学籍番号 ＿＿＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿

講義中の指示にしたがって空欄を埋め, 正しいと思われる方を選択せよ (演習の解答は講義終了後に掲示板に貼り出す). 空欄が小さいときには横に書いてもよい.

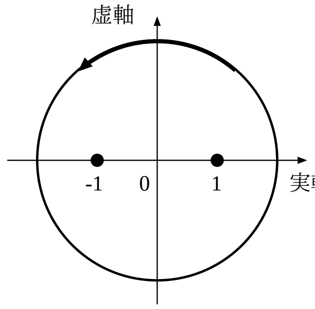
演習 13-1 $\dfrac{1}{(z-1)^3}$ の $z = 1$ における留数を 2 通りのやり方で求める. まず $\dfrac{1}{(z-1)^3} = 1\cdot(z-1)^{-3} + 0\cdot(z-1)^{-2} + 0\cdot(z-1)^{-1} + 0\cdot(z-1)^{-1} + \cdots$ というふうに解釈すれば, これはすでに $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 1\}$ におけるローラン展開になっているから, 254 ページ (7.2) 式 (あるいは講義資料 6 ページの命題) により, $\mathrm{Res}\,(f,\alpha) = \boxed{}$ である. 一方, 定理 7.2 を使うと, $z = 1$ は $f(z)$ の $\boxed{}$ 位の極だから,

$$\frac{1}{\boxed{}\,!}\lim_{z\to 1}\left(\frac{d^{\boxed{}}}{dz^{\boxed{}}}(z-1)^{\boxed{}}(z-1)^{-3}\right) = \boxed{}$$

であり, よって $\mathrm{Res}\,(f,\alpha) = \boxed{}$ である. これらの計算結果は一致 する・しない.

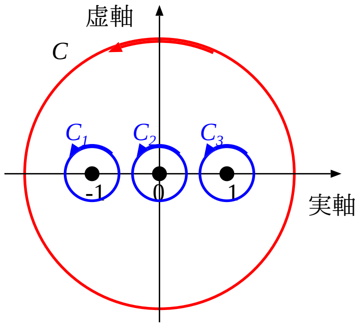
演習 13-2

$f(z) = \frac{z}{z^2-1}$ とし, 定理 7.1 を利用して, 正の向きのついた半径 2 の円 C に沿って $f(z)$ を積分した値 $\int_C f(z)dz$ を求める. $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-1)}$ と書けるが, これを $f(z) = \frac{1}{(z+1)}g_1(z)$, $g_1(z) = \frac{z}{z-1}$ と書き直すと, $g_1(-1) = \boxed{} \neq 0$ だから, $z = -1$ は $f(z)$ の $\boxed{}$ 位の極であることがわかる. 同様に, $f(z) = \frac{1}{(z-1)}g_2(z)$, $g_2(z) = \frac{z}{z+1}$ と書き直すと, $g_2(1) = \boxed{} \neq 0$ だから, $z = 1$ は $f(z)$ の $\boxed{}$ 位の極であることがわかる. したがって, 定理 7.1 により, $\int_C f(z)dz = 2\pi i\,(\mathrm{Res}\,(f,-1) + \mathrm{Res}\,(f,1))$ であるが, 定理 7.2 によって留数を計算すると, $\mathrm{Res}\,(f,-1) = \boxed{}$, $\mathrm{Res}\,(f,1) = \boxed{}$ である. よって, 定理 7.1 により, $\int_C f(z)dz = \boxed{}$ である.



演習 13-3

関数 $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2-1)}$ を, 正の向きがついた原点を中心とする半径 2 の円に沿って積分することを考える. まず, $f(z)$ を



$$\frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z+1} \qquad (\heartsuit)$$

という形に部分分数展開する. $(\heartsuit)$ が $f(z)$ に一致するためには,

$$\frac{A(z-1)(z+1)}{z(z-1)(z+1)} + \frac{Bz(z+1)}{(z-1)z(z+1)} + \frac{Cz(z-1)}{(z+1)z(z-1)} = \frac{1}{z(z-1)(z+1)} \qquad (\clubsuit)$$

でなければならないが, $(\clubsuit)$ はさらに

$$\frac{A(z^2-1) + B(z^2+z) + C(z^2-z)}{z(z-1)(z+1)} = \frac{1}{z(z-1)(z+1)} \qquad (\spadesuit)$$

と書き直せる. $(\spadesuit)$ の左辺の分子を z の多項式として整理すると, z^2 の係数は $\boxed{\qquad}$, z の係数は $\boxed{\qquad}$, 定数項は $\boxed{\qquad}$ となる. よって, $\boxed{\qquad} = 0$, $\boxed{\qquad} = 0$, $\boxed{\qquad} = 1$ を A, B, C について解けば部分分数展開を求めることができ, $A = \boxed{\quad}$, $B = \boxed{\quad}$, $C = \boxed{\qquad}$ となる.

さて, 右の図のように C_1, C_2, C_3 を取ると, 定理 5.21 により, $\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz$ と書き直せる. さて, $z=-1$ において $1/z$ と $1/(z+1)$ は正則, $z=0$ において $1/(z-1)$ と $1/(z+1)$ は正則, $z=1$ において $1/z$ と $1/(z-1)$ は正則だから,

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_1} \frac{C}{z+1}dz,\ \int_{C_2} f(z)dz = \int_{C_2} \frac{A}{z}dz,\ \int_{C_3} f(z)dz = \int_{C_3} \frac{B}{z-1}dz$$

である. ここに A, B, C の値を代入して 254 ページ (7.2) 式 (あるいは講義資料 6 ページの命題) を使うと, $\int_C f(z)dz = \boxed{\qquad}$ となる.

講義の感想・質問・意見等があれば書け (成績には関係しない)