学籍番号 ____________ 氏名 __________________

講義中の指示にしたがって空欄を埋め, 正しいと思われる方を選択せよ (演習の解答は講義終了後に掲示板に貼り出す). 空欄が小さいときには横に書いてもよい.

演習 13-1 正しいと思うものを選べ.

1. $f(z) = \begin{cases} 1, & z = 0, \\ z, & z \neq 0 \end{cases}$ としたとき, $z = 0$ は $f(z)$ の
   特異点でない・除去可能特異点である・極である・真性特異点である.

2. $f(z) = \dfrac{1}{z}$ としたとき, $z = 0$ は $f(z)$ の
   特異点でない・除去可能特異点である・極である・真性特異点である.

3. $f(z) = e^{1/z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}$ としたとき, $z = 0$ は $f(z)$ の
   特異点でない・除去可能特異点である・極である・真性特異点である.

4. $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ $(|z| < 1)$ としたとき, $z = 0$ は $f(z)$ の
   特異点でない・除去可能特異点である・極である・真性特異点である.

演習 13-2 正しいと思うものを選べ.

1. $f(z) = z$ に対し, $z = 0$ は $f(z)$ の
   零点でない・1 位の零点である・2 位の零点である・3 位の零点である.

2. $f(z) = z^2 + z^3$ に対し, $z = 0$ は $f(z)$ の
   零点でない・1 位の零点である・2 位の零点である・3 位の零点である.

3. $f(z) = z^2 - 2z + 1$ に対し, $z = 1$ は $f(z)$ の
   零点でない・1 位の零点である・2 位の零点である・3 位の零点である.

4. $f(z) = z^2 - 2z + 1$ に対し, $z = -1$ は $f(z)$ の
   零点でない・1 位の零点である・2 位の零点である・3 位の零点である.

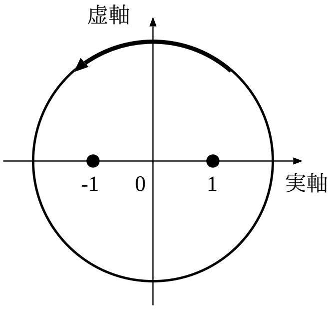
演習 13-3 $\dfrac{1}{(z-1)^3}$ の $z = 1$ における留数を 2 通りのやり方で求める． まず $\dfrac{1}{(z-1)^3} = 1\cdot(z-1)^{-3} + 0\cdot(z-1)^{-2} + 0\cdot(z-1)^{-1} + 0\cdot(z-1)^{-1} + \cdots$ というふうに解釈すれば, これはすでに $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 1\}$ におけるローラン展開になっているから, 254 ページ (7.2) 式 (あるいは講義資料 6 ページの命題) により, $\mathrm{Res}\,(f, \alpha) = \boxed{\quad}$ である．一方, 定理 7.2 を使うと, $z = 1$ は $f(z)$ の $\boxed{\quad}$ 位の極だから,

$$\frac{1}{\boxed{\quad}!}\lim_{z\to 1}\left(\frac{d^{\boxed{\,}}}{dz^{\boxed{\,}}}(z-1)^{\boxed{\,}}(z-1)^{-3}\right) = \boxed{\quad}$$

であり, よって $\mathrm{Res}\,(f, \alpha) = \boxed{\quad}$ である．これらの計算結果は一致 $\boxed{\text{する・しない}}$.

演習 13-4

$f(z) = \frac{z}{z^2-1}$ とし, 定理 7.1 を利用して, 正の向きのついた半径 2 の円 C に沿って $f(z)$ を積分した値 $\int_C f(z)dz$ を求める．$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-1)}$ と書けるが, これを $f(z) = \frac{1}{(z+1)}g_1(z)$, $g_1(z) = \frac{z}{z-1}$ と書き直すと, $g_1(-1) = \boxed{\quad} \neq 0$ だから, $z = -1$ は $f(z)$ の $\boxed{\quad}$ 位の極であることがわかる．同様に, $f(z) = \frac{1}{(z-1)}g_2(z)$, $g_2(z) = \frac{z}{z+1}$ と書き直すと, $g_2(1) = \boxed{\quad} \neq 0$ だから, $z = 1$ は $f(z)$ の $\boxed{\quad}$ 位の極であることがわかる．

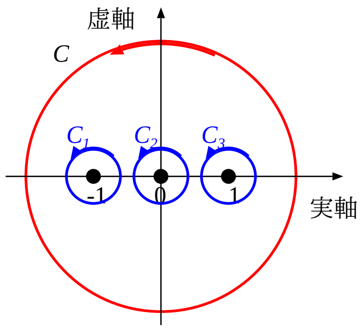


したがって, 定理 7.1 により, $\int_C f(z)dz = 2\pi i\,(\mathrm{Res}\,(f, -1) + \mathrm{Res}\,(f, 1))$ であるが, 定理 7.2 によって留数を計算すると, $\mathrm{Res}\,(f, -1) = \boxed{\quad}$, $\mathrm{Res}\,(f, 1) = \boxed{\quad}$ である．よって, 定理 7.1 により, $\int_C f(z)dz = \boxed{\qquad}$ である.

