工共 212 工業数学 IV
第 1 回
実数から複素数へ

- この講義は, 工共 212 工業数学 IV(電気システム工学コース) と電 210 電気数学 IV (電気電子工学科) を併設したもの
- 上記対象学生以外は受講できない

教科書

皆本 晃弥, スッキリわかる複素関数論,
近代科学社 (2007), ISBN: 9784764910508

- 教科書とは説明の順番を変える
- 時間不足のため飛ばすところがある
- 興味を持った部分は自分で読むこと

- 第 5 刷 (2015 年) では大きな誤りは訂正されているが, それより古い版には大きな誤りがある.
- 著者のページで正誤表を確認すること.

複素数といえば・・・

$$i$$

これは一体何?

複素数は 2 次方程式が
いつでも解けるよう
実数を拡張したもの

何の役に立つのか?

- 代数方程式 (2 次, 3 次 $\cdots$ の方程式) が解ける
- 定積分が簡単にできるようになる
- 応用がたくさん: 回路理論, 流体力学, 制御工学 (伝達関数と安定性解析), 信号処理 (フィルタの設計)
- 線形代数, フーリエ解析, ラプラス変換, 微分方程式, 関数解析…で複素数は不可欠

高等学校の学習指導要領における
複素数教育の取り扱い

- 数学 II: 数を複素数まで拡張する意義を理解し, 複素数の四則演算をすること. また, 二次方程式の解の種類と判別及び解と係数の関係について理解すること.

- 数学 III : 複素数平面と複素数の極形式, 複素数の実数倍, 和, 差, 積及び商の図形的な意味を理解し, それらを事象の考察に活用すること. ド・モアブルの定理について理解すること.

- 高校を卒業した者は
    - ▷ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ となること
    - ▷ 複素数と複素平面が対応すること
    - ▷ 複素平面で i を掛けることが 90 度回転に対応すること

  を理解している筈なのだが $\cdots$
- これらが定着していないことが知られている

複素数の正体

材料は実数
(教科書 45～46 ページ)

2 次元の実ベクトルに「掛け算」を追加

2 次元実ベクトルの復習

- たし算: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$
- スカラー倍: $a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix}$

2 次元の実ベクトルの全体を…

$$\mathbb{R}^2$$

複素数の構成

- 新しく掛け算を定義:
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 \\ x_1y_2 + y_1x_2 \end{pmatrix}$$
- これだけで複素数になる

新しく定義する演算であることの 強調のために変な記号を使っている

★

- やや繁雑なのだが, 正しく四則演算ができることを確認する.
- 加減算についてはベクトルの加減算と同じなので説明を省略する.

- 以下では,

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

とする.

- 積 ★ は可換:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \bigstar \boldsymbol{b} &= \begin{pmatrix} a_1b_1 - a_2b_2 \\ a_1b_2 + a_2b_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_1a_1 - b_2a_2 \\ b_2a_1 + b_1a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1a_1 - b_2a_2 \\ b_1a_2 + b_2a_1 \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{b} \bigstar \boldsymbol{a}
\end{aligned}
$$

- 積 ★ は結合的:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}\bigstar(\boldsymbol{b}\bigstar\boldsymbol{c}) \\
&= \begin{pmatrix} a_1(b_1c_1 - b_2c_2) - a_2(b_1c_2 + b_2c_1) \\ a_1(b_1c_2 + b_2c_1) + a_2(b_1c_1 - b_2c_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a_1b_1 - a_2b_2)c_1 - (a_1b_2 + a_2b_1)c_2 \\ (a_1b_1 - a_2b_2)c_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)c_1 \end{pmatrix} \\
&= (\boldsymbol{a}\bigstar\boldsymbol{b})\bigstar\boldsymbol{c}
\end{aligned}
$$

- 分配法則:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}\bigstar(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \\
&= \begin{pmatrix} a_1(b_1+c_1) - a_2(b_2+c_2) \\ a_1(b_2+c_2) + a_2(b_1+c_1) \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{a}\bigstar\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\bigstar\boldsymbol{c}
\end{aligned}
$$

