電 210 電気数学 IV
第 3 回
複素数 (続き)

前回の復習 (1)

- 複素数 $z = x + iy$ の絶対値を r, 偏角を θ とすると
  - $\triangleright$ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,
  - $\triangleright$ $x \neq 0$ なら $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$
  - $\triangleright$ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ (極形式)

前回の復習 (2)

- z の絶対値を $|z|$, 偏角を $\arg z$ という記号で表す
- 偏角 $\arg z$ には 2π の整数倍の不定性がある
- 偏角の不定の部分を調整して角度が $(-\pi, \pi]$ に収まるようにしたものを偏角の主値といい, $\mathrm{Arg}\, z$ と書く (大文字と小文字の違い)

前回の復習 (3)

- $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (オイラーの公式)
- 三角関数の加法定理:
  - ▷ $\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$
  - ▷ $\sin(\theta + \varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi$

$1/z$ の極形式

$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ に対し,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

となる.

理由　$(re^{i\theta}) \times (\frac{1}{r}e^{-i\theta}) = (r \times \frac{1}{r})e^{i(\theta+(-\theta))} = 1$

$z = re^{i\theta}$ に対し

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

偏角と絶対値の性質 (1) (p.24)

定理 1.3 (1) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ に対し, 以下が成立する:

$$
\begin{aligned}
|zw| &= |z||w|, & \arg(zw) &= \arg z + \arg w, \\
\left|\frac{z}{w}\right| &= \frac{|z|}{|w|}, & \arg\left(\frac{z}{w}\right) &= \arg z - \arg w
\end{aligned}
$$

偏角と絶対値の性質 (2) (p.24)

定理 1.3 (2) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ に対し, 以下が成立する:

$$
\begin{aligned}
&(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\
&\quad = \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi) \\
&||z| - |w|| \leq |z+w| \leq |z| + |w| \text{(三角不等式)}
\end{aligned}
$$

ロー

$$\rho$$

ギリシア文字

偏角と絶対値の性質 (3) (p.24)

定理 1.3 の説明 (1)

- まず次のことに注意する: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ だから

$$r = |z|, \quad \theta = \arg z, \quad \rho = |w|, \quad \varphi = \arg w$$

- $z = re^{i\theta}$, $w = \rho e^{i\varphi}$ と書き直す

偏角と絶対値の性質 (4) (p.24)

定理 1.3 の説明 (2)

- $zw = (re^{i\theta}) \times (\rho e^{i\varphi}) = r\rho e^{i(\theta+\varphi)}$ だから
  - ▷ $|zw| = r\rho = |z||w|$
  - ▷ $\arg(zw) = \theta + \varphi = \arg z + \arg w$

偏角と絶対値の性質 (5) (p.24)

定理 1.3 の説明 (3)

- $\frac{1}{w} = \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi}$ だから
  $\frac{z}{w} = \left(re^{i\theta}\right)\left(\frac{1}{\rho} e^{-i\varphi}\right) = \frac{r}{\rho} e^{i(\theta-\varphi)}$, したがって

  ▷ $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{r}{\rho} = \frac{|z|}{|w|}$

  ▷ $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \theta - \varphi = \arg z - \arg w$

偏角と絶対値の性質 (6) (p.24)

定理 1.3 の説明 (4)

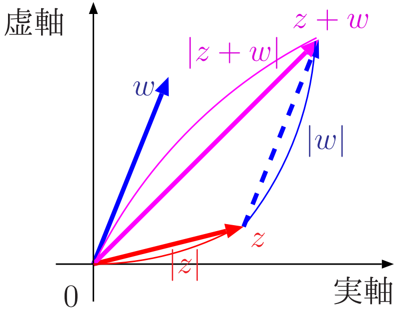
$$
\begin{aligned}
&(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi)\\
&\quad = \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)
\end{aligned}
$$

これは $e^{i\theta}e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$ を書き直しただけ

偏角と絶対値の性質 (7) (p.24)

- $|z + w| \leq |z| + |w|$ (三角不等式)

