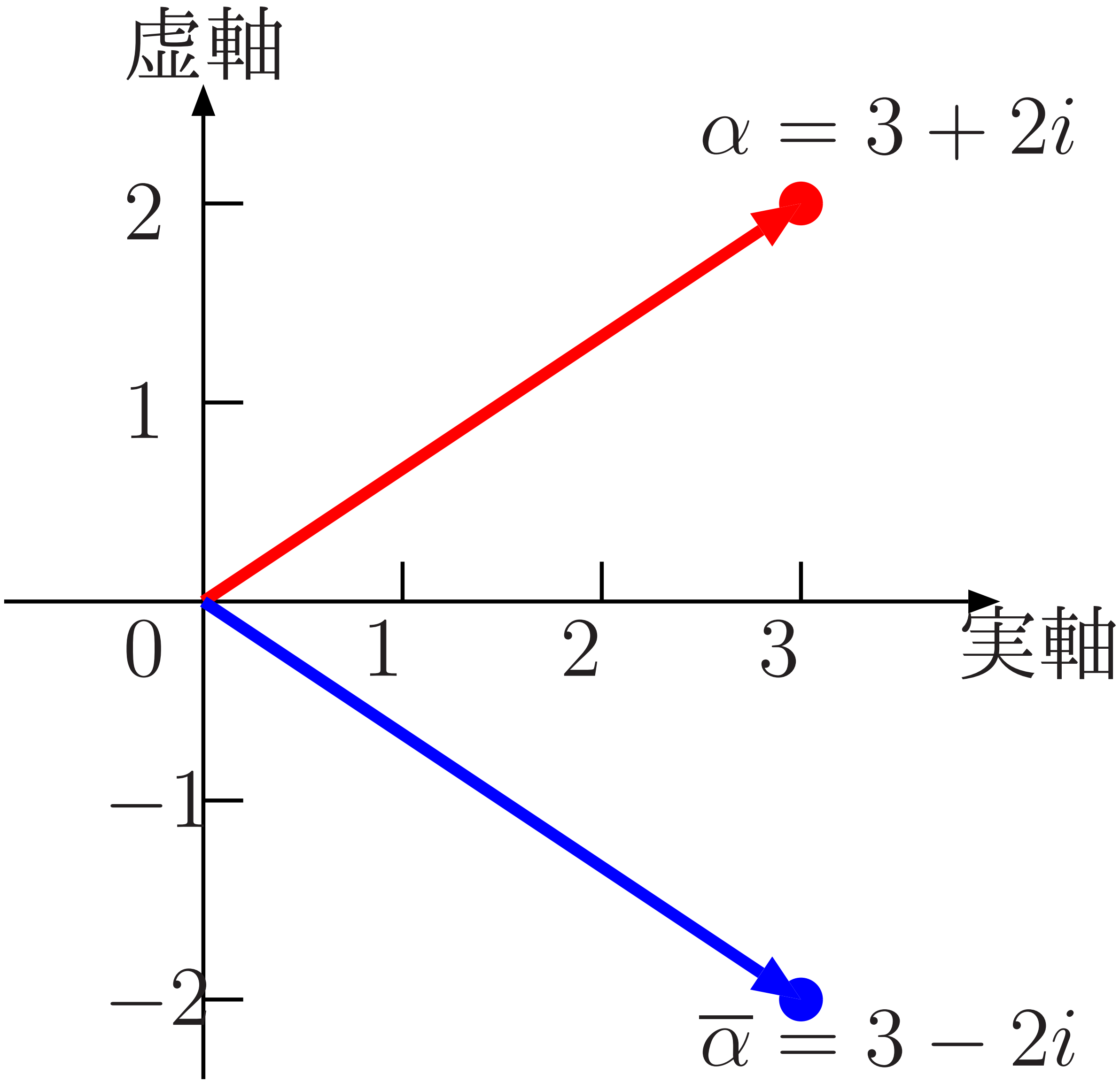
工業数学 IV 第 2 回
複素平面・
オイラーの公式

共役複素数 (1) (p.17)

- 複素数は $\mathbb{R}^2$ に積を定義したものだったことを思い出す
- $\alpha = 3 + 2i$ とする (平面上の座標は $(3, 2)$)
- 実軸に関し α と対称な位置の点 $\overline{\alpha}$ を考える


虚軸
$\alpha = 3 + 2i$
2
1
0
1
2
3
実軸
-1
-2
$\overline{\alpha} = 3 - 2i$

共役複素数 (2) (p.17)

定義 1.7　実軸に関して複素数 α と対称な位置の点 $\overline{\alpha}$ を α の**共役複素数**という.

- $\alpha = a + bi$ なら $\overline{\alpha} = a - ib$ となる (教科書ではこちらを定義にしている)

共役複素数 (3) (pp.17~18)

例 1.4

$$\mathrm{Re}\,\alpha = \frac{\alpha + \overline{\alpha}}{2}, \mathrm{Im}\,\alpha = \frac{\alpha - \overline{\alpha}}{2i}$$

(理由) $\alpha = a + ib, \overline{\alpha} = a - ib$

$$\Rightarrow \alpha + \overline{\alpha} = 2a, \quad \alpha - \overline{\alpha} = 2ib$$

共役複素数 (4) (p.18)