- $\boldsymbol{e}_1$ は乗算 $\bigstar$ に対する単位元:

$$\boldsymbol{e}_1 \bigstar \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \times a_1 - 0 \times a_2 \\ 1 \times a_2 + 0 \times a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}$$

- $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ のとき $\boldsymbol{a}$ の乗法に関する逆元が定義できることの確認:
  - ▷ $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{a}$ の乗法に関する逆元であるとは, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{x}$ の積が乗法に関する単位元に一致することをいう.
  - ▷ $\mathbf{0}$ は零ベクトルをあらわす.
  - ▷ 乗法に関する単位元が $\boldsymbol{e}_1$ だったから, $\boldsymbol{a}\bigstar\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1$ となる $\boldsymbol{x}$ を見付ければよい.

▷ $\boldsymbol{x} = \dfrac{1}{a_1^2 + a_2^2}\begin{pmatrix} a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix}$ とする.

▷ 定義にしたがって計算すると,

$$\boldsymbol{a} \bigstar \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \bigstar \begin{pmatrix} \dfrac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} \\ \dfrac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \dfrac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} - a_2 \dfrac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2} \\ a_1 \dfrac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2} + a_2 \dfrac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_1.$$

- ▷ 前ページの計算において, $\boldsymbol{a} \neq 0$ より $a_1^2 + a_2^2 > 0$ であることに注意.
- ▷ 以上により, $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{a}$ の乗法に関する逆元である.

- $\boldsymbol{e}_1$ が作る線形部分空間は $\mathbb{R}$ と同一視できる
    - ▷ 第 2 成分が零のベクトルどうしの加算および乗算が第 1 成分に関して実数の加算および乗算と一致していれば, $\boldsymbol{e}_1$ が作る線形部分空間は $\mathbb{R}$ の「コピー」であると考えることができる.

▷ これらを確認する.

▷ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の第 2 成分がともに零, すなわち

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする.

▷ 加算については

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

▷ 乗算については

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \bigstar \boldsymbol{b} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} \bigstar \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 \times b_1 - 0 \times 0 \\ a_1 \times 0 + 0 \times b_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 \times b_1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

▷ 以上によって,

$$a_1\boldsymbol{e}_1 + b_1\boldsymbol{e}_1 = a_1b_1\boldsymbol{e}_1,$$
$$a_1\boldsymbol{e}_1 \bigstar b_1\boldsymbol{e}_1 = a_1b_1\boldsymbol{e}_1$$

であり, $\boldsymbol{e}_1$ が作る線形部分空間が (2 次元ベクトルの和および今定義した $\bigstar$ に関し) $\mathbb{R}$ の「コピー」になっていることがわかる.

- 次に, 記法を高等学校で習った複素数の書き方に直すことを考える.

- 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を 1 に，$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を i に対応させる

- $1 \times 1 = 1$, $1 \times i = i$, $i \times i = -1$ とならないと困るから$\cdots$
- $\boldsymbol{e}_1 \bigstar \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_1 \bigstar \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_2 \bigstar \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1$ となることを確認したい
- 計算してみる.

$$\boldsymbol{e}_1 \bigstar \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} \overset{x_1}{1} \times \overset{x_2}{1} - \overset{y_1}{0} \times \overset{y_2}{0} \\ \overset{x_1}{1} \times \overset{y_2}{0} + \overset{y_1}{0} \times \overset{x_2}{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_1$$

$$\boldsymbol{e}_1 \bigstar \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} \overset{x_1}{1} \times \overset{x_2}{0} - \overset{y_1}{0} \times \overset{y_2}{1} \\ \overset{x_1}{1} \times \overset{y_2}{1} + \overset{y_1}{0} \times \overset{x_2}{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{e}_2 \bigstar \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} \overset{x_1}{0} \times \overset{x_2}{0} - \overset{y_1}{1} \times \overset{y_2}{1} \\ \overset{x_1}{0} \times \overset{y_2}{1} + \overset{y_1}{1} \times \overset{x_2}{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{e}_1$$

- 以上をまとめると…

$1 \times 1 = 1$	$1 \times i = i$	$i \times i = -1$
$\boldsymbol{e}_1 \bigstar \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_1 \bigstar \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_2 \bigstar \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1$

- たしかに計算は合っている
- 以上により，複素数とは**2 次元の実ベクトルの全体 ($\mathbb{R}^2$) に新たに掛け算を定義したもの**であることが確認できた．

複素数

=2 次元の実ベクトル

+ 掛け算

- 高等学校で習った複素数の書き方は，実は 2 次元実ベクトルの基本ベクトルによる表示の省略記法.

