学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

講義中の指示にしたがって空欄を埋め, 正しいと思われる方を選択せよ (演習の解答は講義終了後に掲示板に貼り出す). 空欄が小さいときには横に書いてもよい.

演習 14-1 この演習では $1/\cos z$ の $z = \pi/2$ における留数を計算するが, 計算に先立って $\cos z$ の性質について復習しておく. 複素変数 z に対し, $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ であった (例 4.8, p.132). $\cos z = 0$ を満たす点 z をすべて求める. $z = x + iy$ としたとき, オイラーの公式を使うと, $e^{iz} = e^{-y+ix} = e^{-y}e^{ix} = e^{-y}(\boxed{\quad})$ と書ける. 同様に, $e^{-iz} = e^{y-ix} = e^{y}e^{-ix} = e^{y}(\boxed{\quad})$ である. したがって, $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = (\boxed{\quad})\cos x + i(\boxed{\quad})\sin x$ である. $e^{y} + e^{-y} > 0$ であるから, $\cos z = 0$ となるためには, $\cos x = \boxed{\quad}$ かつ $\dfrac{e^{-y} - e^{y}}{2} = \boxed{\quad}$ であることが必要かつ十分であることがわかる. そして, この条件を満たすためには, $x = \boxed{\quad}$, $y = \boxed{\quad}$ であることが必要かつ十分である.

さて, $z = \pi/2$ において $\cos z = \boxed{\quad}$ だから, $z = \pi/2$ は $1/\cos z$ の特異点で ある・ない. また, $z = \pi/2$ の十分小さい除外近傍では, 上に述べた結果により, $\cos z$ は零に なる・ならない から, $z = \pi/2$ は $1/\cos z$ の孤立特異点で ある・ない.

留数の計算の準備として, $\cos z$ の $z = \pi/2$ のまわりのテイラー展開を求める. 直接計算してもよいのだが, もう少し楽な方法を考える. $f(\xi + \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n$ というテイラー級数展開が得られているとき, $z = \xi + \alpha$ とおくと, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n$ となるから, α のまわりのテイラー展開が得られる. さて, 例 4.12 (p.134) より, $\cos(\xi + \frac{\pi}{2}) = \cos\xi\cos\frac{\pi}{2} - \sin\xi\sin\frac{\pi}{2}$ だから, 定義 4.10 (p.130) より,

$$\cos(\xi + \frac{\pi}{2}) = -\sin\xi = \boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

というテイラー展開が得られる. $\xi + \pi/2 = z$ とおいてこれを書き直すと,

$$\cos z = \boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

という $\cos z$ の $z = \pi/2$ のまわりのテイラー展開が得られる. 例 6.7(p.238) により, $z = \pi/2$ は $\cos z$ の $\boxed{\quad}$ 位の零点であり, よって $z = \pi/2$ は $1/\cos z$ の 正則点・除去可能特異点・$\boxed{\quad}$位の極・真性特異点 である. したがって, $z = \pi/2$ における $1/\cos z$ の留数の計算に定理 7.2 が適用 できない・できて留数は$\boxed{\quad}$となる.

演習 14-2　この演習では, 定理 7.3 を使い, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{5}{3}+\cos\theta} d\theta$ を計算する. $z(\theta) = e^{i\theta}$ とおくと, $\frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} = iz$ であり, したがって形式的に $d\theta = \dfrac{dz}{iz}$ と書ける. また, $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \dfrac{z(\theta)+\frac{1}{z(\theta)}}{2}$ である. C を正の向きが付いた単位円とし, 上記を利用して $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{5}{3}+\cos\theta} d\theta$ を複素積分の形で書き直すと $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{5}{3}+\cos\theta} d\theta = \int_C \frac{1}{\frac{5}{3}+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}} \frac{dz}{iz}$ となるが, $f(z) = \frac{1}{\frac{5}{3}+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}} \frac{1}{z}$ とし, これを整理して因数分解すると $f(z) =$ $\boxed{}$ である. したがって, $f(z)$ の単位円内の極は $z = \boxed{}$ であり, 定理 7.3 および定理 7.2 により, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{5}{3}+\cos\theta} d\theta = 2\pi \mathrm{Res}\,(f, \boxed{}) = \boxed{}$ となる.