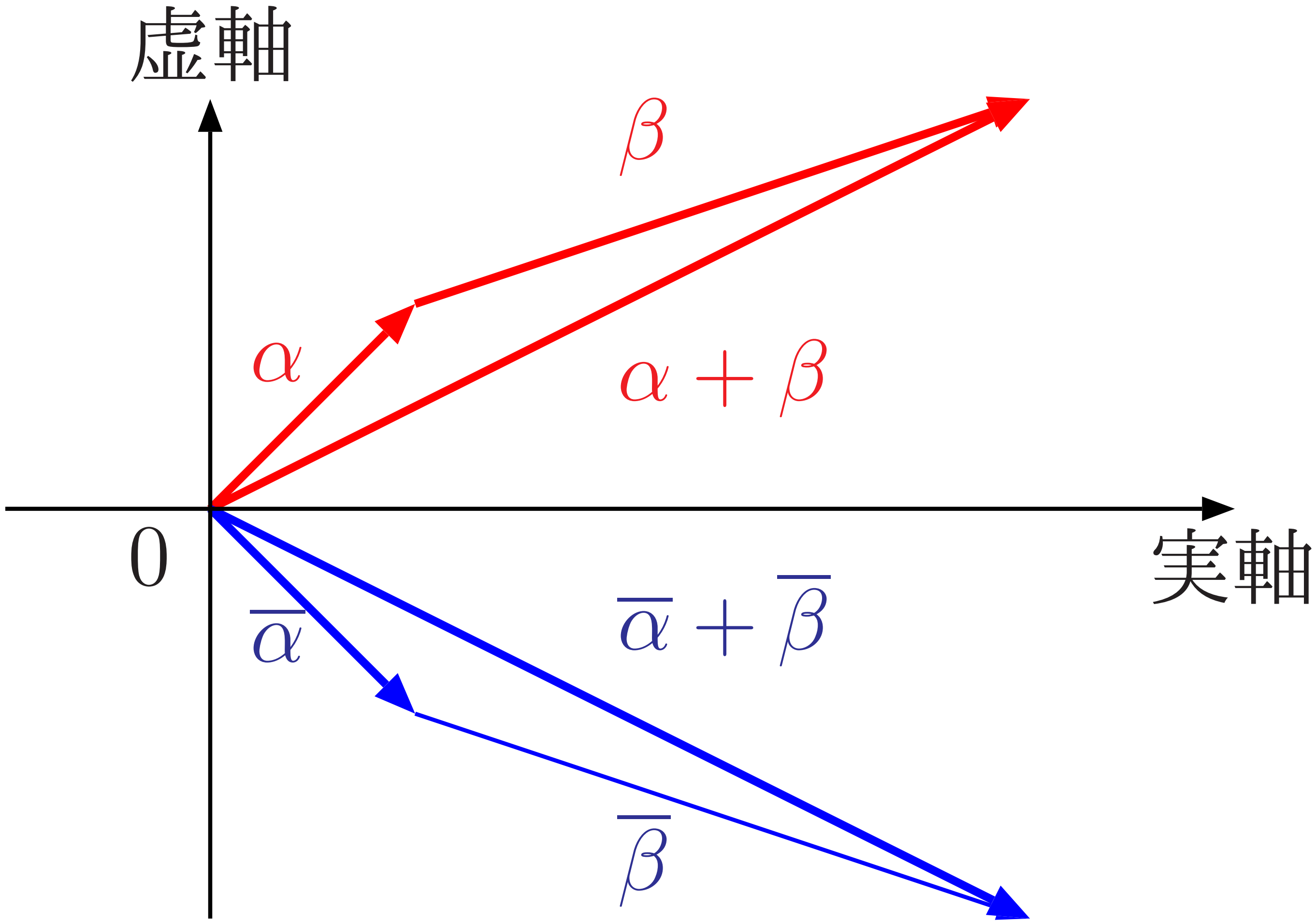
定理 1.2

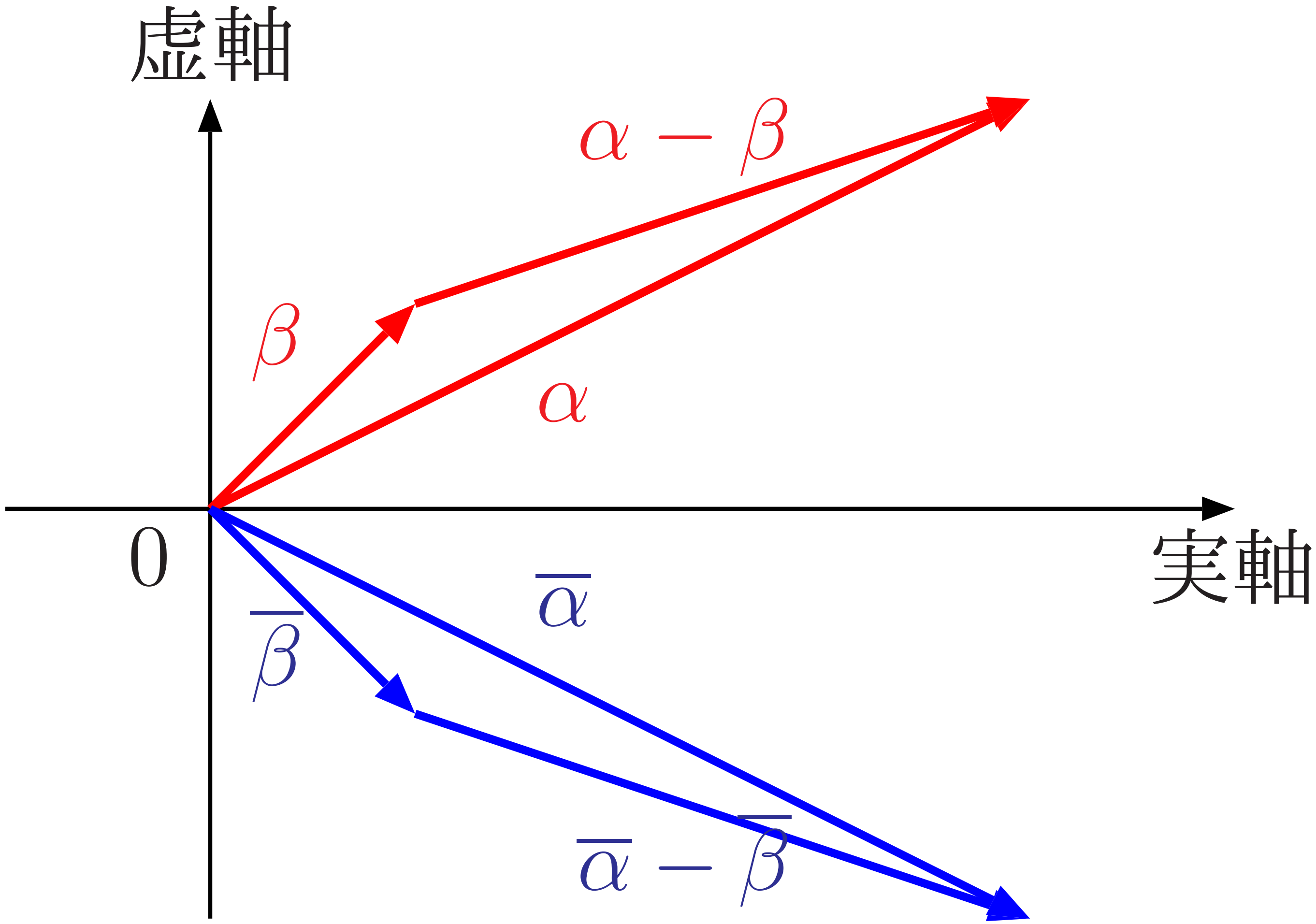
$$(1)\ \overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta} \qquad (2)\ \overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$$

$$(3)\ \overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta} \qquad (4)\ \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$$

α が実数 $\overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow}$ $\alpha=\overline{\alpha}$

α が純虚数 $\overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow}$ $\alpha=-\overline{\alpha}$


虚軸
実軸
0
α
β
$\alpha + \beta$
$\overline{\alpha}$
$\overline{\beta}$
$\overline{\alpha} + \overline{\beta}$


虚軸
実軸
0
$\alpha - \beta$
β
α
$\overline{\alpha}$
$\overline{\beta}$
$\overline{\alpha} - \overline{\beta}$

- iff は ‘if and only if’ の略 (必要十分条件という意味)
- 論理的に ‘if’ と ‘only if’ は逆向きの論理包含, ‘if A then B’, ‘B if A’, ‘A only if B’ はすべて同じ意味で「A ならば B」ということ
- 教科書では記号「 $\overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow}$ 」と記号「 $\Longleftrightarrow$ 」を同じ意味で使っている

共役複素数 (5) (p.18)

- 定理 1.2 (1)(2) の意味: 平面ベクトルを加減算してから x 軸に関して折り返しても x 軸に関して折り返してから加減算しても結果は同じ

共役複素数 (6) (p.18)

