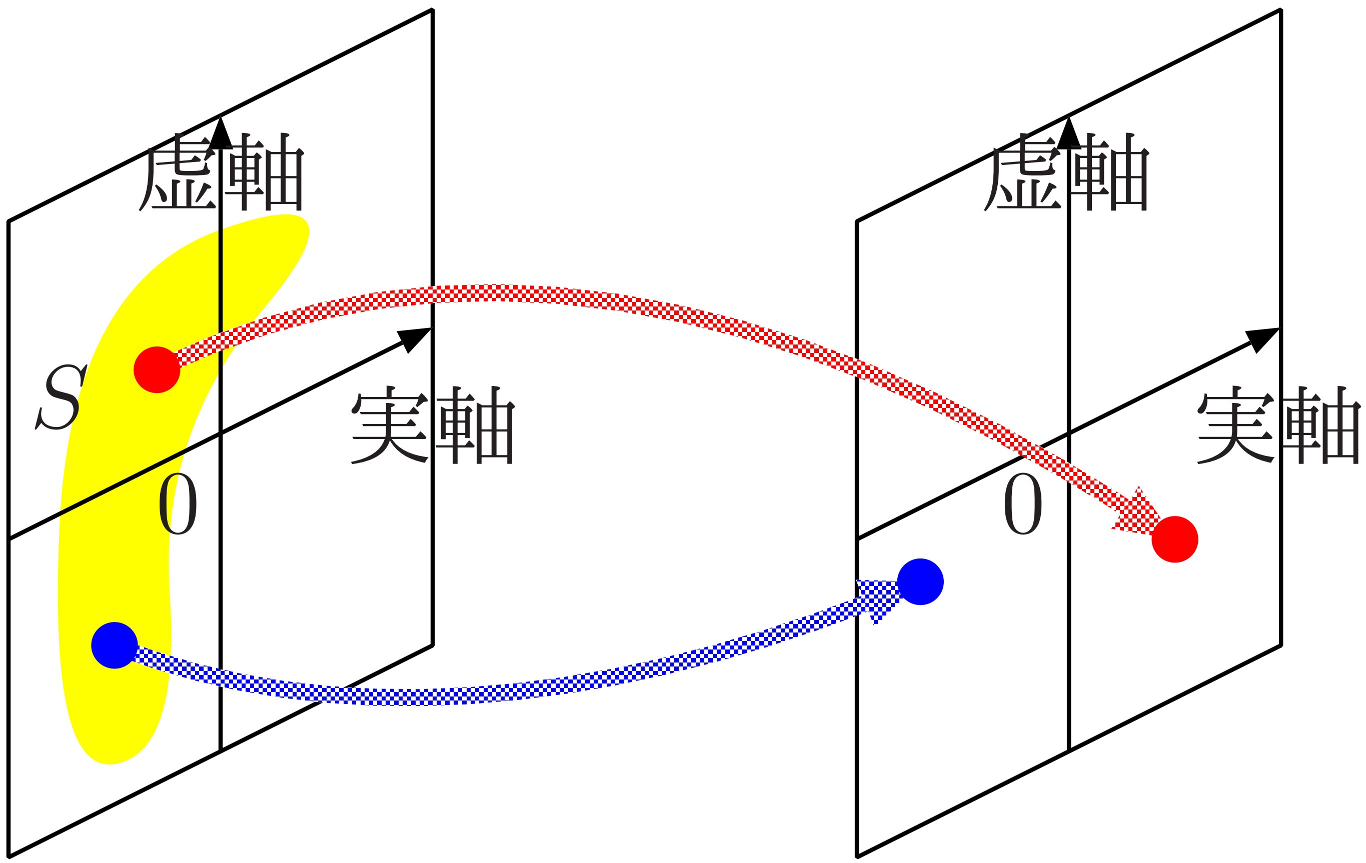


定義域の点と
値域の点の対応は…



こんなふうにも書ける

- 複素関数のグラフを (無理に) 描くと…
  - ▷ 定義域, 値域ともに 2 次元
  - ▷ グラフは 4 次元, 平面には描画不可
  - ▷ 2 番目の書き方は次ページのようになる.



複素関数の定義域と値域の対応

- 複素関数のグラフの描き方として一般的なのは以下の 3 通り.

- ▷ 複素関数の実部と虚部を分けて描画する.
  - ◇ 実部および虚部のグラフは, ともに, 定義域が複素平面, 値域が実軸の 3 次元グラフになる.

- ▷ 複素関数の絶対値と偏角を分けて描画する.
  - ◇ 実変数の複素関数 (周波数特性など) の描画によく用いらる (2 枚の平面グラフが得られる).
  - ◇ 複素変数の複素関数にこの描き方を適用すると, 2 枚の 3 次元グラフが得られる.