- $\boldsymbol{z}$ を複素数とし，これを 2 次元実ベクトルと考えた上で，基本ベクトルによって表示する．

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$$

- 基本ベクトルの記号を変更する:

$$\boldsymbol{e}_1 \to \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{e}_2 \to \boldsymbol{i}$$

すると,

$$\boldsymbol{z} = x\mathbf{1} + y\boldsymbol{i}$$

- $\mathbf{1}$ を省略し, さらに基本ベクトルを太字にするのをやめると…

$$\boldsymbol{z} = x + y\boldsymbol{i}$$

という, 高等学校で習った形が出て来る.

- 高等学校では, 天下り式で複素数が与えられるため,「数の世界に唐突に異物が混入した」と感じる者もいるようだが, そうではなく, 省略記法が採用されているだけである.

- 実は, 実数から複素数を構成する際に, 2 次の実ベクトルを経由するのではなく, 多項式を経由する方法もあるが, この講義では説明を省略する.
- 数学では,「やり方は幾通りもある」ことが多い. 講義で習ったことが「唯一の正しい方法とは限らない」ことを認識してほしい.

- 以上によって, 複素数は 2 次の実ベクトル

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

に掛け算を追加したものであることが確認できた.

- 以下では, 教科書に合わせてベクトルの表記を縦ベクトルから横ベクトルに変える

$$z = (x, y)$$

- (復習) 実数には数直線が対応した
- (復習)$\mathbb{R}^2$ には平面が対応した
- 複素数の実体は $\mathbb{R}^2$ だから複素数には平面が対応する
- これを複素平面あるいはガウス平面とよぶ(p.19)

複素数の全体を…

$$\mathbb{C}$$

- 集合としては$\mathbb{R}^2$と$\mathbb{C}$は同じ
- 違うのは掛け算が定義されているか否か
- $\mathbb{R}^2$ではベクトルどうしの掛け算は未定義
- $\mathbb{C}$では複素数どうしの掛け算ができる

複素数 (1) (p.12)

定義 1.1 $i \times i = -1$ を満たす
'数' を虚数単位という ($\sqrt{-1}$ と書くこともある)

- i の実体は $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$
(表記を横ベクトルに変えているので注意)
- $(-i) \times (-i) = -1$ だから
方程式 $x^2 = -1$ は 2 個の解を持つ (i と $-i$)

複素数 (2) (p.12)

- 複素数の構成法は他にもある (p.12 の記述はこれをふまえている)
- $-i$ については次のように理解する方がよい:

$\mathbb{C}$	$i = 0 + 1i$	$-i = 0 - 1i$
$\mathbb{R}^2$	$(0, 1)$	$(0, -1)$

- 定義 1.2 は無視してよい

複素数 (3) (p.13)

- 複素数とは $\boldsymbol{\alpha} = (a, b) = a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2$ なのだが…
- $\alpha = a + bi$ と書くのがふつう ($\boldsymbol{e}_1$ は略す, $\boldsymbol{e}_2$ を i と書き換え)

アルファ

$$\alpha$$

これはギリシア文字

a と混乱しないように

- 複素解析ではギリシア文字がよく使われる

ギリシア文字一覧 (1/2)			
大文字	小文字	読み	日本語読み
A	α	alpha	アルファ
B	β	beta	ベータ
$\Gamma, \mathit{\Gamma}$	γ	gamma	ガンマ
$\Delta, \mathit{\Delta}$	δ	delta	デルタ
E	ϵ, ε	epsilon	イプシロン
Z	ζ	zeta	ゼータ