- 定理 1.2(3) は次のようにして確認

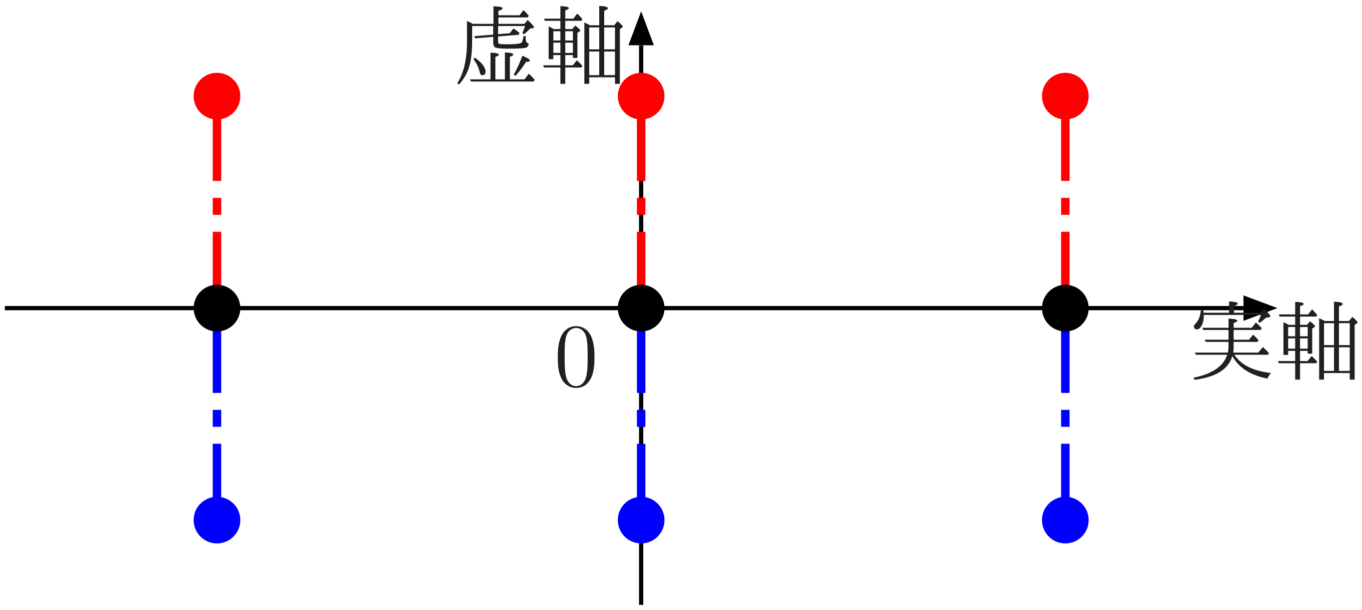
$$\begin{aligned}
\overline{(\alpha\beta)} &= \overline{(a+ib)(c+id)} = \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} \\
&= (ac-bd)-(ad+bc)i \\
\overline{\alpha}\,\overline{\beta} &= (a-ib)(c-id) \\
&= (ac-bd)+(a(-d)+(-b)c)i \\
&= (ad-bc)-(ad+bc)i
\end{aligned}$$

共役複素数 (7) (p.18)

- 定理 1.2(4) は教科書 18 ページ (計算を追うだけなので略); 各自で読んでおくこと

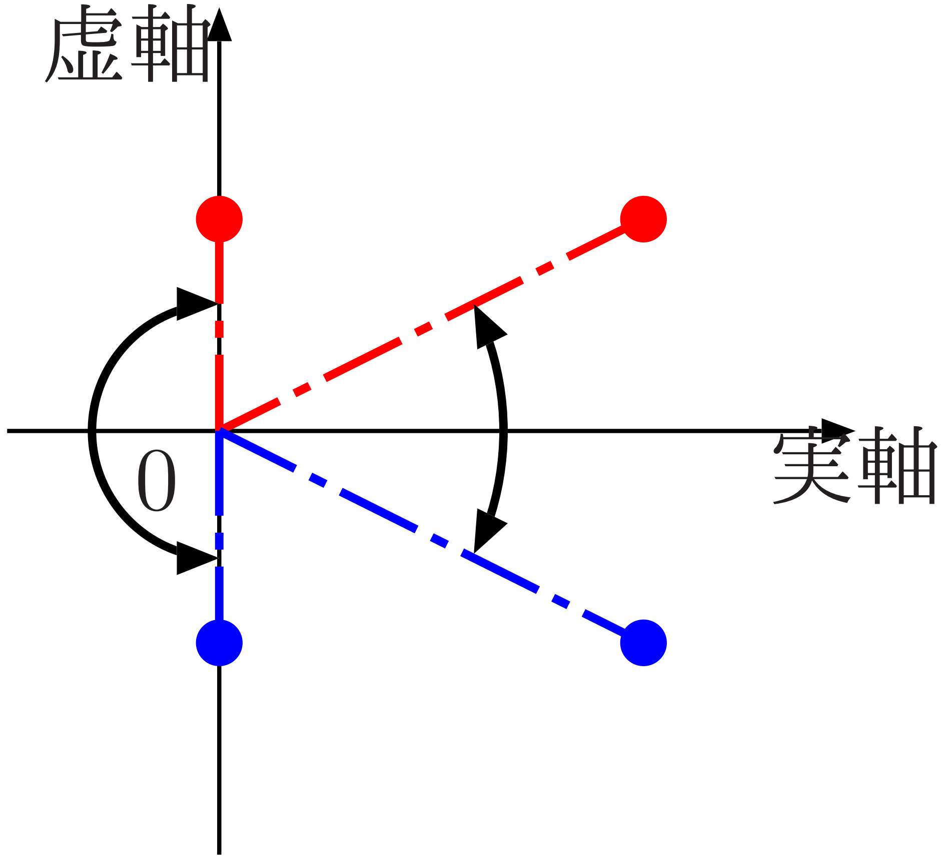
共役複素数 (8) (p.18)

- 定理 1.2 で「α が実数 $\overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow}$ $\alpha = \overline{\alpha}$」となるのは x 軸に関する折り返しで動かないのは x 軸上の点のみだから
- 次ページに図を示す.


虚軸
実軸
0

共役複素数 (9) (p.18)

- 定理 1.2 で「α が純虚数 $\overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow}$ $\alpha = -\overline{\alpha}$」となるのは y 軸に沿ったベクトルのみ x 軸に関して折り返すと向きが π(180 度) 変わるから
- 次ページに図を示す.


虚軸
実軸
0

複素平面, ガウス平面 (1) (p.19)

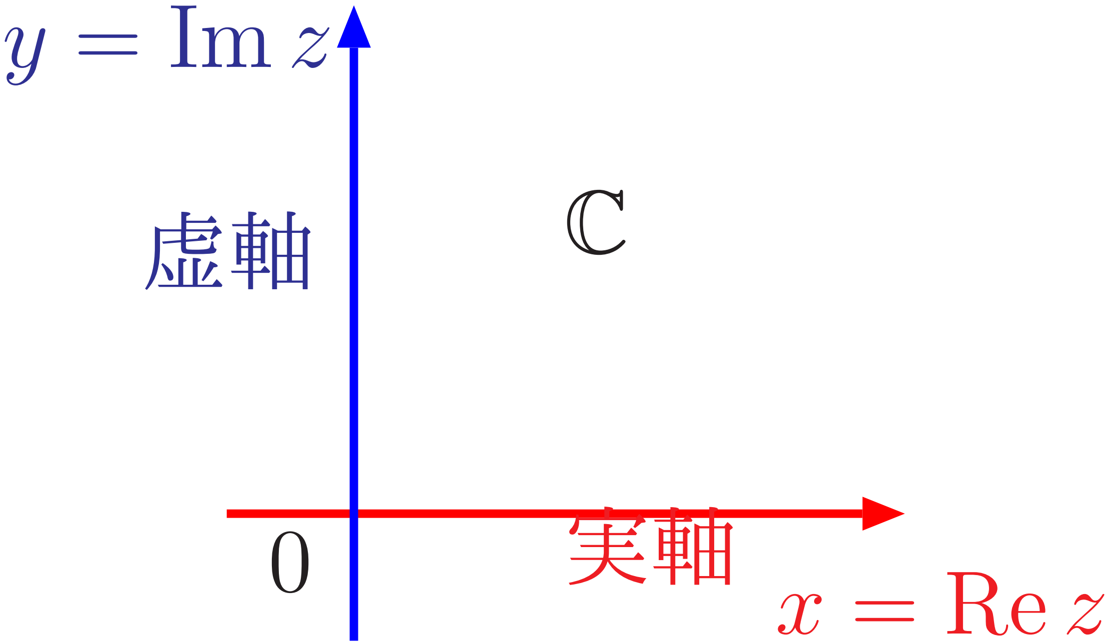
定義 1.8(復習)　複素数 $\alpha = a + bi$ に平面の点 $P(a, b)$ を対応させたものを**複素平面**あるいは**ガウス平面**という