理由　三角形に関し,
ある辺の長さ $\leq$ 他の 2 辺の長さの和
(次ページに図);
数式を使った説明は教科書 25 ページ (各自で読んでおくこと)


虚軸
$z + w$
$|z + w|$
w
$|w|$
z
$|z|$
0
実軸

偏角と絶対値の性質 (8) (p.24)

- $|z| - |w| \leq |z+w|,\ |w| - |z| \leq |w+z|$

理由　$z = (z+w) - w$ だから

$|z| \leq |z+w| + |-w| = |z+w| + |w|$, よって

$|z| - |w| \leq |z+w|$

z と w を入れ換えると第 2 の不等式

偏角と絶対値の性質 (9) (p.24)

まとめて⋯

- $||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$

(三角不等式)

- 定理 1.3 の証明はオイラーの公式を使った方がずっと簡単

ド・モアブルの公式 (1)

定理 1.4 (ド・モアブルの公式)

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

理由 $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ となることをいえばよい. これをオイラーの公式にしたがって書き直すと定理 1.4 になる (詳細は数学的帰納法, 次ページ).

ド・モアブルの公式 (2)

- $n = 0$ のとき: 両辺ともに 1 だから等式成立
- $n \geq 0$ に対し $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ を仮定すると $(e^{i\theta})^{n+1} = (e^{i\theta})^n e^{i\theta} = e^{in\theta} e^{i\theta} = e^{in\theta + i\theta} = e^{i(n+1)\theta}$ となり, $(e^{i\theta})^{n+1} = e^{i(n+1)\theta}$ がいえる
- $n < 0$ のときは $n = -m$ として上記を使うと $(e^{i\theta})^n = (e^{i\theta})^{(-m)} = ((e^{i\theta})^{-1})^m = (e^{im\theta})^{-1} = e^{-im\theta} = e^{in\theta}$ (ただし次ページで述べる性質を使っている)

負のべきの性質　$n \geq 0$ に対し,

$$z^{-n} = (z^{-1})^n$$

理由　教科書 15 ページでは, $z^{-n} = (z^n)^{-1}$ と定義した．これが $(z^{-1})^n$ と一致することを見たいのであるが, $(z^{-1})^n z^n = (zz^{-1})^n = 1$ となることから $(z^{-1})^n = z^{-n}$ であることがわかる (ただし次ページで述べる性質を使っている)

このページの内容は細かい話なので理解しなくてよい

積のべき　$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $n \geq 0$ に対し,

$$(\alpha\beta)^n = \alpha^n \beta^n$$

理由　数学的帰納法による. $n = 0$ のときは両辺ともに 1. n で等式が成立すると仮定すれば, $(\alpha\beta)^{n+1} = (\alpha\beta)^n(\alpha\beta) = (\alpha^n\beta^n)(\alpha\beta) = (\alpha^n\alpha)(\beta^n\beta) = \alpha^{n+1}\beta^{n+1}$

このページの内容は細かい話なので理解しなくてよい

- 例 1.7 は各自で読んでおくこと

演習 3-1

各自で空欄を埋めよ．ただし定理 1.3 を利用すること．

演習 3-1 解答

$$\alpha = \boxed{\sqrt{2}}(\cos\boxed{\pi/4} + i\sin\boxed{\pi/4}) = \boxed{\sqrt{2}}e^{i\boxed{\pi/4}}$$
$$\beta = \boxed{\sqrt{2}}(\cos\boxed{-\pi/4} + i\sin\boxed{-\pi/4}) = \boxed{\sqrt{2}}e^{i\boxed{-\pi/4}}$$

である．このとき，$|\alpha\beta| = \boxed{2}$, $\mathrm{Arg}\,(\alpha\beta) = \boxed{0}$, $|\alpha/\beta| = \boxed{1}$, $\mathrm{Arg}\,(\alpha/\beta) = \boxed{\pi/2}$ である．また，$\alpha + \beta = \boxed{2}$ だから $|\alpha + \beta| = \boxed{2}$ であり，一方 $|\alpha| + |\beta| = \boxed{2\sqrt{2}}$ である．

演習 3-2

各自で空欄を埋めよ.