ギリシア文字一覧 (2/2)

大文字	小文字	読み	日本語読み
H	η	eta	イータ, エータ
$\Theta, \mathit{\Theta}$	θ, ϑ	theta	シータ, テータ
I	ι	iota	イオタ, イオータ
K	κ	kappa	カッパ
$\Lambda, \mathit{\Lambda}$	λ	lambda	ラムダ
M	μ	mu	ミュー

- 習慣的に, 英文字, ギリシア文字の
  - ▷ 前半…定数
  - ▷ 後半…変数

  という使い分け (厳密ではない)
- ギリシア文字の大文字には見慣れないものが多いと思われるが, 大学の講義ではしばしば用いられる.

- 記法に関して注意すべき点がある.

$$a + bi \text{ vs } a + ib$$

- どちらが正しいかというと, 大抵はどちらでもよいが習慣的に使い分ける場合がある (p.13 脚注 5 参照).

複素数 (4) (p.13)

定義 1.3

- 複素数: $\alpha = a + ib$ という形のもの
- a: 実部, $a = \operatorname{Re}\alpha$ と書く
- b: 虚部, $b = \operatorname{Im}\alpha$ と書く

複素数 (5) (p.13)

- $\mathrm{Im}\,\alpha = 0$ (虚部が零) のとき実数
- $\mathrm{Im}\,\alpha \neq 0$ のとき虚数
- $\mathrm{Re}\,\alpha = 0$ (実部が零) のとき純虚数
- 複素数はこれらをすべて含む

複素数 (6) (p.13)

定義 1.4

$$\alpha = 0 \overset{\text{def}}{\iff} \operatorname{Re}\alpha = 0 \text{ かつ } \operatorname{Im}\alpha = 0$$

- $0 + 0i$ を 0 と書き, 実数の 0 と複素数の 0 に同じ記号を使う (混乱しないように)
- 複素数が等しいことの定義 (定義 1.5) と四則演算の定義 (定義 1.6) は後回しにする.

$$\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$$

定義に使う記号 (def は definition の略)

複素数の零　　実部が零　　虚部が零

$$0 = 0 + 0i$$

複素平面, ガウス平面 (1) (p.19)

定義 1.8　複素数 $\alpha = a+bi$ に平面の点 $P(a,b)$ を対応させたものを**複素平面**あるいは**ガウス平面**という

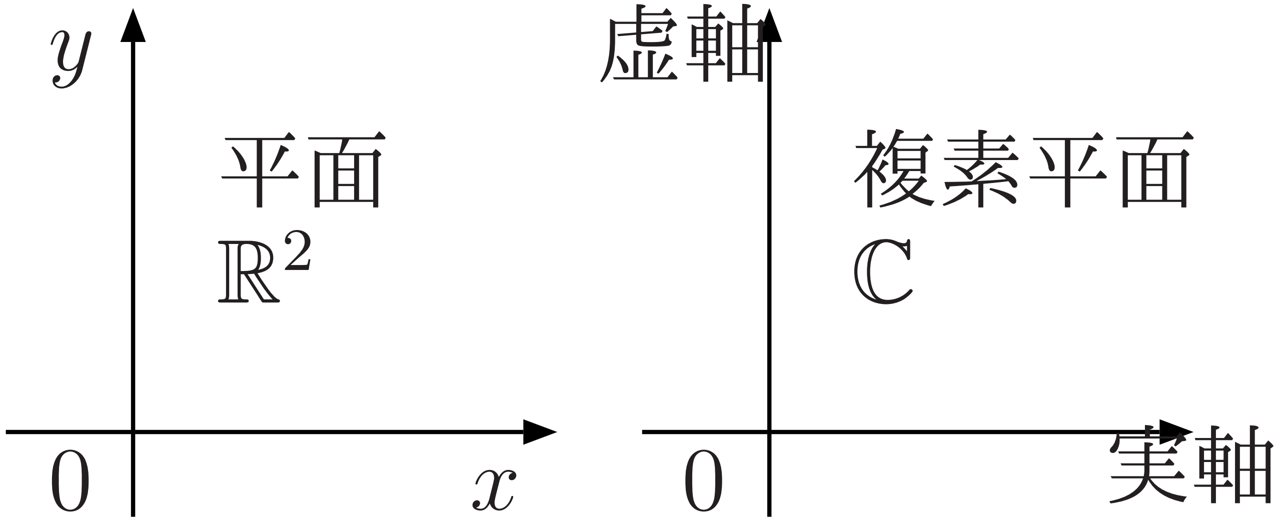
- 2 次元の実ベクトルと平面との対応と同じ
- 複素数 z を**複素平面上の点** z と呼ぶことがある