- 2 次元の実ベクトルと平面との対応と同じ
- 複素数 z を**複素平面上の点 z** と呼ぶことがある

複素平面, ガウス平面 (2) (p.20)

定義 1.9(復習)

- 複素平面の x 軸を**実軸**, y 軸を**虚軸**と呼ぶ
- 複素平面の原点を**点 0** と呼ぶことがある
  ($0 + 0i$ は複素数の 0 だから)


$y = \operatorname{Im} z$
虚軸
$\mathbb{C}$
0
実軸
$x = \operatorname{Re} z$

極形式 (1) (p.20)

定義 1.10 $z = x + iy$ に対し，複素平面に点 $P(x, y)$ を取り，$\overrightarrow{OP}$ の長さを r, $\overrightarrow{OP}$ と実軸のなす角を θ とする (実軸から反時計回りにはかる) と，$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ なので，

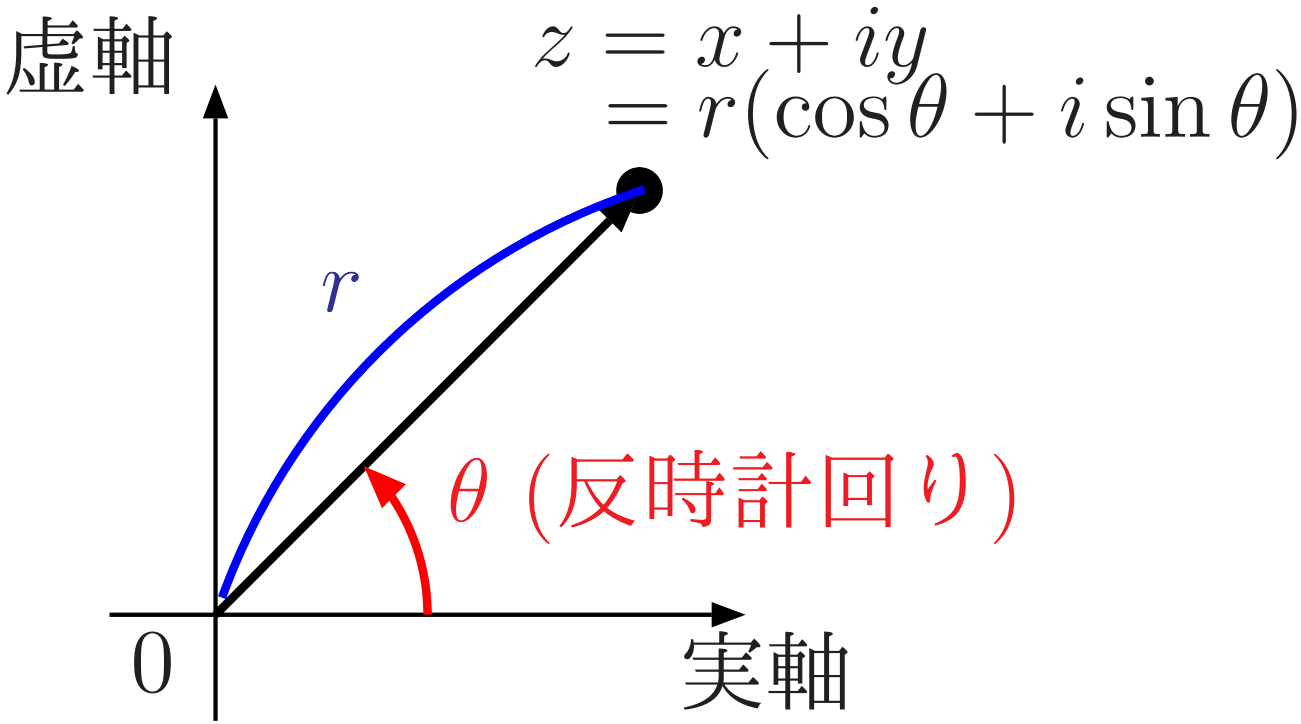
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

と書ける．これを z の**極形式**という．

シータ

θ

ギリシア文字



角度の単位はラジアン, $2\pi = 360^\circ$

- 三角関数の書き方の慣習：
  - $\triangleright$ $\sin\theta$, $\cos\theta$ のように, 曖昧さがないときには通常は変数に $(\cdot)$ をつけない
  - $\triangleright$ $\sin(a+b)$ のように $(\cdot)$ を省くと意味が通らないときだけ書くのが普通.

極形式 (2) (p.21)

定義 1.11 $z = x + iy$ を複素平面にプロットした点を $P(x, y)$ としたとき,

- $\overrightarrow{OP}$ の長さ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ を z の**絶対値**という (記号: $|z|$)
- $\overrightarrow{OP}$ と実軸との角度 θ を z の**偏角**という (記号: $\arg z$)