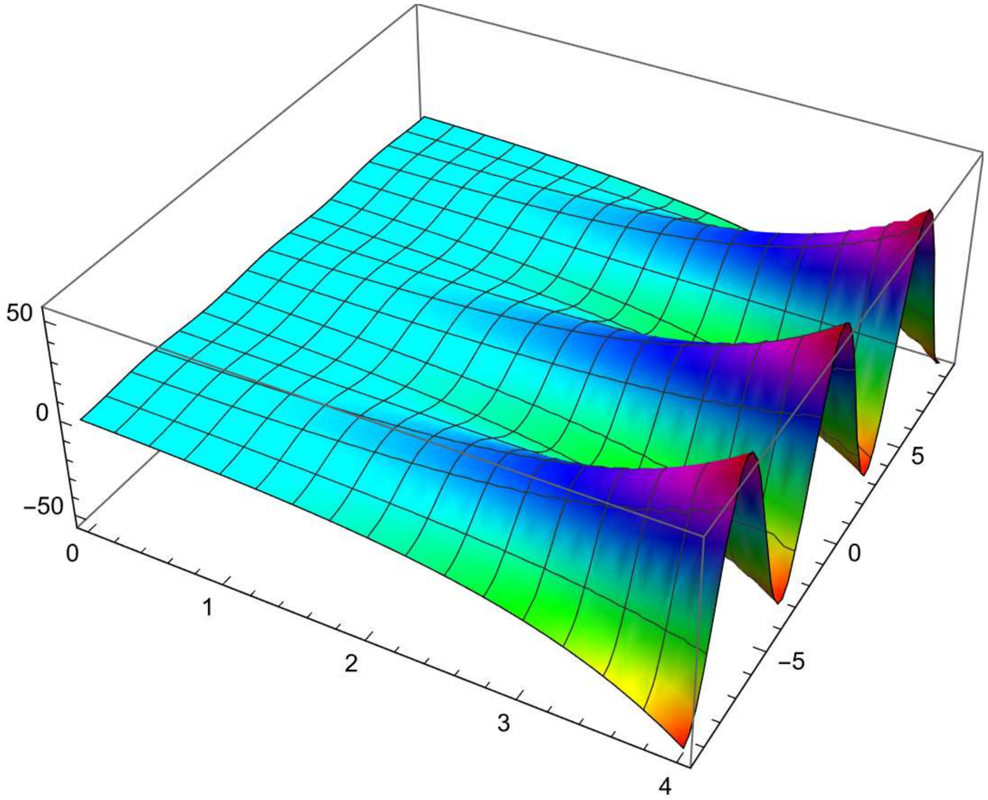
- 定義域の特徴的な図形と値域の特徴的な図形の対応関係を描画する.
    - よく用いられるのは, 座標軸に並行な格子, 同心円など.