複素平面, ガウス平面 (2) (p.20)

定義 1.9

- 複素平面の x 軸を**実軸**, y 軸を**虚軸**と呼ぶ
- 複素平面の原点を**点 0** と呼ぶことがある
  ($0 + 0i$ は複素数の 0 だから)

- 平面 $\mathbb{R}^2$ と複素平面 $\mathbb{C}$ は集合としては同じ
- $\mathbb{C}$ では掛け算ができる ($\mathbb{R}^2$ にない特徴)



複素数 (7) (p.14)

定義 1.5 複素数 $\alpha = a + bi, \beta = c + di$ に対し,

$$\alpha = \beta \overset{\text{def}}{\iff} a = c \text{ かつ } b = d$$

- 2 次元ベクトル (a, b) と (c, d) が一致するための条件と同じ

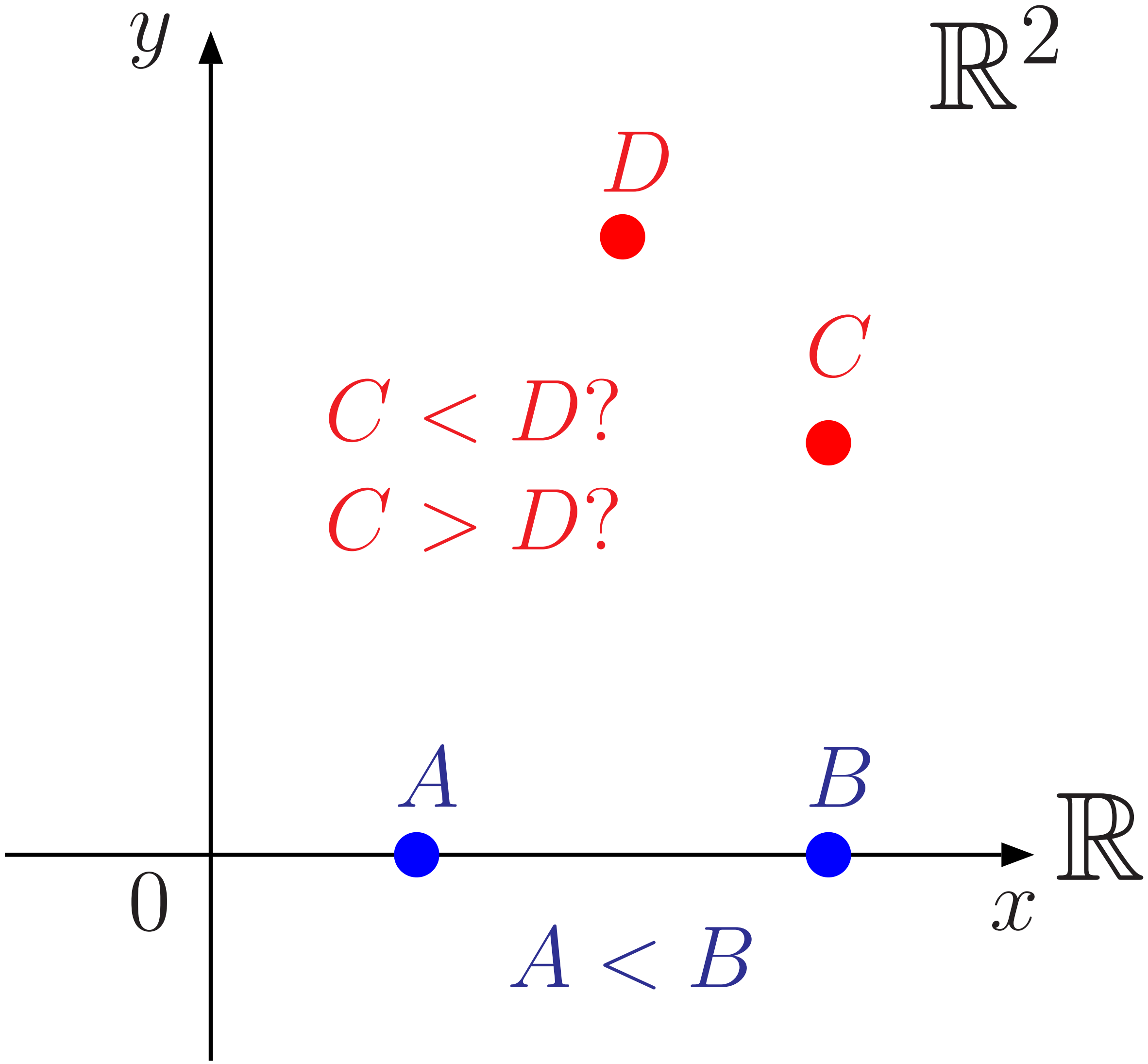
ベータ

$$\beta$$

ギリシア文字

複素数 (8) (p.14)

- 複素数は実数を部分集合として含む (x 軸は xy 平面の一部)
- 実数の範囲では不等号 $\leq$ が定義できるが
- 平面全体では不等号 $\leq$ はうまく定義できない
- 教科書の注意 1.2 はこれを説明している



y
$\mathbb{R}^2$
D
C
$C < D?$
$C > D?$
A
B
$\mathbb{R}$
0
x
$A < B$

複素数の演算 (1) (p.14)

定義 1.6 複素数 $\alpha = a + bi, \beta = c + di$ に対し，

加算: $\alpha + \beta = (a + c) + (b + d)i$

減算: $\alpha - \beta = (a - c) + (b - d)i$

乗算: $\alpha\beta = (ac - bd) + (ad + bc)i$

除算: $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$

- $\alpha\beta$ と書いて α と β の積
- 積の記号はふつう書かない
