工共 212 工業数学 IV (01, 02 組) 電 210 電気数学 IV

担当者: 半場 滋

教科書

皆本 晃弥, スッキリわかる複素関数論,
近代科学社 (2007), ISBN: 9784764910508

- 教科書とは説明の順番を変える
- 時間不足のため飛ばすところがある
- 興味を持った部分は自分で読むこと

著者のページから正誤表をダウンロードすること.

```
http://www.ma.is.saga-u.ac.jp/
minamoto/book/bookJ5/
seigo_bookJ5_4.pdf
```

第 1 回

複素数

複素数といえば$\cdots$

$$i$$

これは一体何?

2 次方程式が
いつでも解けるよう
実数を拡張したもの

何の役に立つのか?

- 代数方程式 (2 次, 3 次 $\cdots$ の方程式) が解ける
- 定積分が簡単にできるようになる
- 応用がたくさん: 回路理論, 流体力学, 制御工学 (伝達関数と安定性解析), 信号処理 (フィルタの設計)
- 線形代数, フーリエ解析, ラプラス変換, 微分方程式, 関数解析…で複素数は不可欠

高等学校の学習指導要領における複素数教育

- 数学 II : 数を複素数まで拡張する意義を理解し, 複素数の四則演算をすること. また, 二次方程式の解の種類と判別及び解と係数の関係について理解すること.

- 数学 III : 複素数平面と複素数の極形式, 複素数の実数倍, 和, 差, 積及び商の図形的な意味を理解し, それらを事象の考察に活用すること. ド・モアブルの定理について理解すること.

- 高校を卒業した者は
  - ▷ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ となること
  - ▷ 複素数と複素平面が対応すること
  - ▷ 複素平面で i を掛けることが 90 度回転に対応すること

  を理解している筈なのだが $\cdots$
- これらが定着していないことが知られている

複素数の正体

材料は実数
(教科書 45∼46 ページ)

2 次元の実ベクトルに「掛け算」を追加

2 次元実ベクトルの復習

- たし算: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$
- スカラー倍: $a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix}$

2 次元の実ベクトルの全体を…

$$\mathbb{R}^2$$

複素数の構成 (1)

- 新しく掛け算を定義:
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ x_1 y_2 + y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

- これだけで複素数になる

新しく定義する演算であることの 強調のために変な記号を使っている

★

複素数の構成 (2)

- 正しい四則演算ができることは要確認 (資料)
- 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を 1 に,

  $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を i に対応させる

複素数の構成 (3)

- $1 \times 1 = 1,\ 1 \times i = i,\ i \times i = -1$ とならないと困るから…
- $\boldsymbol{e}_1 \bigstar \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_1 \bigstar \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_2 \bigstar \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1$ となることを確認したい
- 計算してみる

複素数の構成 (4)

$$\boldsymbol{e}_1 \bigstar \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} \overset{x_1}{1} \times \overset{x_2}{1} - \overset{y_1}{0} \times \overset{y_2}{0} \\ \overset{x_1}{1} \times \overset{y_2}{0} + \overset{y_1}{0} \times \overset{x_2}{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_1$$

$$\boldsymbol{e}_1 \bigstar \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} \overset{x_1}{1} \times \overset{x_2}{0} - \overset{y_1}{0} \times \overset{y_2}{1} \\ \overset{x_1}{1} \times \overset{y_2}{1} + \overset{y_1}{0} \times \overset{x_2}{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_2$$

複素数の構成 (5)

$$\boldsymbol{e}_2 \bigstar \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} \overset{x_1}{0} \times \overset{x_2}{0} - \overset{y_1}{1} \times \overset{y_2}{1} \\ \overset{x_1}{0} \times \overset{y_2}{1} + \overset{y_1}{1} \times \overset{x_2}{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{e}_1$$

複素数の構成 (6)

$1 \times 1 = 1$	$1 \times i = i$	$i \times i = -1$
$\boldsymbol{e}_1 \bigstar \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_1 \bigstar \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_2 \bigstar \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1$

- たしかに計算は合っている
- 結局, 複素数とは **2 次元の実ベクトルの全体 ($\mathbb{R}^2$) に新たに掛け算を定義したものだった**

複素数
=2 次元の実ベクトル
+ 掛け算

複素数の構成 (7)

基本ベクトル表示	$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$
$\boldsymbol{e}_1 \to \mathbf{1}$, $\boldsymbol{e}_2 \to \boldsymbol{i}$ と書き直すと…	$\boldsymbol{z} = x\mathbf{1} + y\boldsymbol{i}$
太字をやめて 1 を略すと…	$z = x + iy$

複素数の構成 (8)

- $z = x + iy$ という形は見たことがあるはず
- 複素数の構成法は他にもあるので注意

複素数の構成 (9) (p.11)