演習 3-2 解答

$1+\sqrt{3}i = \boxed{2}(\cos\boxed{\pi/3} + i\sin\boxed{\pi/3}) = \boxed{2}e^{i\boxed{\pi/3}}$ である.

よって, $(1+\sqrt{3}i)^3 = \boxed{8}e^{i\boxed{\pi}} = \boxed{-8} + \boxed{0}i$ である.

- これ以降, 教科書で飛ばすところはいちいち指示しない
- 各自で読んでおくべき箇所はその都度指示する

距離と図形 (1) (p.34)

定義 1.13　複素数 z と w の距離を $|w-z|$ により定義し, これを $d(z,w)$ と書く:

$$d(z,w) = |w-z|$$

距離と図形 (2) (p.35)

定理 1.5　z, w, u を複素数としたとき

(1) $d(z, w) \geq 0$, 等号成立は $z = w$ のときのみ

(2) $d(z, w) = d(w, z)$

(3) $d(z, w) \leq d(z, u) + d(u, w)$

理由　(1)(2) は定義からわかる; (3) は三角不等式そのもの

距離と図形 (3) (p.35)

α を複素数, k を正の実数としたとき,

- $|z-\alpha| = k$ を満たす複素数を集めたものは α を中心とする半径 k の円に一致する
- $|z-\alpha| < k$ を満たす複素数を集めたものは α を中心とする半径 k の開円板に一致する (開円板とは円周を除いた円板のこと)

距離と図形 (4) (p.35)

α を複素数, k を正の実数としたとき,

- $|z-\alpha| \leq k$ を満たす複素数を集めたものは α を中心とする半径 k の閉円板に一致する (閉円板とは円周を含む円板のこと)

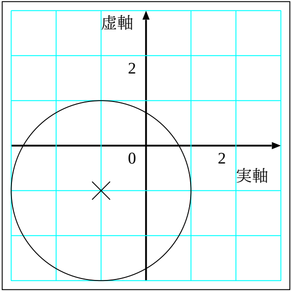
$z = x + iy$, $\alpha = a + ib$としたとき, $|z - \alpha|$は平面における$P(x, y)$と$Q(a, b)$の距離に一致する．したがって, 以上で述べたことは平面内の円, 開円板, 閉円板の性質と同一.

- 例 1.8 は各自で読んでおくこと.

演習 3-3

$\alpha = -1 - i$ とし, $|z - \alpha| = 2$ を満たす図形を書き込め.

演習 3-3 解答



n 乗根 (1) (p.40)

定義 1.14 $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ に対し, $w^n = z$ を満たす複素数 w を z の n 重根といい, $z^{1/n}$ あるいは $\sqrt[n]{z}$ であらわす.

$$\mathbb{N}$$

自然数全体をあらわす

n 乗根 (2)

n 乗根の説明の準備のために n 乗の性質を復習する．

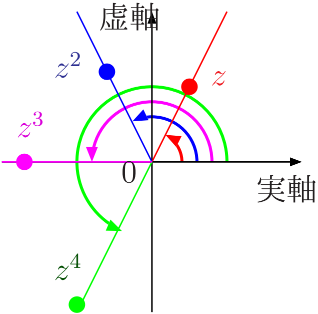
$z = re^{i\theta}$ とすると $z^n = r^n e^{in\theta}$ だから

$$|z^n| = |z|^n, \arg(z^n) = n \arg z$$

n 乗根 (3)

たとえば $z = 1.2e^{i\pi/3}$ なら

$$z^2 = 1.44e^{i2\pi/3}, z^3 = 1.728 \underbrace{e^{i\pi}}_{3\pi/3=\pi}, z^4 = 2.0736e^{i4\pi/3}$$


虚軸
z^2
z
z^3
0
実軸
z^4

定理 1.9 $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ に対し, $z \neq 0$ であれば, z は n 個の n 乗根を持つ. $z = re^{i\theta}$ としたとき, $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ を n 個の根とすると,

$$w_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$$

と書ける ($\sqrt[n]{r}$ は $r > 0$ の実数の範囲での非負の n 乗根).