- 1番目の描き方で

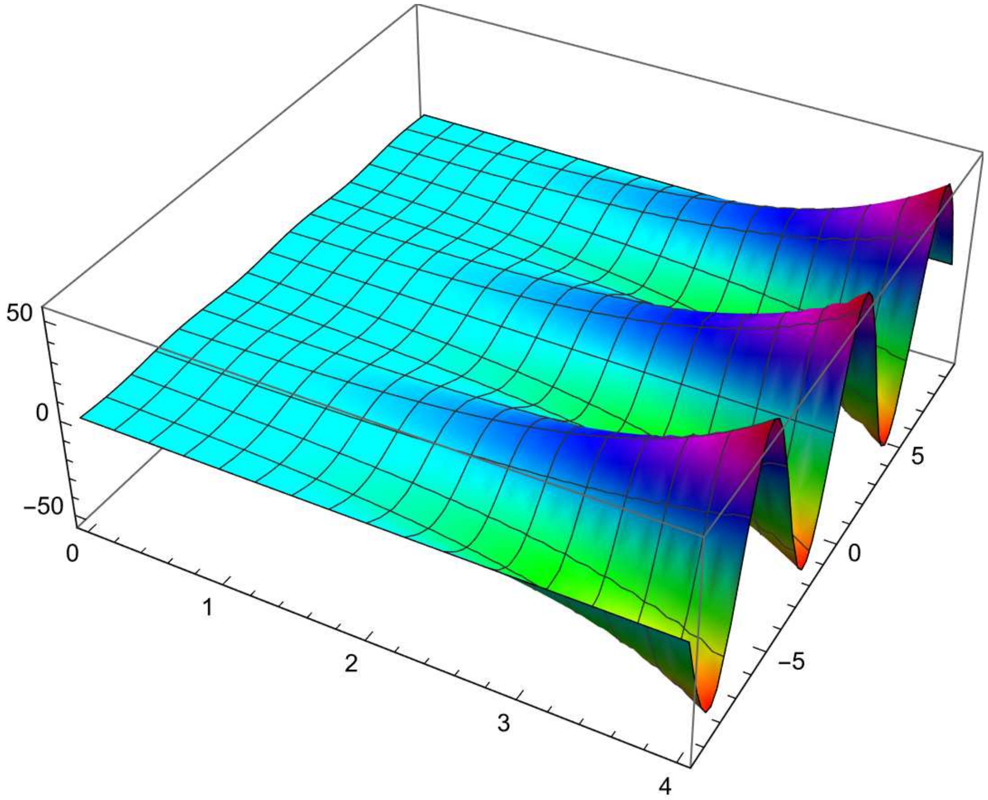
$$f(z) = e^z$$

のグラフを描画したものは次ページの通り.
ただし

$$0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 4, -3\pi \leq \mathrm{Im}\, z \leq 3\pi$$