- 複素数は 2 次の数ベクトル $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に掛け算を追加したもの

- 以下, 教科書に合わせてベクトルの表記を縦ベクトルから横ベクトルに変える

$$z = (x, y)$$

複素数の構成 (10) (p.11)

- (復習) 実数には数直線が対応した
- 複素数の実体は $\mathbb{R}^2$ だから複素数には平面が対応する
- これを複素平面あるいはガウス平面とよぶ(p.19)

複素数の全体を…

$$\mathbb{C}$$

複素数の構成 (11) (p.11)

- 集合としては $\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{C}$ は同じ
- 違うのは掛け算が定義されているか否か
- $\mathbb{R}^2$ ではベクトルどうしの掛け算は未定義
- $\mathbb{C}$ では複素数どうしの掛け算ができる

複素数 (1) (p.12)

定義 1.1 $\quad i \times i = -1$ を満たす
'数' を**虚数単位**という ($\sqrt{-1}$ と書くこともある)

- i の実体は $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$
  (表記を横ベクトルに変えているので注意)

- $(-i) \times (-i) = -1$ だから
  方程式 $x^2 = -1$ は 2 個の解を持つ (i と $-i$)

複素数 (2) (p.12)

- 複素数の構成法は他にもある (p.12 の記述はこれをふまえている)
- $-i$ については次のように理解する方がよい:

$\mathbb{C}$	$i = 0 + 1i$	$-i = 0 - 1i$
$\mathbb{R}^2$	$(0, 1)$	$(0, -1)$

- 定義 1.2 は無視してよい

複素数 (3) (p.13)

- 複素数とは $\boldsymbol{\alpha} = (a, b) = a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2$ なのだが…
- $\alpha = a + bi$ と書くのがふつう ($\boldsymbol{e}_1$ は略す, $\boldsymbol{e}_2$ を i と書き換え)

アルファ

$$\alpha$$

これはギリシア文字

a と混乱しないように

- 複素解析ではギリシア文字がよく使われる
- ギリシア文字一覧: 配付資料
- 習慣的に, 英文字, ギリシア文字の
    - ▷ 前半…定数
    - ▷ 後半…変数

  という使い分け (厳密ではない)

$$a + bi? \quad a + ib?$$

大抵はどちらでもよいが

習慣的に使い分ける場合がある

(p.13 脚注 5 参照)

複素数 (4) (p.13)

定義 1.3

- 複素数: $\alpha = a + ib$ という形のもの
- a: 実部, $a = \operatorname{Re}\alpha$ と書く
- b: 虚部, $b = \operatorname{Im}\alpha$ と書く

複素数 (5) (p.13)

- $\mathrm{Im}\,\alpha = 0$ (虚部が零) のとき実数
- $\mathrm{Im}\,\alpha \neq 0$ のとき虚数
- $\mathrm{Re}\,\alpha = 0$ (実部が零) のとき純虚数
- 複素数はこれらをすべて含む

複素数 (6) (p.13)

定義 1.4

$$\alpha = 0 \overset{\text{def}}{\iff} \operatorname{Re}\alpha = 0 \text{ かつ } \operatorname{Im}\alpha = 0$$

- $0 + 0i$ を 0 と書き, 実数の 0 と複素数の 0 に同じ記号を使う (混乱しないように)
- 複素数が等しいことの定義 (定義 1.5) と四則演算の定義 (定義 1.6) は後回しにする.

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$$

定義に使う記号 (def は definition の略)

複素数の零　実部が零　虚部が零

$$0 = 0 + 0\,i$$

複素平面, ガウス平面 (1) (p.19)

定義 1.8　複素数 $\alpha = a + bi$ に平面の点 $P(a, b)$ を対応させたものを複素平面あるいはガウス平面という

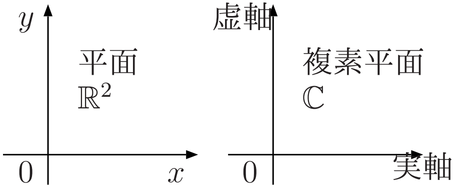
- 2 次元の実ベクトルと平面との対応と同じ
- 複素数 z を複素平面上の点 z と呼ぶことがある

複素平面, ガウス平面 (2) (p.20)

定義 1.9

- 複素平面の x 軸を実軸, y 軸を虚軸と呼ぶ
- 複素平面の原点を点 **0** と呼ぶことがある $(0 + 0i$ は複素数の 0 だから$)$

- 平面 $\mathbb{R}^2$ と複素平面 $\mathbb{C}$ は集合としては同じ
- $\mathbb{C}$ では掛け算ができる ($\mathbb{R}^2$ にない特徴)



複素数 (7) (p.14)