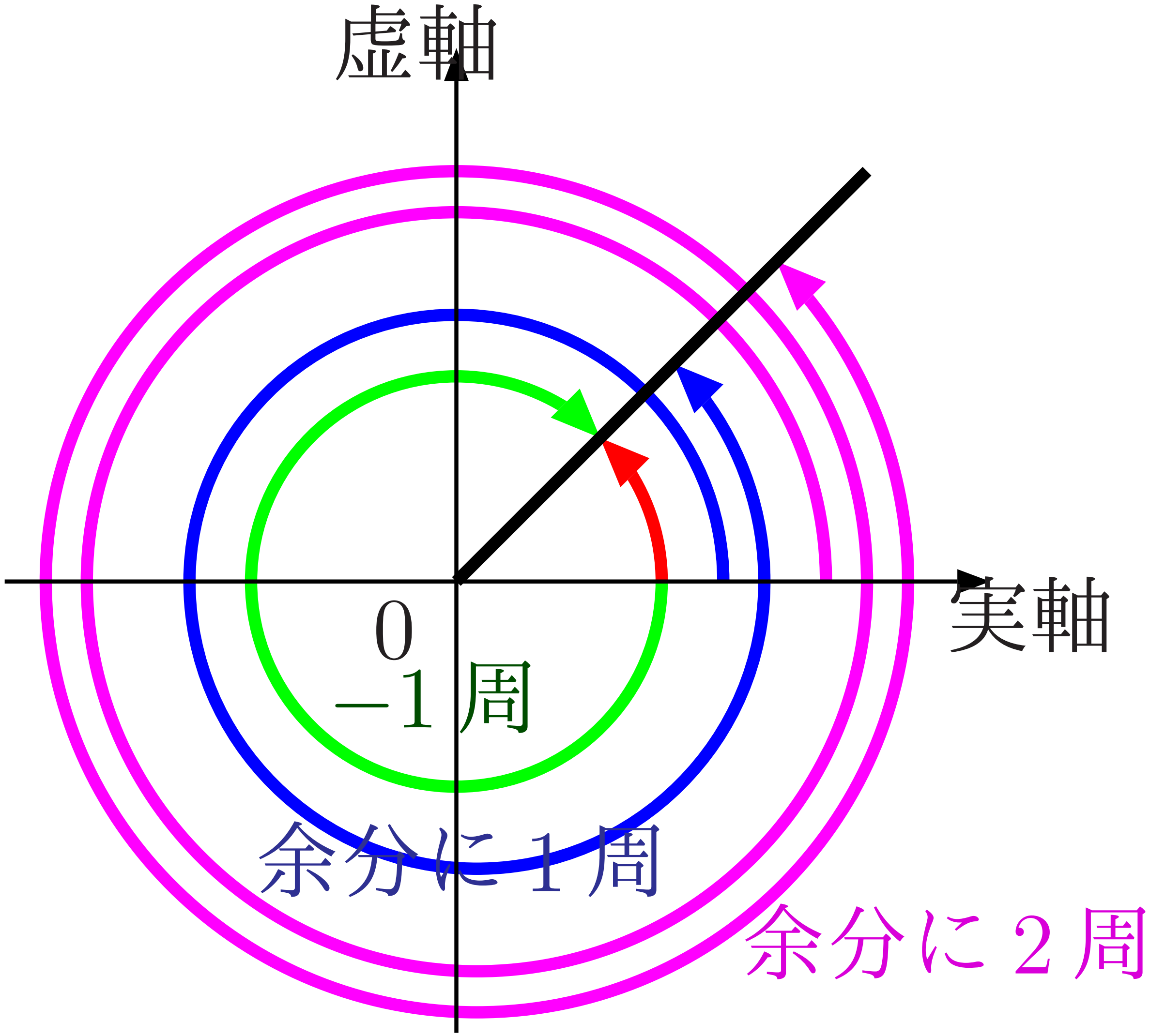
極形式 (3) (p. 21)

- 教科書では偏角を $\tan^{-1}$ を使って定義しているが, $\tan^{-1}$ の値域は

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

なので少し都合が悪い

- 偏角には 2π の整数倍の不定性がある: たとえば,
$$\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}+2\pi,\ \frac{\pi}{6}-2\pi,\ldots$$
はいずれも同じ角度


虚軸
実軸
0
−1 周
余分に 1 周
余分に 2 周

極形式 (4) (pp. 20～22)

- 0 でない複素数は絶対値と偏角から一意的に定まる (p.20 (1.3))
- 0 の偏角は定義しない (p.22 注意 1.7)

極形式 (5) (pp. 20～22)

- 次の事実が成り立つ:

$$
\begin{aligned}
&|z| = 0 \iff \operatorname{Re} z = 0 \text{ かつ } \operatorname{Im} z = 0 \\
&|z| = |-z| \\
&|\overline{z}| = |z|, \quad \arg \overline{z} = -\arg z \\
&z\overline{z} = |z|^2
\end{aligned}
$$

- 理由は教科書 22 ページ (各自で読んでおくこと)
- 以下で直感的な説明をする.

極形式 (6) (pp. 20〜22)

- $|z| = 0 \iff \mathrm{Re}\, z = 0$ かつ $\mathrm{Im}\, z = 0$

理由　$z = x + iy$ としたとき, $|z|$ は 2 次元実ベクトル (x, y) の長さ (ノルム) に一致するから

極形式 (7) (pp. 20～22)

- $|z| = |-z|$

理由　ベクトルの向きを反対にしても長さ (ノルム) は変わらない

極形式 (8) (pp. 20〜22)

- $|\overline{z}| = |z|$, $\arg \overline{z} = -\arg z$

理由　z の共役複素数は z を実軸に関して折り返したものだから, 長さ (ノルム) は不変で, 偏角を実軸から測っていた関係で折り返すと偏角の正負が反転する

極形式 (9) (pp. 20～22)