n 乗根 (4) (p.41)

定理 1.9 の理由 $w_k^n = \left(\sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}\right)^n = re^{i(\theta+2k\pi)} = re^{i\theta}$ だから，$w_0, \ldots, w_{n-1}$ は z の n 乗根である． また，$e^{i\frac{0\times 2\pi}{n}}$, $e^{i\frac{1\times 2\pi}{n}}$, $e^{i\frac{2\times 2\pi}{n}}$, $\ldots$, $e^{i\frac{(n-1)\times 2\pi}{n}}$ は単位円を n 等分するから，$w_0, \ldots, w_{n-1}$ はすべて異なる. $w_0, \ldots, w_{n-1}$ 以外に根がないことは代数学の基本定理 (教科書 213 ページ) の帰結である.

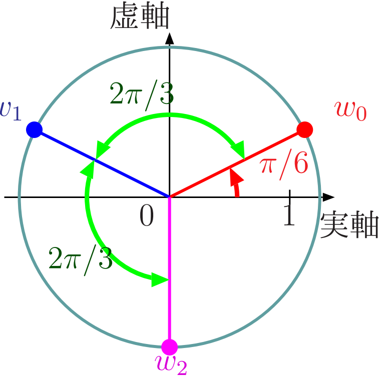
オイラーの公式を
使って書き直すと
教科書40ページと
同じ形になる

n 乗根 (5)

例: $z = 2i = 2e^{i\pi/2}$ の 3 乗根 w_0, w_1, w_2 を計算すると

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt[3]{2} e^{i\frac{\pi}{6}}, \\
w_1 &= \sqrt[3]{2} e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})}, \\
w_2 &= \sqrt[3]{2} e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\times 2\pi}{3})} = \sqrt[3]{2} e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3})}
\end{aligned}
$$

(偏角を主値に直していないので注意)

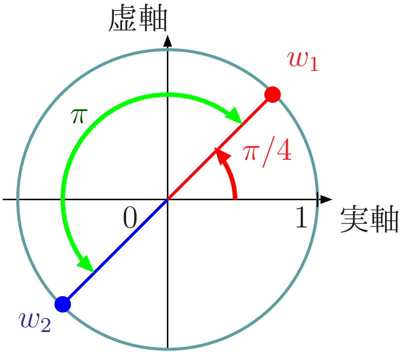

虚軸
$2\pi/3$
w_1
w_0
$\pi/6$
0
1
実軸
$2\pi/3$
w_2

n 乗根 (6)

例: $z = i = e^{i\pi/2}$ の 2 乗根 w_0, w_1 を計算すると

$$w_0 = e^{i\frac{\pi}{4}},$$
$$w_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)}$$

(偏角を主値に直していないので注意)


虚軸
w_1
π
$\pi/4$
0
1
実軸
w_2

n 乗根 (7) (p.41 ∼ 42)

- 複素数の範囲で考えるときには $i^{1/2}$ は 2 個の複素数 $e^{i\pi/4}$, $e^{i(\pi/4+\pi)}$ をまとめた表記で単一の複素数ではない
- これを忘れると教科書 41 ページ例 1.9 のような混乱が発生する (各自でこの例を読んでおくこと)

n 乗根 (8) (p.42)

記号の使い分け

$\sqrt[n]{x}$	非負の実数 x の, 非負の実 n 乗根
$z^{\frac{1}{n}}$	複素数 z の複素数の範囲における n 個の n 乗根, あるいはその中のひとつ

- 非負の実数 x に対して, その非負の n 乗根 $\sqrt[n]{x}$ がただ一つ存在する (これは微分積分学の範囲で説明される事実)
- 教科書注意 1.16 は「非負の実数 x の非負の n 乗根」と書かないと不正確
- $\sqrt[n]{z}$ と $z^{\frac{1}{n}}$ の使い分けをしない教科書もあるので, 他の教科書を読むときには混乱しないように

- 例 1.10 は各自で読んでおくこと

演習 3-4

各自で空欄を埋めよ.