e^z の実部



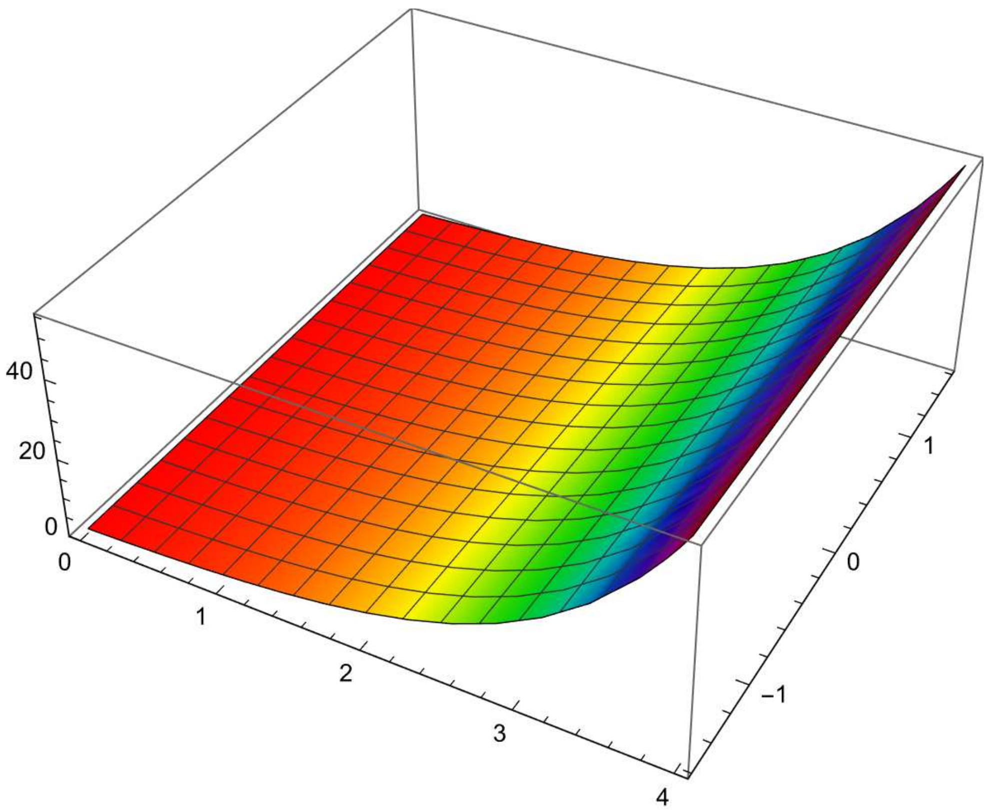
e^z の虚部

- 2 番目の描き方で

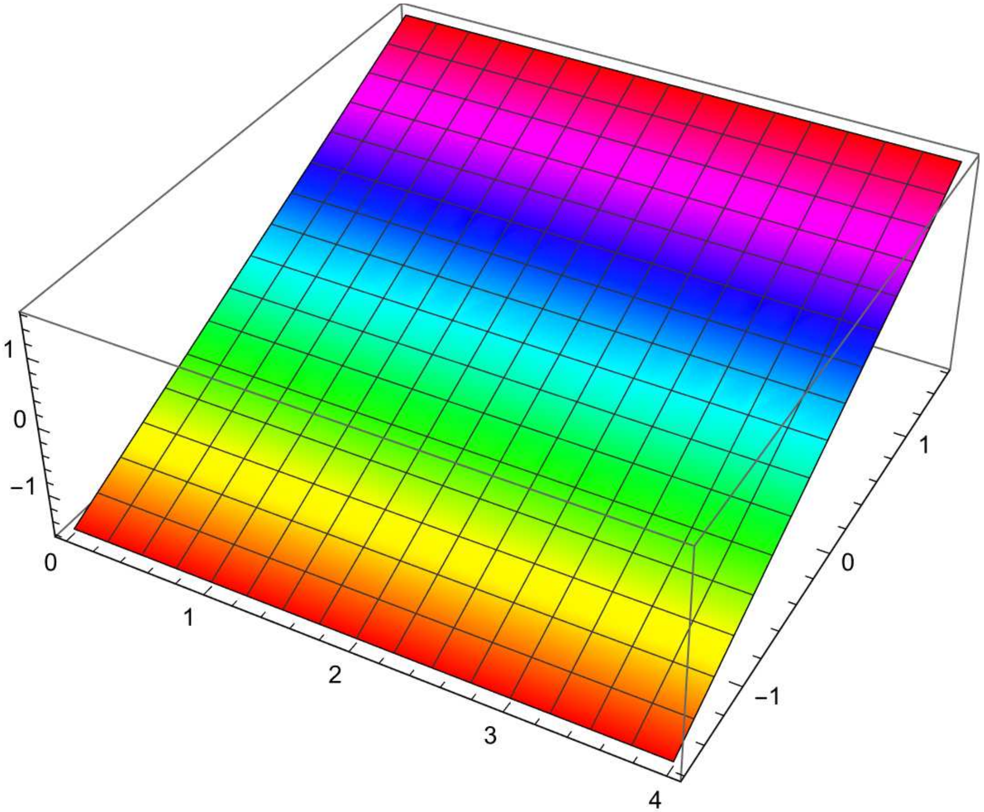
$$f(z) = e^z$$

のグラフを描画したものは次ページの通り.
ただし

$$0 \leq \operatorname{Re} z \leq 4, -\pi/2 \leq \operatorname{Im} z \leq \pi/2$$