演習 14-3 この演習では, 定理 7.4 を使い, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$ を計算する. $P(z)=1$, $Q(z)=(z^2+1)(z^2+4)$ とし, $P(z)$ の次数を m, $Q(z)$ の次数を n とすると, $m=\boxed{\quad}$, $n=\boxed{\quad}$ である. よって, 定理 7.4 の, $n\geq m+2$ という条件は満たされ$\boxed{\text{る・ない}}$.
次に, $Q(z)$ の零点を計算する. $Q(z)$ を因数分解すると

$$Q(z)=\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

であり, $Q(z)$ の零点は$\boxed{\quad}$, $\boxed{\quad}$, $\boxed{\quad}$, $\boxed{\quad}$である. このうち, 上半平面 ($\mathrm{Re}\,z>0$) にある零点は$\boxed{\quad}$, $\boxed{\quad}$である. $Q(z)$ は実軸上に零点を持$\boxed{\text{ち・たず}}$, 定理 7.4 の「$Q(x)$ が実軸上に零点を持たない」という条件は満たされ$\boxed{\text{る・ない}}$.
定理 7.4 にしたがって $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ を計算すると, 定理 7.2 より, $\mathrm{Res}\,(P/Q,\boxed{\quad})=\boxed{\quad}$, $\mathrm{Res}\,(P/Q,\boxed{\quad})=\boxed{\quad}$ なので, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\boxed{\qquad\qquad}$ となる.

演習 14-4 この演習では, 定理 7.4 を使い, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+4)^2}dx$ を計算する. $P(z)=1$, $Q(z)=(z^2+4)^2$ とし, $P(z)$ の次数を m, $Q(z)$ の次数を n とすると, $m=\boxed{\quad}$, $n=\boxed{\quad}$ である. よって, 定理 7.4 の, $n\geq m+2$ という条件は満たされ$\boxed{\text{る・ない}}$.
次に, $Q(z)$ の零点を計算する. $Q(z)$ を因数分解すると

$$Q(z)=\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

であり, $Q(z)$ の零点は$\boxed{\quad}$, $\boxed{\quad}$である. このうち, 上半平面 ($\mathrm{Re}\,z>0$) にある零点は$\boxed{\quad}$であり, これを $P(z)/Q(z)$ の極と考えた場合, その位数は$\boxed{\quad}$である. $Q(z)$ は実軸上に零点を持$\boxed{\text{ち・たず}}$, 定理 7.4 の「$Q(x)$ が実軸上に零点を持たない」という条件は満たされ$\boxed{\text{る・ない}}$.
定理 7.4 にしたがって $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ を計算すると, 定理 7.2 より (極の位数に注意), $\mathrm{Res}\,(P/Q,\boxed{\quad})=\boxed{\quad}$ なので, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\boxed{\qquad\qquad}$ となる.

演習 14-5 この演習では，定理 7.5 を使い，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+4}\cos\frac{x}{2}dx$ と $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+4}\sin\frac{x}{2}dx$ を計算する． このためには，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+4}e^{i\frac{x}{2}}$ を計算し，その実部と虚部を取ればよい．

$P(z)=z$, $Q(z)=z^2+4$ とし, $P(z)$ の次数を m, $Q(z)$ の次数を n とすると, $m=\boxed{}$, $n=\boxed{}$ である．よって, 定理 7.4 の, $n\geq m+1$ という条件は満たされ $\boxed{\text{る・ない}}$.

次に, $Q(z)$ の零点を計算する．$Q(z)$ を因数分解すると

$$Q(z)=\boxed{}$$

であり, $Q(z)$ の零点は $\boxed{}$, $\boxed{}$ である．このうち, 上半平面 $(\mathrm{Re}\,z>0)$ にある零点は $\boxed{}$ であり，これを $P(z)/Q(z)$ の極と考えた場合, その位数は $\boxed{}$ である．$Q(z)$ は実軸上に零点を持 $\boxed{\text{ち・たず}}$, 定理 7.4 の「$Q(x)$ が実軸上に零点を持たない」という条件は満たされ $\boxed{\text{る・ない}}$.

定理 7.4 にしたがって $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{\frac{x}{2}}dx$ を計算すると，定理 7.2 より (極の位数に注意)，$\mathrm{Res}\,((P(z)/Q(z))e^{i\frac{z}{2}},\boxed{})=\boxed{}$ なので，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(P(x)/Q(x))e^{i\frac{x}{2}}dx=\boxed{}$ となる． この実部と虚部を取ることにより，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(P(x)/Q(x))\cos\frac{x}{2}dx=\boxed{}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(P(x)/Q(x))\sin\frac{x}{2}dx=\boxed{}$ となることがわかる．

講義の感想・質問・意見等があれば書け (成績には関係しない)