- 必要なときだけ演算記号 ($\times$ や $\cdot$ など) を書く
- $\dfrac{\alpha}{\beta}$ を α/β と書くことがある

複素数の演算 (2) (p.14)

加算, 減算は $\mathbb{R}^2$ と同じ

$$
\begin{array}{lllll}
\mathbb{C} & (a+bi)+(c+di) & = & (a+c)+(b+d)i \\
\mathbb{R}^2 & (a,b)+(c,d) & = & (a+c,b+d) \\
\hline
\mathbb{C} & (a+bi)-(c+di) & = & (a-c)+(b-d)i \\
\mathbb{R}^2 & (a,b)-(c,d) & = & (a-c,b-d)
\end{array}
$$

複素数の演算 (3) (p.14)

乗算は $i^2 = -1$ を覚えればよい

$$
\begin{aligned}
(a+bi)(c+di) &= ac + adi + bci + bd\underbrace{i^2}_{i^2=-1} \\
&= ac + adi + bci - bd \\
&= (ac - bd) + (ad + bc)i
\end{aligned}
$$

複素数の演算 (4) (p.14)

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{c+di} = \frac{c-di}{(c+di)(c-di)}$$

(分母と分子に $c-di$ を掛ける)

$$= \frac{c-di}{c^2+d^2} \quad (\beta \neq 0\text{ のとき})$$

$\dfrac{\alpha}{\beta}$ の公式よりこちらを覚えた方がよい

複素数の演算 (5) (p.14)

したがって…

$$\frac{\alpha}{\beta} = (a+bi) \times \frac{c-di}{c^2+d^2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

- 14 ページ脚注 6) はこの講義とは無関係 (すでに説明した)
- 教科書では pp.45～46 で説明されている

複素数の演算 (6) (p.15)