e^z の絶対値

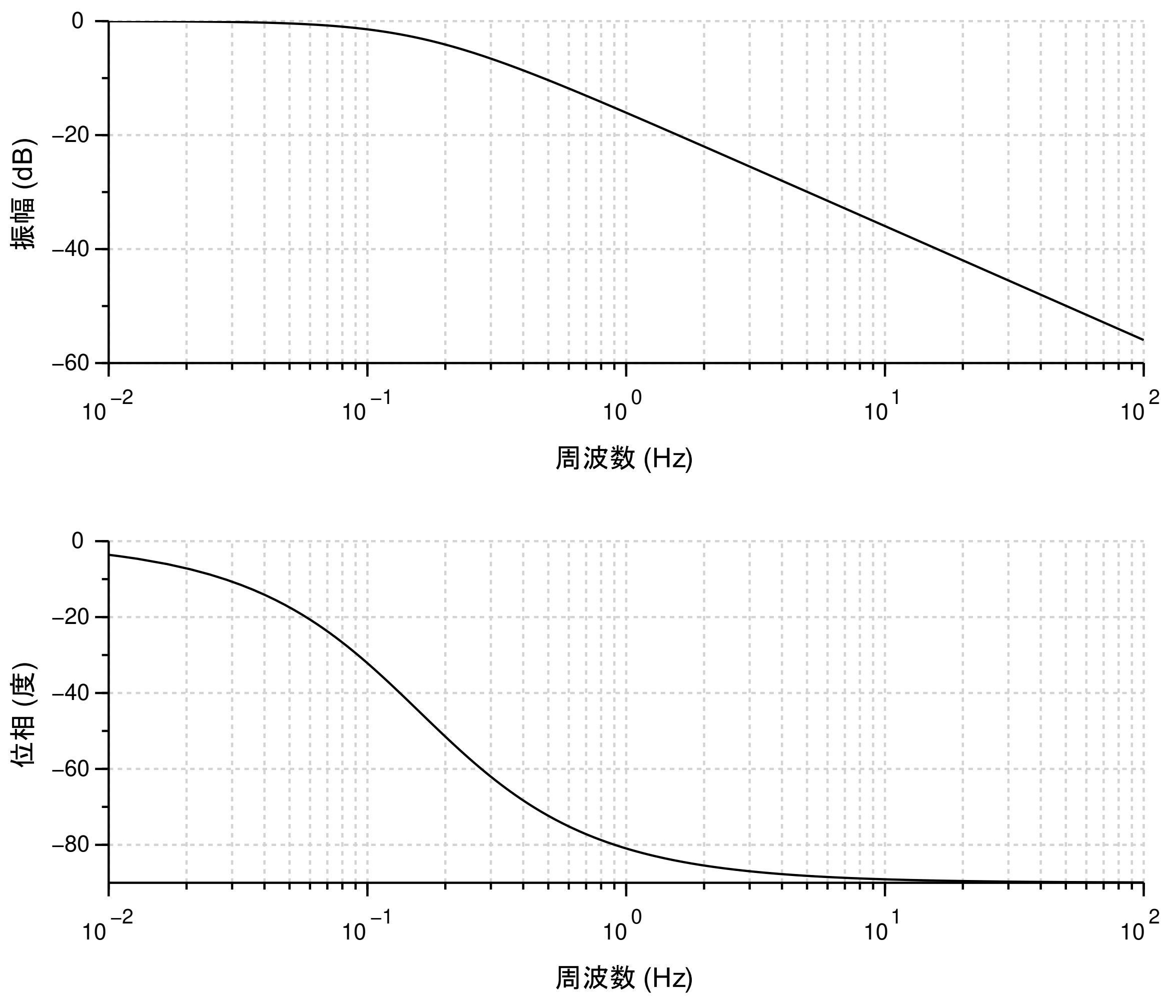


e^z の偏角

- 2 番目の描き方は周波数応答の描画によく用いられる．次ページに

$$\frac{1}{1+s}$$

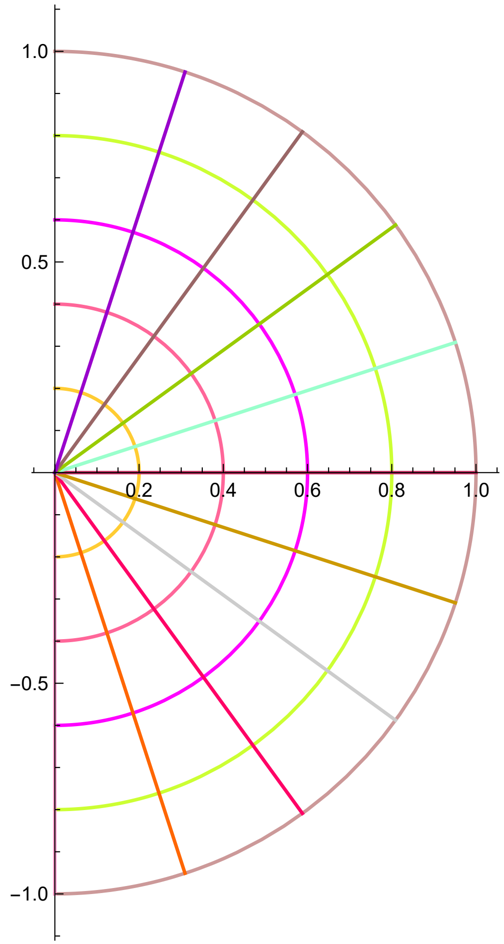
の周波数応答をこの描き方で描画したものを次ページに示す．


0
−20
−40
−60
振幅 (dB)
10^{-2} 10^{-1} 10^{0} 10^{1} 10^{2}
周波数 (Hz)
0
−20
−40
−60
−80
位相 (度)
10^{-2} 10^{-1} 10^{0} 10^{1} 10^{2}
周波数 (Hz)

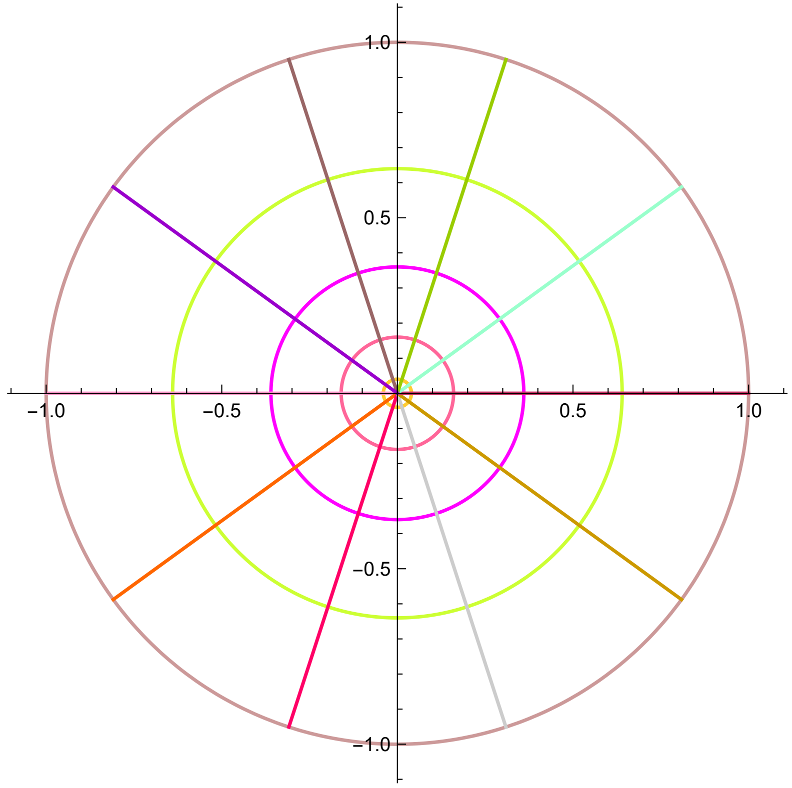
- 3 番目の描き方で

$$f(z) = z^2$$

の定義域と値域の対応を描画したものを次ページに示す.