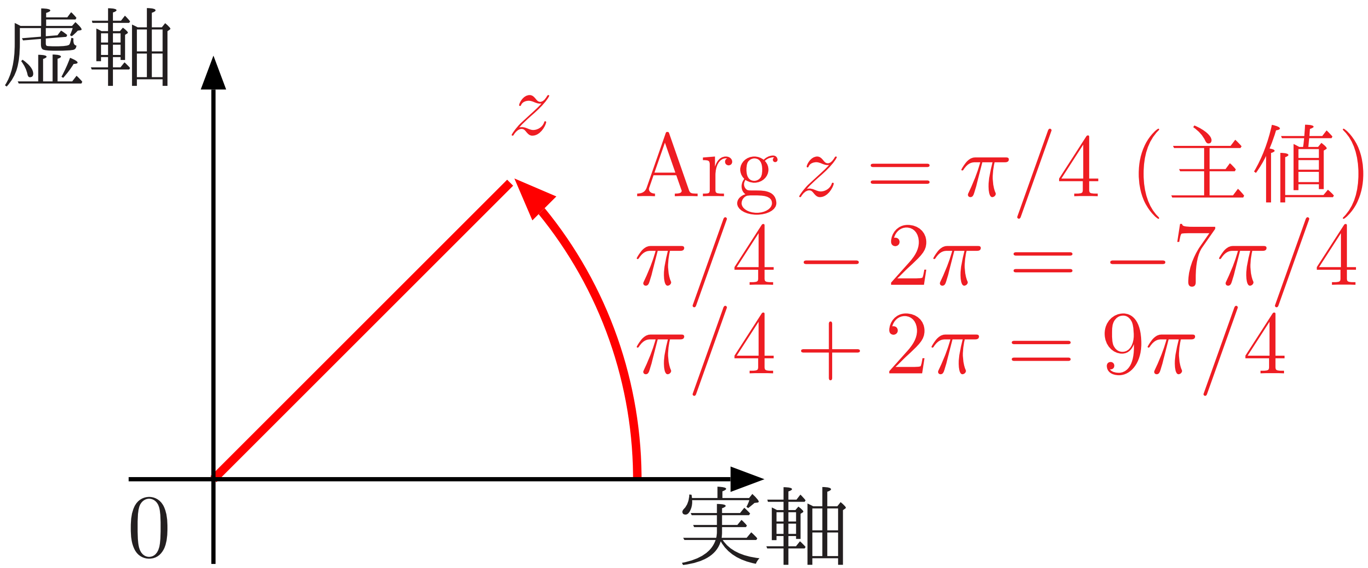
- $z\overline{z} = |z|^2$

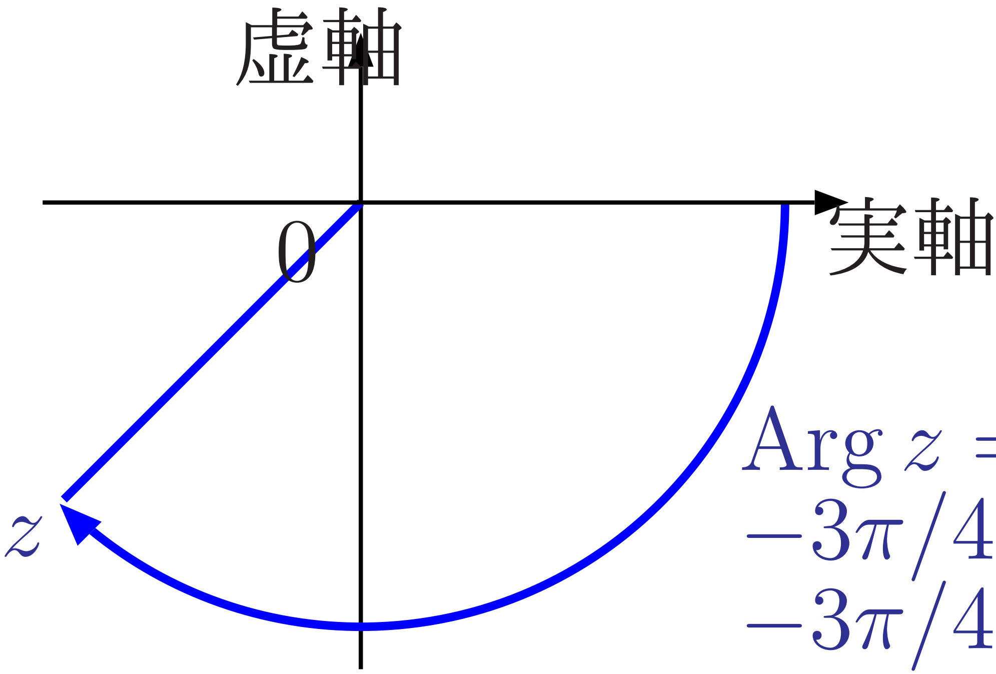
理由　$z = x + iy,\ r = \sqrt{x^2 + y^2}$ としたとき,
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ より

$$
\begin{aligned}
z\overline{z} &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \times r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \\
&= r^2((\cos(\theta)\cos(-\theta) - \sin(\theta)\sin(-\theta)) \\
&\quad + i(\cos(\theta)\sin(-\theta) + \sin(\theta)\cos(-\theta))) \\
&= r^2(\cos(\theta + (-\theta)) + i\sin(\theta + (-\theta))) = r^2
\end{aligned}
$$

極形式 (10) (p.23)

定義 1.12　偏角の不定の部分を調整して角度が $(-\pi, \pi]$ に収まるようにしたものを偏角の主値といい, $\mathrm{Arg}\, z$ と書く.


虚軸
z
$\operatorname{Arg} z = \pi/4$ (主値)
$\pi/4 - 2\pi = -7\pi/4$
$\pi/4 + 2\pi = 9\pi/4$
0
実軸



$$\operatorname{Arg} z = -3\pi/4\ (\text{主値})$$
$$-3\pi/4 - 2\pi = -11\pi/4$$
$$-3\pi/4 + 2\pi = 5\pi/4$$

- 複素数 z に i を掛けると z を原点のまわりで $\pi/2$ 回転した複素数が得られる (p.26)

理由　$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とする.

$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ を使うと

$$
\begin{aligned}
iz &= r(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2})(\cos\theta + i\sin\theta) \\
&= r((\cos\tfrac{\pi}{2}\cos\theta - \sin\tfrac{\pi}{2}\sin\theta) \\
&\qquad + i(\cos\tfrac{\pi}{2}\sin\theta + \sin\tfrac{\pi}{2}\cos\theta)) \\
&= r(\cos(\theta + \tfrac{\pi}{2}) + i\sin(\theta + \tfrac{\pi}{2}))
\end{aligned}
$$

だから, 確かに偏角が $\frac{\pi}{2}$ 増え, 絶対値は変わっていない (反時計回りに $\frac{\pi}{2}$ 回転)

区間の記号の復習

(a,b)　開区間; a と b を含まず

$[a,b]$　閉区間; a と b を含む

$(a,b]$　半開区間; a を含まない, b を含む

$[a,b)$　半開区間; a を含む, b を含まない

オイラーの公式 (1)

- 教科書ではオイラーの公式は 124 ページ
- $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ という等式のこと
- 回路理論で使うので早目に導入する

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

- オイラーの公式 (オイラーの関係式とも呼ぶ)
- 複素解析ではこれだけは覚えて!

これから続く話の流れ

- 実変数の指数関数を定義する
- 指数関数の性質を調べる
- 複素変数の指数関数を定義する
- $e^{i\theta}$ の性質を調べる
- オイラーの公式を説明する

指数関数 (1)

定義 (実変数の指数関数) 　指数関数 e^x とは，無限級数 (整級数) $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ によって定義される関数である．

指数関数 (2)

定理

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

- 以下でこれを証明する.

指数関数 (3)

$$e^x e^y = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\frac{y^m}{m!}$$

これを和の順番を入れ換えて整頓したい: そのために第 1 象限にある座標が整数の点をすべて列挙する方法について考える

順番の入れ換えは無条件にできるわけではないが, 「絶対収束」という条件が見たされている場合には可能である. 絶対収束については講義第 6 回で取り扱うが, 当面はこれを認めることにする.

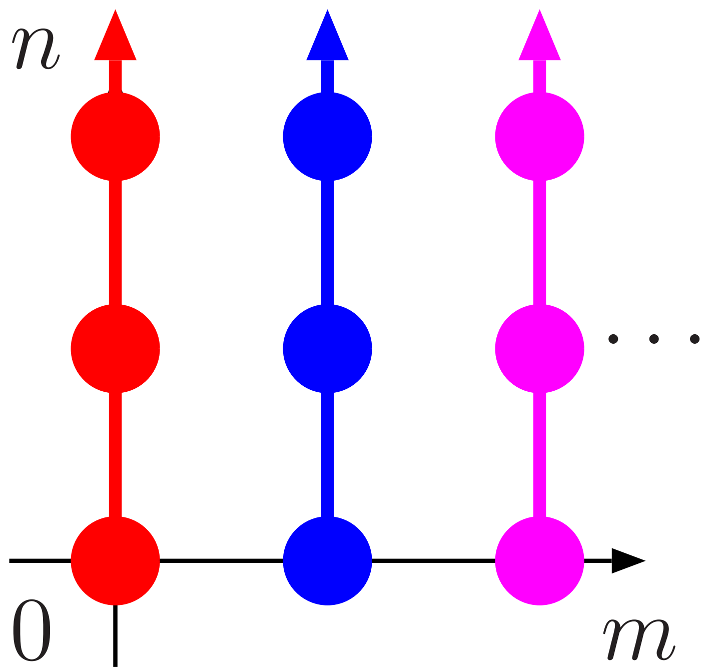
列挙法 1

$m = 0,\ n : 0 \to \infty$

$m = 1,\ n : 0 \to \infty$

$m = 2,\ n : 0 \to \infty$

$\cdots$



列挙法 2

直線上の点を列挙

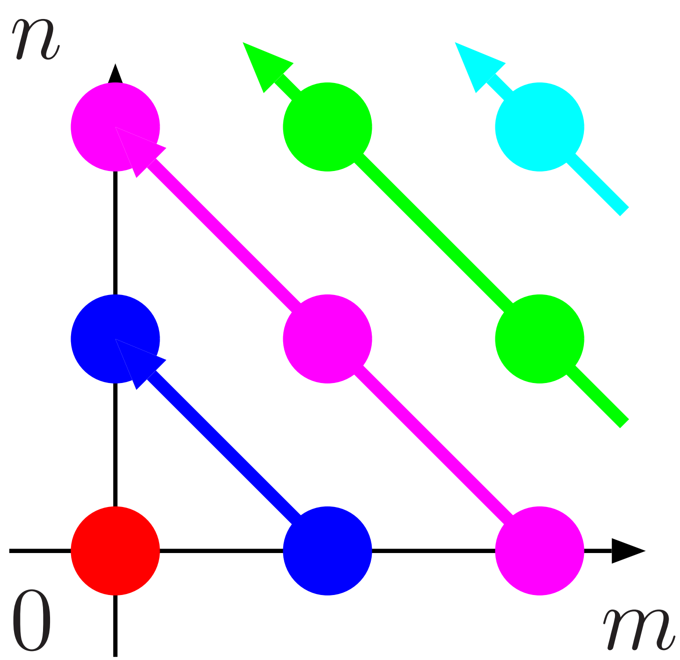
直線を右上にずらす

$m + n = 0$

$m + n = 1$

$m + n = 2$

$\cdots$



指数関数 (4)