$\boxed{\textbf{定理 1.1(1)}}$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ に対し

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha,$$
$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma,$$
$$0 + \alpha = \alpha,$$
$$\alpha + (-\alpha) = 0$$

(2 次元実ベクトルの加算と同じ)

複素数の演算 (8) (p.15)

定理 1.1(2) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ に対し

$$\alpha\beta = \beta\alpha, \quad (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma),$$
$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma,$$
$$\alpha 1 = \alpha, \quad \frac{1}{\alpha}\alpha = 1$$

ガンマ

γ

ギリシア文字

複素数の演算 (7) (p.15)

α の整数次のべきを帰納的に定義する:

$$\alpha^0 = 1$$
$$\alpha^1 = \alpha$$
$$\alpha^n = \alpha(\alpha^{n-1})$$
$$\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}$$

- 例 1.1 から例 1.3 までは各自で読んでおくこと

数学における字体

- 数学では，英文字に関し，日常ではあまり用いられない字体が時折用いられる．
- 次ページ以降によく用いられるものの一覧を示す．

A	$\mathbb{A}$	$\mathcal{A}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$
B	$\mathbb{B}$	$\mathcal{B}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{b}$
C	$\mathbb{C}$	$\mathcal{C}$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{c}$
D	$\mathbb{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{d}$
E	$\mathbb{E}$	$\mathcal{E}$	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{e}$
F	$\mathbb{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathfrak{F}$	$\mathfrak{f}$
G	$\mathbb{G}$	$\mathcal{G}$	$\mathfrak{G}$	$\mathfrak{g}$
H	$\mathbb{H}$	$\mathcal{H}$	$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{h}$
I	$\mathbb{I}$	$\mathcal{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{i}$

J	$\mathbb{J}$	$\mathcal{J}$	$\mathfrak{J}$	$\mathfrak{j}$
K	$\mathbb{K}$	$\mathcal{K}$	$\mathfrak{K}$	$\mathfrak{k}$
L	$\mathbb{L}$	$\mathcal{L}$	$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{l}$
M	$\mathbb{M}$	$\mathcal{M}$	$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{m}$
N	$\mathbb{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathfrak{N}$	$\mathfrak{n}$
O	$\mathbb{O}$	$\mathcal{O}$	$\mathfrak{O}$	$\mathfrak{o}$
P	$\mathbb{P}$	$\mathcal{P}$	$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{p}$
Q	$\mathbb{Q}$	$\mathcal{Q}$	$\mathfrak{Q}$	$\mathfrak{q}$
R	$\mathbb{R}$	$\mathcal{R}$	$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{r}$

S	$\mathbb{S}$	$\mathcal{S}$	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{s}$
T	$\mathbb{T}$	$\mathcal{T}$	$\mathfrak{T}$	$\mathfrak{t}$
U	$\mathbb{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathfrak{U}$	$\mathfrak{u}$
V	$\mathbb{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathfrak{V}$	$\mathfrak{v}$
W	$\mathbb{W}$	$\mathcal{W}$	$\mathfrak{W}$	$\mathfrak{w}$
X	$\mathbb{X}$	$\mathcal{X}$	$\mathfrak{X}$	$\mathfrak{x}$
Y	$\mathbb{Y}$	$\mathcal{Y}$	$\mathfrak{Y}$	$\mathfrak{y}$
Z	$\mathbb{Z}$	$\mathcal{Z}$	$\mathfrak{Z}$	$\mathfrak{z}$

▷ 第 2 列の白抜き文字 (大文字) は, 自然数の全体 $\mathbb{N}$, 整数の全体 $\mathbb{Z}$, 有理数の全体 $\mathbb{Q}$, 実数の全体 $\mathbb{R}$, 複素数の全体 C などで用いられる.

- ▷ 第 3 列の筆記体文字 (大文字のみ) の使い方には明確な慣習はない.

- ▷ 第 4 列, 第 5 列はドイツ文字の大文字と小文字で, 歴史的な理由から, 数学の分野ではしばしば用いられる. 知らないと読めないので注意せよ.