定義域の図形



値域の図形

複素関数 (5) (p.57)

- $z = x + iy$, $w = u + iv$ としたとき, z に w を対応させる規則は, 点 (x, y) に点 (u, v) を対応させる規則と解釈することができる.

- 以上の解釈に基づき,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

と書く (わかりにくい記法なので注意).

複素関数 (6) (p.57)

定義　変数 z が動く複素平面を z **平面**, 変数 w が動く複素平面を w **平面**という.

- 定義域の与え方には…
  - ▷ 関数の定義域をあらかじめ与える (定義 2.11)
  - ▷ 関数の定義式から定義域を定める (例 2.3 (p.57))

  違う流儀なので注意
- 例 2.4 は各自で読んでおくこと.

- 矢印の記号には使い分けがある!

$$f : S \to \mathbb{C}$$

f の定義域は S, 値域は $\mathbb{C}$

$$f : z \mapsto w$$

f は複素数 z を複素数 w に写す,

あるいは f による z の像は w

$$\rightarrow \quad \mapsto$$

意味が違うので注意

領域 (1) (p.61)

定義 2.12 点 z_0 を中心とする半径 δ の開円板を z_0 の δ 近傍という． z_0 の δ 近傍を $U_\delta(z_0)$ で表す．

領域 (2) (p.61)

定義 2.13　複素平面の集合 S の点 z_0 が

$$\exists\delta > 0, U_\delta(z_0) \subset S$$

を満たすとき, z_0 を S の内点という. S の内点を集めたものを S の内部といい, $\mathring{S}$ あるいは $\mathrm{Int}\, S$ であらわす.

- $\forall x$: 任意の x に対し…
  「$\forall$」は「任意」「勝手に取った」という意味

- $\exists \delta$: ある δ が存在し…
  「$\exists$」は「存在する」という意味

- $x \in S$: x は集合 S の要素
  $S \ni x$ という書き方もある

- $A \subset B$: A は B の部分集合
  $B \supset A$ という書き方もある

領域 (3) (p.61)

定義 2.14　複素平面の集合 S が $S = \mathring{S}$ を満たすとき, S を開集合という. また, S の補集合が開集合となるとき, S を閉集合という.

定義 (補集合)　集合 S に対し, S に属さない点を集めたものを S の補集合といい, S^c で表す.

注意: 補集合の記号は教科書によってまちまち

領域 (4) (pp.61 ～ 62)

定義 2.15 S の補集合の内点を S の外点という.

定義 2.16 S の内点でも外点でもない点を S の境界点という. S の境界点の集合を S の境界といい, ∂S で表す. $S \cup \partial S$ を S の閉包といい, $\overline{S}$, $\mathrm{Cl}\, S$ といった記号で表す.

- $A \cup B$: A と B の和集合 (少なくともどちらか一方に属する)
- $A \cap B$: A と B の共通部分
- $A - B$, $A \setminus B$: 差集合, 集合 A の要素から集合 B の要素を除いたもの

領域 (5) (p.63)

定義 2.17 集合 S の任意の 2 点が S 内の連続曲線で結べるとき, S は弧状連結であるという.

定義 2.18 弧状連結な開集合のことを領域または開領域という. 領域の閉包を閉領域という.

定義 2.19 $\exists r,\ S \subset U_r(0)$ となるとき, S は有界であるという.

収束 (1) (p.64)

定義 2.20 (1)　複素変数 z が α に限りなく近付くとき (ただし α にはー致しないものとする), その近付き方によらず, $f(z)$ が複素数 β に限りなく近付くのであれば, $z \to \alpha$ のときの $f(z)$ の極限値は β であるまたは $z \to \alpha$ のとき $f(z)$ は β に収束するという.

収束 (2) (p.64)

定義 2.20 (2)　$z \to \alpha$ のときの $f(z)$ の極限値が β であることを以下のように書く:

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = \beta \text{ または } f(z) \to \beta \, (z \to \alpha)$$

収束 (3)

- 「限りなく近付く」「近付き方によらない」という言い方は「何を言っているのかよくわからない」
- もう少し正確にならないか
- 「近付き方によらない」ことを言うためには距離を使うのがよい

収束 (4)

z と α の距離が一定未満
ならば
$f(z)$ と β の距離が一定未満

というふうに言い換えてみる.