定義 1.5 複素数 $\alpha = a + bi, \beta = c + di$ に対し,

$$\alpha = \beta \overset{\text{def}}{\iff} a = c \text{ かつ } b = d$$

- 2次元ベクトル (a, b) と (c, d) が一致するための条件と同じ

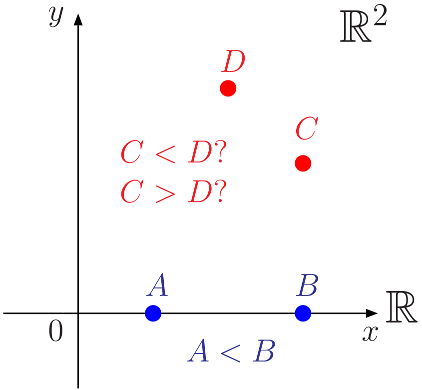
ベータ

$$\beta$$

ギリシア文字

複素数 (8) (p.14)

- 複素数は実数を部分集合として含む (x 軸は xy 平面の一部)
- 実数の範囲では不等号 $\leq$ が定義できるが
- 平面全体では不等号 $\leq$ はうまく定義できない
- 教科書の注意 1.2 はこれを説明している



y
$\mathbb{R}^2$
D
C
$C < D?$
$C > D?$
A
B
$\mathbb{R}$
0
x
$A < B$

演習 1-1

各自で空欄を埋めよ

演習 1-1 解答

$$\alpha = 2+3i, \qquad \operatorname{Re}\alpha = \boxed{2}, \qquad \operatorname{Im}\alpha = \boxed{3}$$

$$\alpha = -2+5i, \qquad \operatorname{Re}\alpha = \boxed{-2}, \qquad \operatorname{Im}\alpha = \boxed{5}$$

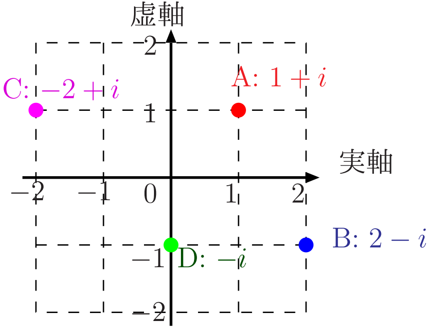
$$\alpha = -6, \qquad \operatorname{Re}\alpha = \boxed{-6}, \qquad \operatorname{Im}\alpha = \boxed{0}$$

$$\alpha = 7i, \qquad \operatorname{Re}\alpha = \boxed{0}, \qquad \operatorname{Im}\alpha = \boxed{7}$$

演習 1-2

図中に A,B,C,D を書き込め

演習 1-2 解答



複素数の演算 (1) (p.14)

定義 1.6 　複素数 $\alpha = a + bi, \beta = c + di$ に対し,

加算: $\alpha + \beta = (a + c) + (b + d)i$

減算: $\alpha - \beta = (a - c) + (b - d)i$

乗算: $\alpha\beta = (ac - bd) + (ad + bc)i$

除算: $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$

- $\alpha\beta$ と書いて α と β の積
- 積の記号はふつう書かない
- 必要なときだけ演算記号 ($\times$ や $\cdot$ など) を書く
- $\dfrac{\alpha}{\beta}$ を α/β と書くことがある

複素数の演算 (2) (p.14)

加算, 減算は $\mathbb{R}^2$ と同じ

$$
\begin{array}{lll}
\mathbb{C} & (a+bi)+(c+di) & = & (a+c)+(b+d)i \\
\mathbb{R}^2 & (a,b)+(c,d) & = & (a+c,b+d) \\
\hline
\mathbb{C} & (a+bi)-(c+di) & = & (a-c)+(b-d)i \\
\mathbb{R}^2 & (a,b)-(c,d) & = & (a-c,b-d)
\end{array}
$$

複素数の演算 (3) (p.14)

乗算は $i^2 = -1$ を覚えればよい

$$
\begin{aligned}
(a+bi)(c+di) &= ac + adi + bci + bd \underbrace{i^2}_{i^2=-1} \\
&= ac + adi + bci - bd \\
&= (ac - bd) + (ad + bc)i
\end{aligned}
$$

複素数の演算 (4) (p.14)

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{c+di} = \frac{c-di}{(c+di)(c-di)}$$

(分母と分子に $c - di$ を掛ける)

$$= \frac{c-di}{c^2+d^2} \quad (\beta \neq 0 \text{ のとき})$$

$\dfrac{\alpha}{\beta}$ の公式よりこちらを覚えた方がよい

複素数の演算 (5) (p.14)

したがって…

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\beta} &= (a+bi) \times \frac{c-di}{c^2+d^2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} \\
&= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} \\
&= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i
\end{aligned}
$$