演習 3-4 解答

$$w_0 = \boxed{1} e^{i \boxed{(\pi/5)}}$$

$$w_1 = \boxed{1} e^{i \boxed{(\pi/5+2\pi/5)}}$$

$$w_2 = \boxed{1} e^{i \boxed{(\pi/5+4\pi/5)}}$$

$$w_3 = \boxed{1} e^{i \boxed{(\pi/5+6\pi/5)}}$$

$$w_4 = \boxed{1} e^{i \boxed{(\pi/5+8\pi/5)}}$$

回路理論との関係 (1)

	複素解析	回路理論
虚数単位	i	j
複素数	z	$\dot{Z}$

回路理論との関係 (2)

- 回路理論には i が電流を表すという慣例があるため, 混乱しないよう虚数単位として j を用いる
- この講義では, 引き続き, 虚数単位として i を使い続ける

回路理論との関係 (3)

時刻を t とすると，正弦波交流における交流電圧 $v(t)$ は次のように書ける:

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi)$$

記号	名称	単位
V_m	電圧の最大振幅	V
ω	角周波数	rad/s
ϕ	位相角	rad

回路理論との関係 (4)

$$v(t) = V_m e^{i(\omega t+\phi)} = V_m(\cos(\omega t+\phi) + i\sin(\omega t+\phi))$$

という式を考える

回路理論との関係 (5)

正弦波交流と $V_m e^{i(\omega t+\phi)}$ を比較すると…

$$
\begin{aligned}
v(t) &= & V_m &\sin(\omega t+\phi) \\
v(t) &= V_m\cos(\omega t+\phi) + & iV_m &\sin(\omega t+\phi)
\end{aligned}
$$

虚数成分が一致している

回路理論との関係 (6)

定義

$$v(t) = V_m e^{i(\omega t+\phi)} = V_m(\cos(\omega t+\phi)+i\sin(\omega t+\phi))$$

によって定義される電圧を**複素電圧**という

- 虚数成分を交流電圧 $(\sin(\omega t+\phi))$ と合わせているのは歴史的経緯と思われる

実効値に関する復習 (1)

交流電圧 $v(t)$ によって抵抗 R で消費される電力と, 同じ抵抗 R に直流電圧を印加したときに消費される電力とが等しくなるような直流電流 (あるいは直流電圧) の大きさを実効値と呼ぶ (足立, 森, 電気回路の基礎, 東京電機大学出版局, 2007).

- 周期が T なら $I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}$

実効値に関する復習 (2)

- 正弦波交流では, $i(t) = I_m \sin \omega t$ とすると, $T = 2\pi/\omega$ で, 三角関数の性質を使うと,

$$I = \sqrt{\frac{I_m^2}{T}\int_0^T \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2\omega t)\right)dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

だから, 実効値 I は I_m を $\sqrt{2}$ で割ったもの (電圧でも同じ)

回路理論との関係 (7)

電圧の実効値を V として $(V = V_m/\sqrt{2})$, 複素電圧の式を書き換えると,

$$v(t) = \sqrt{2}Ve^{i(\omega t+\phi)} = \sqrt{2}Ve^{i\phi}e^{i\omega t}$$

とも書かれる.

回路理論との関係 (8)

定義　複素電圧を実効値に着目して書き直し ($\sqrt{2}$ を略す), さらに時間に依存する項 $e^{i\omega t}$ を省略したもの:

$$\boldsymbol{V} = Ve^{i\phi}$$

を, フェーザ電圧と呼ぶ.

回路理論との関係 (9)

- フェーザ電圧 $\boldsymbol{V} = Ve^{i\phi}$ を

$$\boldsymbol{V} = V\angle\phi$$

  とも書く

- フェーザ法に関する記述は電気回路の教科書によってまちまちなので注意すること

回路理論との関係 (10)

まとめ

交流電圧	$v(t)$	$=$	$\sqrt{2}V\sin(\omega t+\phi)$
複素電圧	$v(t)$	$=$	$\sqrt{2}Ve^{i(\omega t+\phi)}$
フェーザ電圧	$\boldsymbol{V}$	$=$	$Ve^{i\phi}$