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\frac{y^m}{m!}$ を 2 番目の列挙法で書き直す
- 直線 $m+n=p$ 上の点をすべて列挙するには, m を 0 から p まで動かし, $n=p-m$ とすればよい
- 直線を右上にずらすには, p を 0 から ∞ まで動かせばよい

指数関数 (5)

以上により，

$$
\begin{aligned}
e^x e^y &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{y^m}{m!} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{p} \frac{x^n}{n!} \frac{y^{p-n}}{(p-n)!}
\end{aligned}
$$

指数関数 (6)

一方, 2 項定理から

$$(x+y)^p = \sum_{n=0}^{p} \frac{p!}{n!(p-n)!} x^n y^{p-n}$$

指数関数 (7)

したがって

$$
\begin{aligned}
e^x e^y &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{p} \frac{x^n}{n!} \frac{y^{p-n}}{(p-n)!} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(x+y)^p}{p!} \\
&= e^{x+y} \qquad \text{(証明終)}
\end{aligned}
$$

指数関数 (8)

定理

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$$

- 以下でこれを証明する.
- $e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!}$ を項別に微分する.

指数関数 (9)

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{a^n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} a \frac{a^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m x^m}{m!} = ae^{ax} \ (m = n-1 \text{ とした})$$

(証明終)

無限級数で定められた関数が項別微分できるためにも条件が必要であるが，ここでは当面これを認める．

指数関数 (10)

$\boxed{\text{定義 (複素変数の指数関数)}}$ 指数関数 e^z とは，無限級数 $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ によって定義される関数のことである (z が複素数になったこと以外は実数の指数関数と同じ)

指数関数 (11)

$\boxed{\text{定理}}$ $\quad \overline{e^z} = e^{\overline{z}}$

理由 $\quad e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ の各項を実軸に関して折り返せば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^n}{n!} = e^{\overline{z}}$ になるから $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$

議論に物理的なイメージを持たせるために, これからしばらくの間, 変数 θ を時刻と解釈する.

指数関数 (12)

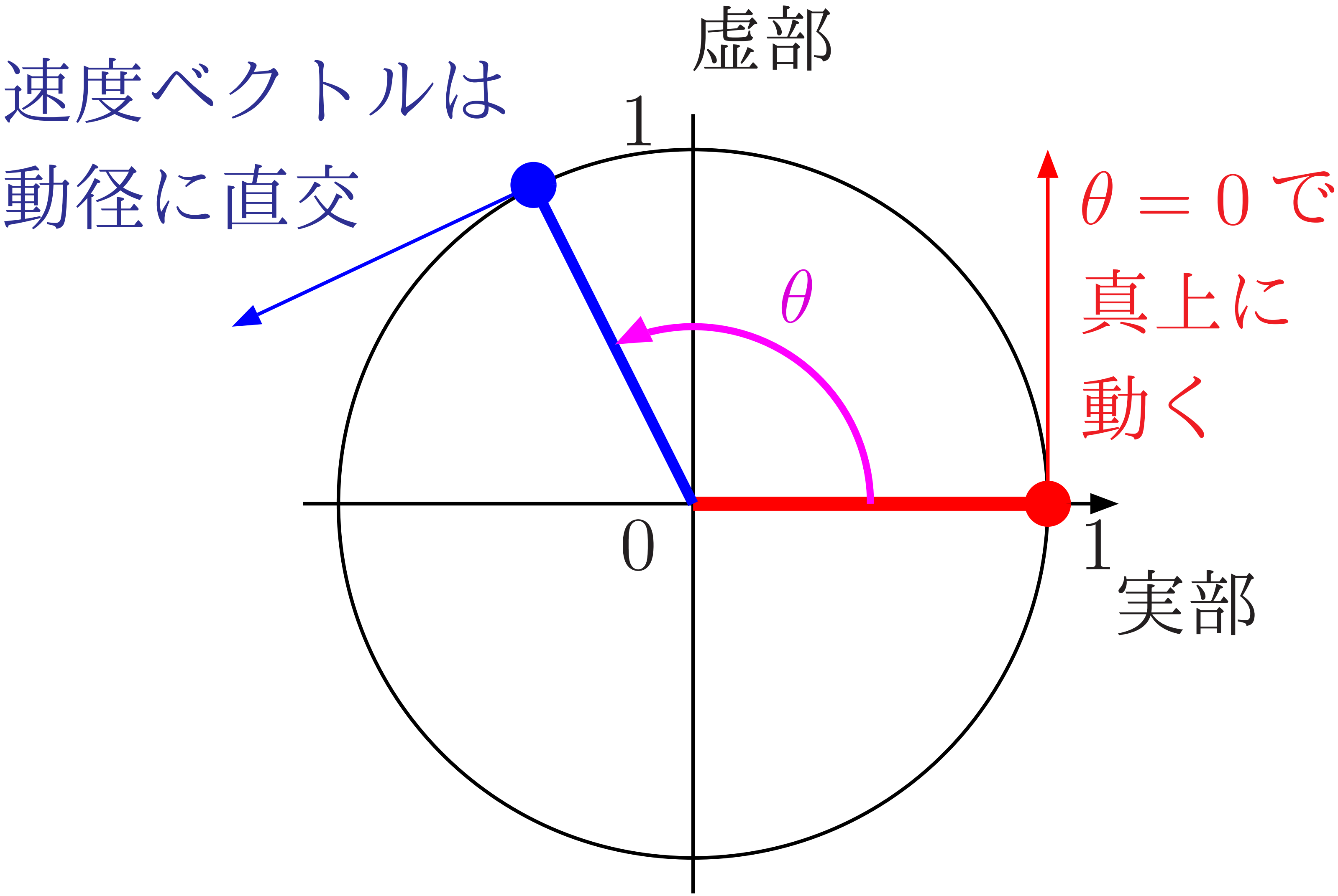
θ を実数とし, 複素数の指数関数 $e^{i\theta}$ を考えると:

- $\overline{e^{i\theta}} = e^{\overline{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $$\begin{aligned} |e^{i\theta}| &= \sqrt{e^{i\theta}\overline{e^{i\theta}}} = \sqrt{e^{i\theta}e^{-i\theta}} \\ &= \sqrt{e^{(i\theta)+(-i\theta)}} = \sqrt{e^0} = 1 \end{aligned}$$