- 14 ページ脚注 6) はこの講義とは無関係 (すでに説明した)
- 教科書では pp.45∼46 で説明されている

演習 1-3

各自で空欄を埋めよ

- 穴埋め式という出題形式の関係で時折 $\boxed{1} + \boxed{-1}\,i$ などといった複素数として標準的でない書き方が出て来るが, 適宜 $1 - i$ などで読み換えること

演習 1-3 解答 (1)

1. $(1+i)+(-2-2i) = \boxed{-1} + \boxed{-1}\,i \qquad (= -1-i)$
   (穴埋めの都合で $-1 + -1i$ という変な書き方になっているが穴埋めでなければ $-1-i$ と書くのが正しい, 以下も同様)

2. $(1+i)-(-2-2i) = \boxed{3} + \boxed{3}\,i$

演習 1-3 解答 (2)

3. $(1+i)(1+2i) = \boxed{-1} + \boxed{3}i$

4. $\dfrac{1}{1+2i} = \boxed{\dfrac{1}{5}} + \boxed{-\dfrac{2}{5}}i \quad (= \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i)$ だから

$$\frac{1+i}{1+2i} = (1+i)(\boxed{\frac{1}{5}} + \boxed{-\frac{2}{5}}i) = \boxed{\frac{3}{5}} + \boxed{-\frac{1}{5}}i$$

$(= \dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{5}i)$

複素数の演算 (6) (p.15)

定理 1.1(1) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ に対し

$$\begin{aligned} &\alpha + \beta = \beta + \alpha, \\ &\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma, \\ &0 + \alpha = \alpha, \\ &\alpha + (-\alpha) = 0 \end{aligned}$$

(2 次元実ベクトルの加算と同じ)

複素数の演算 (8) (p.15)

定理 1.1(2) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ に対し

$$\alpha\beta = \beta\alpha, \quad (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma),$$
$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma,$$
$$\alpha 1 = \alpha, \quad \frac{1}{\alpha}\alpha = 1$$

(配付資料に証明がある)

ガンマ

γ

ギリシア文字

複素数の演算 (7) (p.15)

α の整数次のべきを帰納的に定義する:

$$\alpha^0 = 1$$
$$\alpha^1 = \alpha$$
$$\alpha^n = \alpha(\alpha^{n-1})$$
$$\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}$$

- 例 1.1 から例 1.3 までは各自で読んでおくこと

演習 1-4

- 各自で空欄を埋めよ
- この演習の趣旨は定理 1.1 が成り立っていることを手を動かしながら数値例で確認することである. 面倒でも計算してみること.

演習 1-4 解答 (1)

1. $(1+2i)+(-2+i) = \boxed{-1} + \boxed{3}i$

2. $(-2+i)+(1+2i) = \boxed{-1} + \boxed{3}i$

3. $((-2+i)+(2-i))+(1-i) = (\boxed{0}+\boxed{0}i)+(1-i) = \boxed{1} + \boxed{-1}i \quad (= 1-i)$

4. $(-2+i)+((2-i)+(1-i)) = (-2+i)+(\boxed{3}+\boxed{-2}i) = \boxed{1} + \boxed{-1}i \quad (= 1-i)$

演習 1-4 解答 (2)

5. $\alpha = 2 - 4i$ のとき $-\alpha = \boxed{-2} + \boxed{4}\,i$,
   $\alpha + (-\alpha) = \boxed{0} + \boxed{0}\,i \quad (= 0)$

6. $(-1 - 4i) + 0 = \boxed{-1} + \boxed{-4}\,i \quad (= -1 - 4i)$

演習 1-5

- 各自で空欄を埋めよ
- この演習の趣旨は定理 1.1 が成り立っていることを手を動かしながら数値例で確認することである．面倒でも計算してみること．

演習 1-5 解答

1. $(1+i)(1+2i) = \boxed{-1} + \boxed{3}i$
2. $(1+2i)(1+i) = \boxed{-1} + \boxed{3}i$
3. $((1+i)(1-i))(2+i) = (\boxed{2}+\boxed{0}i)(2+i) = \boxed{4}+\boxed{2}i$
4. $(1+i)((1-i)(2+i)) = (1+i)(\boxed{3} + \boxed{-1}i) = \boxed{4} + \boxed{2}i$

演習 1-6

- 各自で空欄を埋めよ.
- 演習中の $1+0i$ という書き方は標準的でないが, 虚部が零であることを強調するために敢えて書いてある

演習 1-6 解答

1. $(1+i)((1+i)+(1-i)) = (1+i)(\boxed{2}+\boxed{0}i) = \boxed{2}+\boxed{2}i$

2. $(1+i)(1+i)+(1+i)(1-i) = (\boxed{0}+\boxed{2}i)+(\boxed{2}+\boxed{0}i) = \boxed{2}+\boxed{2}i$

3. $(2+3i)(1+0i) = \boxed{2}+\boxed{3}i$

4. $(1+i)^2 = \boxed{0}+\boxed{2}i$