収束 (5)

$f(z)$ と β の距離が ε 未満であることは

$$|f(z) - \beta| < \varepsilon$$

と書ける

イプシロン

$$\epsilon, \varepsilon$$

ギリシア文字

字体が２種類あるので注意

収束 (5)

z と α の距離が δ 未満であることは

$$|z - \alpha| < \delta$$

と書ける

収束 (6)

『「$f(z)$ と β の距離が一定未満」であるためには「z と α の距離が一定未満」であればよい』という文は,

- $|z - \alpha| < \delta$ なら $|f(z) - \beta| < \varepsilon$
- ε を決めれば対応する δ が決まる

というように書ける

収束 (7)

z が α と一致したら困る場合には

$$0 < |z - \alpha| < \delta$$

とすればよい

収束 (8) (p.65)

準備が長くなったが，これでようやく定義 2.20 を p.65 の記号を使って書き直すことができる:

収束 (9) (p.65)

定義 2.20(3) 複素数 α, β に対して

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z, 0 < |z - \alpha| < \delta \Rightarrow |f(z) - \beta| < \varepsilon$$

となるとき, $z \to \alpha$ のときの $f(z)$ の極限値は β であるまたは $z \to \alpha$ のとき $f(z)$ は β に収束するという.

- $A \Rightarrow B$ は「A ならば B」という意味

収束 (10)

- 次に, z が「限りなく大きくなる」という状況を考える
- やはり「どのように大きくなっても」という定式化をしたい
- このためには「z の絶対値が大きくなる」という言い方をすればよい

収束 (11)

- 「z がどんどん大きくなる」という状況は, どんな $R > 0$ を取っても $|z| > R$ とできるというふうに書ける

収束 (10) (p.65)

定義 複素数 β に対して

$\forall\varepsilon > 0, \exists R > 0, \forall z, |z| > R \Rightarrow |f(z) - \beta| < \varepsilon$ となるとき, $f(z)$ **は無限遠点で極限値** β **を持つ**といい, 以下のように書く.

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \beta \quad \text{または} \quad f(z) \to \beta \ (z \to \infty)$$

収束 (11) (p.66)

定義 2.21(1) $z \to \alpha$ としたときの $f(z)$ の極限が定まらない場合,

$z \to \alpha$ のとき $f(z)$ は**発散**する

という.

収束 (12) (p.66)

定義 2.21(2) $z \to \alpha$ としたとき $|f(z)|$ が限りなく大きくなる場合,

$z \to \alpha$ のとき $f(z)$ は無限大に発散する

といい, 以下のように書く.

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = \infty \text{ または } f(z) \to \infty \ (z \to \alpha)$$

- 「発散」と「無限大に発散」は意味が違うので注意

- 「$z \to \alpha$ で $f(z)$ が無限大に発散」を先ほど定義した論理記号を使って書くと

$$\forall R > 0, \exists \delta > 0, \forall z,$$
$$|z - \alpha| < \delta \Rightarrow |f(z)| > R$$

収束 (13) (p.66)

定義　$|z|$ が限りなく大きくなるとき, $|f(z)|$ も限りなく大きくなる場合,

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \text{ または } f(z) \to \infty \,(z \to \infty)$$

と書く.

「$|z|$ が限りなく大きくなるとき, $|f(z)|$ も限りなく大きくなる」を論理記号を使って書くと

$$\forall R > 0, \exists R' > 0, \forall z,$$
$$|z| > R' \Rightarrow |f(z)| > R$$

この講義ではε, δを使った記法には深入りしない

収束 (14) (p.66)

定理 2.8 $f(z)$, $g(z)$ および β, γ に対し, $\lim_{z \to \alpha} f(z) = \beta$, $\lim_{z \to \alpha} g(z) = \gamma$, であるとき,

$$\lim_{z \to \alpha} (f \pm g)(z) = \beta \pm \gamma \qquad (\text{複合同順})$$

$$\lim_{z \to \alpha} f(z)g(z) = \beta\gamma$$

$$\lim_{z \to \alpha} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\beta}{\gamma} \qquad (\gamma \neq 0 \text{ のとき})$$

- 定理2.8が成り立つ理由の説明にはε, δを使った記法を多用する必要があるので，この講義では立ち入らない.

- 例2.8は各自で読んでおくこと

収束 (15) (p.66)

定理 2.9 $\alpha = a + ib,\ \beta = c + id,\ z = x + iy,$
$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ としたとき,

$$\lim_{z\to\alpha} f(z) = \beta$$
$$\overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} \lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x,y) = c$$
$$\text{かつ} \lim_{(x,y)\to(a,b)} v(x,y) = d$$

- $(x, y) \to (a, b)$ とは, 平面上の点 (x, y) が点 (a, b) に限りなく近付くこと

- $\boldsymbol{z} = (x, y)$, $\boldsymbol{\alpha} = (a, b)$ としたとき, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x, y) = c$ の定義は次の通り:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall\boldsymbol{z},$$
$$0 < \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\alpha}\| < \delta \Rightarrow |u(\boldsymbol{z}) - c| < \varepsilon$$

$$
\begin{aligned}
&\text{複素関数の収束：} && \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall z,\\
&\quad 0<|z-\alpha|<\delta && \Rightarrow |f(z)-\beta|<\varepsilon\\
&\mathbb{R}^2\text{ の関数の収束：} && \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall \boldsymbol{z},\\
&\quad 0<\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\alpha}\|<\delta && \Rightarrow |u(\boldsymbol{z})-c|<\varepsilon
\end{aligned}
$$