だから, θ が動くと, $e^{i\theta}$ は複素平面の単位円上を動く

指数関数 (13)

- $\theta = 0$ のとき $e^{i\theta} = 1$, よって $e^{i\theta}$ は時刻 0 に実軸上の点 1 を出発
- $\dfrac{d}{d\theta}e^{i\theta} = ie^{i\theta}$ で, $|ie^{i\theta}| = 1$ だから, 動く速さ(角速度) は一定, 積分すると $\theta = 2\pi$ でちょうど単位円を 1 周する; さらに, 速度 $ie^{i\theta}$ は動径 $e^{i\theta}$ と直交 (動径を $\pi/2$ 回転したもの)

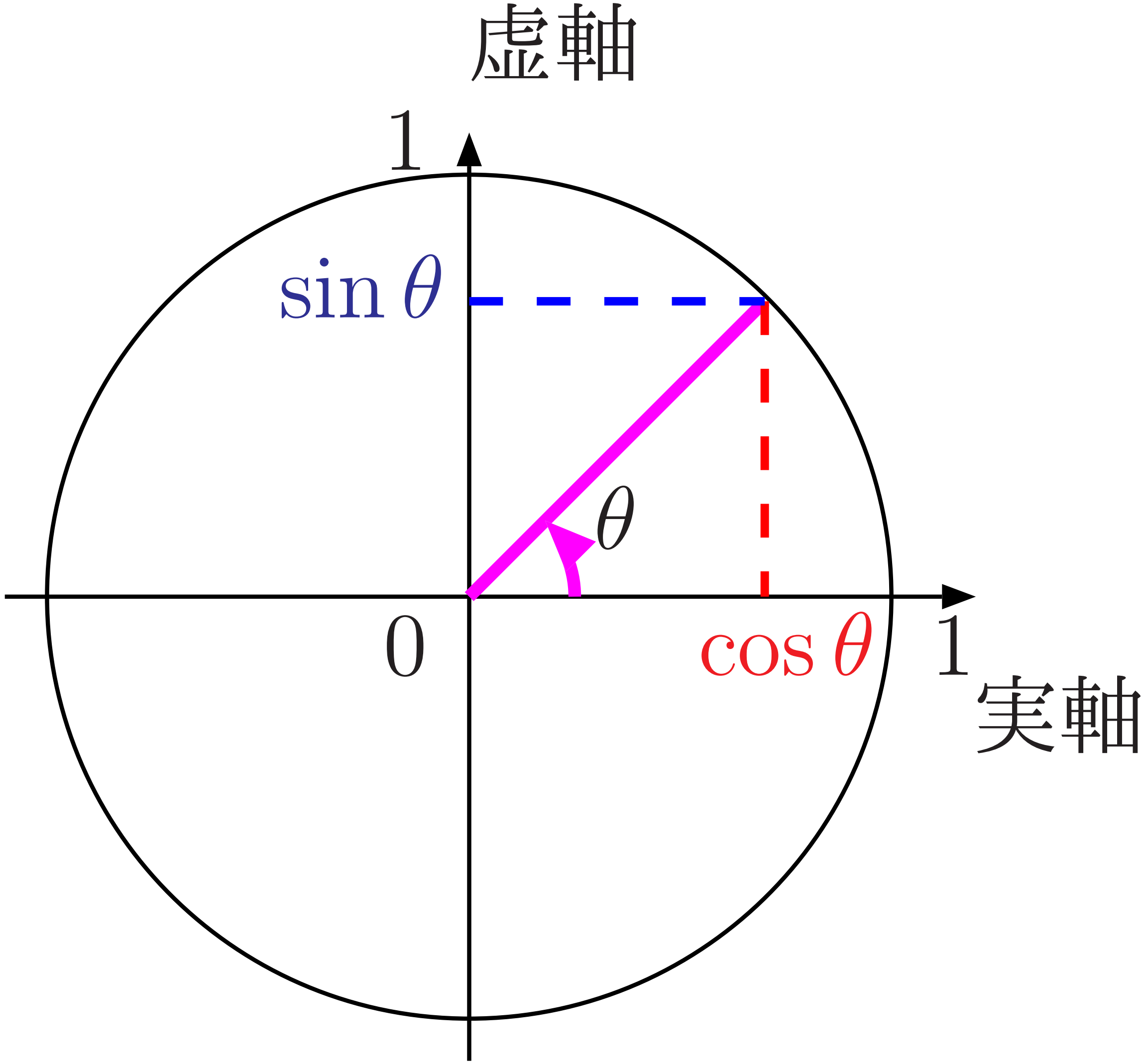

速度ベクトルは
動径に直交
虚部
1
θ
$\theta = 0$ で
真上に
動く
0
1
実部

指数関数 (14)

結論　$e^{i\theta}$ は $\theta = 0$ で実軸上の点 1 を出発して反時計回りに周期 2π で単位円を回る角速度一定の円運動をあらわしている

指数関数 (15)

- 高等学校における三角関数の定義を思い出す
- 平面上の点 P が時刻 $\theta = 0$ において $(1, 0)$ を出発し, 単位円上を反時計回りに周期 2π でまわっているとき, 点 P の x 軸への射影が $\cos\theta$, y 軸への射影が $\sin\theta$ だった
- 以上により $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ となる


虚軸
1
$\sin\theta$
θ
0
$\cos\theta$
1
実軸

指数関数 (16)

定理 (オイラーの公式)

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

- 公式が成立する理由は今まで説明した通り

- ここまでの議論では, $e^{i\theta}$ と高等学校流の三角関数の定義との対応を取ったのであるが…

- 三角関数も無限級数を使って定義することが可能であり, 複素解析ではむしろそちらが本流.

- 指数関数と三角関数をともに無限級数を使って定義した場合には, オイラーの公式は定義から自明なのであるが, そのようにした場合, 無限級数を使って定義した三角関数が我々がよく知っている三角関数と同じものであることを確認する必要がある (確認を要する箇所が変わるだけ).

極形式 (10)

極形式とオイラーの公式　複素数 z が極形式 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ で与えられているとき，オイラーの公式を使うと，

$$z = re^{i\theta}$$

と書ける．

三角関数の加法定理 (1)

- オイラーの公式から三角関数の加法定理を導出する.

$$e^{i\theta}e^{i\varphi} = \overset{\text{指数関数の性質}}{e^{i(\theta+\varphi)}} \overset{\text{オイラーの公式}}{=} \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi) \tag{A}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta}e^{i\varphi} &= \overset{\text{オイラーの公式}}{(\cos\theta + i\sin\theta)}\overset{\text{オイラーの公式}}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \\ &= (\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) \\ &\quad + i(\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi) \end{aligned} \tag{B}$$

- (A) と (B) は等しいから…

$$\begin{aligned}
&\cos(\theta+\varphi)+i\sin(\theta+\varphi)\\
&=(\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi)\\
&+i(\cos\theta\sin\varphi+\sin\theta\cos\varphi)
\end{aligned}$$

- 実部と虚部を比較して…

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$$
$$\sin(\theta + \varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi$$

- 高等学校の数学では三角関数の加法定理を記憶するのに苦労した者もいると思うが, オイラーの公式を使うと, 三角関数の加法定理をすぐに導出できる

- 改めて定理の形で述べておく

三角関数の加法定理 (2)

定理

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$$

$$\sin(\theta + \varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi$$

ファイ

$$\phi, \varphi$$

ギリシア文字

字体が２種類あるので注意