$\boxed{\textbf{演習 13-5}}$

関数 $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2-1)}$ を, 正の向きがついた原点を中心とする半径 2 の円に沿って積分することを考える. まず, $f(z)$ を

$$\frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z+1} \qquad (\heartsuit)$$



という形に部分分数展開する. $(\heartsuit)$ が $f(z)$ に一致するためには,

$$\frac{A(z-1)(z+1)}{z(z-1)(z+1)} + \frac{Bz(z+1)}{(z-1)z(z+1)} + \frac{Cz(z-1)}{(z+1)z(z-1)} = \frac{1}{z(z-1)(z+1)} \qquad (\clubsuit)$$

でなければならないが, $(\clubsuit)$ はさらに

$$\frac{A(z^2-1)+B(z^2+z)+C(z^2-z)}{z(z-1)(z+1)} = \frac{1}{z(z-1)(z+1)} \qquad (\spadesuit)$$

と書き直せる. $(\spadesuit)$ の左辺の分子を z の多項式として整理すると, z^2 の係数は $\boxed{}$, z の係数は $\boxed{}$, 定数項は $\boxed{}$ となる. よって, $\boxed{} = 0$, $\boxed{} = 0$, $\boxed{} = 1$ を A, B, C について解けば部分分数展開を求めることができ, $A = \boxed{}$, $B = \boxed{}$, $C = \boxed{}$ となる.

さて, 右の図のように C_1, C_2, C_3 を取ると, 定理 5.21 により, $\displaystyle\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz$ と書き直せる. さて, $z=-1$ において $1/z$ と $1/(z+1)$ は正則, $z=0$ において $1/(z-1)$ と $1/(z+1)$ は正則, $z=1$ において $1/z$ と $1/(z-1)$ は正則だから,

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_1} \frac{C}{z+1}dz, \int_{C_2} f(z)dz = \int_{C_2} \frac{A}{z}dz, \int_{C_3} f(z)dz = \int_{C_3} \frac{B}{z-1}dz$$

である. ここに A, B, C の値を代入して 254 ページ (7.2) 式 (あるいは講義資料 6 ページの命題) を使うと, $\displaystyle\int_C f(z)dz = \boxed{}$ となる.

演習 13-6 この演習では $1/\cos z$ の $z=\pi/2$ における留数を計算するが, 計算に先立って $\cos z$ の性質について復習しておく. 複素変数 z に対し, $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ であった (例 4.8, p.132). $\cos z = 0$ を満たす点 z をすべて求める. $z=x+iy$ としたとき, オイラーの公式を使うと, $e^{iz}=e^{-y+ix}=e^{-y}e^{ix}=e^{-y}(\boxed{\quad\quad\quad\quad})$ と書ける. 同様に, $e^{-iz}=e^{y-ix}=e^{y}e^{-ix}=e^{y}(\boxed{\quad\quad\quad\quad})$ である. したがって, $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = (\boxed{\quad\quad})\cos x + i(\boxed{\quad\quad})\sin x$ である. $e^{y}+e^{-y}>0$ であるから, $\cos z = 0$ となるためには, $\cos x = \boxed{\quad}$ かつ $\dfrac{e^{-y}-e^{y}}{2} = \boxed{\quad}$ であることが必要かつ十分であることがわかる. そして, この条件を満たすためには, $x = \boxed{\quad\quad\quad\quad}$, $y=\boxed{\quad\quad}$ であることが必要かつ十分である.

さて, $z=\pi/2$ において $\cos z = \boxed{\quad}$ だから, $z=\pi/2$ は $1/\cos z$ の特異点で $\boxed{\text{ある・ない}}$. また, $z=\pi/2$ の十分小さい除外近傍では, 上に述べた結果により, $\cos z$ は零に $\boxed{\text{なる・ならない}}$ から, $z=\pi/2$ は $1/\cos z$ の孤立特異点で $\boxed{\text{ある・ない}}$.

留数の計算の準備として, $\cos z$ の $z=\pi/2$ のまわりのテイラー展開を求める. 直接計算してもよいのだが, もう少し楽な方法を考える. $f(\xi+\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\xi^n$ というテイラー級数展開が得られているとき, $z=\xi+\alpha$ とおくと, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-\alpha)^n$ となるから, α のまわりのテイラー展開が得られる. さて, 例 4.12 (p.134) より, $\cos(\xi+\frac{\pi}{2}) = \cos\xi\cos\frac{\pi}{2}-\sin\xi\sin\frac{\pi}{2}$ だから, 定義 4.10 (p.130) より,

$$\cos(\xi+\frac{\pi}{2}) = -\sin\xi = \boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$$

というテイラー展開が得られる. $\xi+\pi/2=z$ とおいてこれを書き直すと,

$$\cos z = \boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$$

という $\cos z$ の $z=\pi/2$ のまわりのテイラー展開が得られる. 例 6.7(p.238) により, $z=\pi/2$ は $\cos z$ の $\boxed{\quad}$ 位の零点であり, よって $z=\pi/2$ は $1/\cos z$ の $\boxed{\text{正則点・除去可能特異点・}\boxed{\quad}\text{位の極・真性特異点}}$ である. したがって, $z=\pi/2$ における $1/\cos z$ の留数の計算に定理 7.2 が適用 $\boxed{\text{できない・できて留数は}\boxed{\quad\quad}\text{となる}}$.

<u>講義の感想・質問・意見等があれば書け (成績には関係しない)</u>