言っていることは同じ

連続関数 (1) (p.68)

定義 2.22　関数 $w = f(z)$ が定義域 D の点 α で**連続**であるとは，

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = f(\alpha)$$

となることをいう．定義域のすべての点で $w = f(z)$ が連続であるとき，$w = f(z)$ は **D において連続**であるという．

- 定義 2.22 では z は定義域 D の点であること仮定されている．これを強調するなら

$$\lim_{\substack{z\to\alpha \\ z\in D}} f(z) = f(\alpha)$$

と書くべきであろうが，このような書き方はふつう使われない．

連続関数 (2) (p.69)

定理 2.10　関数 $f(z)$ および $g(z)$ が D で連続であるとき, $f(z) \pm g(z)$, $f(z)g(z)$ は D で連続である．また, $f(z)/g(z)$ は定義域から $g(z) = 0$ となる点を除いた点で連続である.

定理 2.10(追加)　関数 $f(z)$ が D で連続であるとき, 複素数 γ に対し, $\gamma f(z)$ は D で連続である.

連続関数 (3) (p.69)

定理 2.11 $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ としたとき，$f(z)$ が連続であるための必要十分条件は $u(x, y)$ および $v(x, y)$ が連続であることである．

$\boldsymbol{z} = (x, y)$, $\boldsymbol{\alpha} = (a, b)$, $u(x, y)$ が定義域を $D \in \mathbb{R}^2$ とする実数値関数としたとき, $u(x, y)$ が $\boldsymbol{\alpha}$ において連続であることの定義は以下の通り:

$$
\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \boldsymbol{z} \in D, \\
&\quad \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\alpha}\| < \delta \Rightarrow |u(\boldsymbol{z}) - u(\boldsymbol{\alpha})| < \varepsilon
\end{aligned}
$$

連続関数 (4) (p.69)

定理 2.12 関数 $f(z)$ が $z = z_0$ で連続, 関数 $g(w)$ が $w = f(z_0)$ で連続であるとき, $(g \circ f)(z) = g(f(z))$ は $z = z_0$ で連続である.

定理 2.13 関数 $f(z)$ の定義域が有界閉集合で, $f(z)$ が D において連続であるとき, $|f(z)|$ は D において最大値と最小値を取る.

- $f(z) = z$ は連続である.
  (理由: $\lim_{z \to \alpha} f(z) = \lim_{z \to \alpha} z = \alpha$)

- 定理 2.10(および追加した分) を使うと, 複素係数の多項式が定める関数 $p(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n$ は連続であることがわかる.

- $p(z), q(z)$ を複素係数の多項式としたとき, 定理 2.10 により, $g(z) = p(z)/q(z)$ は $q(z) \neq 0$ を満たす点において連続である.

実数の連続性

- 実数は連続性という重要な性質を持っていた
- これは次のような性質:
  上に有界な実数の部分集合は上限を持つ
- 上記は微分積分学の範囲であるが, 用語の定義を復習しておく

- B を実数の部分集合としたとき, B の最小限とは, $m \in B$ であって,

$$\forall x \in B, \quad m \leq x$$

となるものを言う.

- 最小限は, 存在することもあれば, しないこともある. たとえば, 閉区間 $[-1, 1]$ には最小限が存在するが, 開区間 $(-1, 1)$ には最小限は存在しない.

- $A \subset \mathbb{R}$ が上に有界であるとは, ある $b \in \mathbb{R}$ が存在し,

$$\forall a \in A, a \leq b$$

  となることを言う.
- 上界は唯一ではない. b が A の上界であれば, b より大きい任意の実数も A の上界となる.

- A を上に有界な集合とし, $U(A)$ を A の上界全体を集めた集合とする
- 集合 $U(A)$ には必ず最小限が存在するというのが, 実数の連続性が述べていることである. この最小元を A の上限と呼ぶ.
- 実数の連続性には等価な色々な述べ方がある (教科書によって記述が異なるので注意; 等価性の証明には手間がかかることが多い)

- 微分や積分に関連した性質を調べるときには, 実数の連続性が本質的に必要
- これが, 高等学校以降の教育過程で微分積分学を学ぶ際に, 数の体系として実数が用いられている理由

- 2 次元数空間 $\mathbb{R}^2$, 3 次元数空間 $\mathbb{R}^3$, さらに一般化して n 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ でも, ベクトルの各成分については (実数なのだから) 連続性が成り立っている
- したがって, 多変数関数の微分積分学 (これは微分積分学 ST II の範囲) も問題なく構築できる

- 複素数は実体としては 2 次元数空間 $\mathbb{R}^2$ だから, 複素関数の微分積分学も問題なく構築できる (これがこれからこの講義で学ぶ内容)