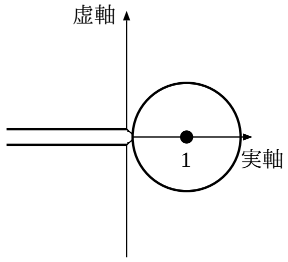
学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

講義中の指示にしたがって空欄を埋め, 正しいと思われる方を選択せよ (演習の解答は講義終了後に掲示板に貼り出す). 空欄が小さいときには横に書いてもよい.

**演習 12-1** この演習では, $\mathrm{Log}\, z$ のテイラー展開について検討する.

$\mathrm{Log}\, z$ は負の実軸上で正則ではないので複素平面全体で収束するテイラー展開を求めることはできないが, $z=1$ のまわりでテイラー展開することはできる. $\frac{1}{0!}\,\mathrm{Log}\, z\big|_{z=1} = \boxed{\quad}$, $(\mathrm{Log}\, z)' = \boxed{\quad}$, $\frac{1}{1!}(\mathrm{Log}\, z)'\Big|_{z=1} = \boxed{\quad}$, $(\mathrm{Log}\, z)'' = \boxed{\quad}$, $\frac{1}{2!}\,(\mathrm{Log}\, z)''\big|_{z=1} = \boxed{\quad}$, $(\mathrm{Log}\, z)''' = \boxed{\quad}$, $\frac{1}{3!}\,(\mathrm{Log}\, z)'''\big|_{z=1} = \boxed{\quad}$, $\cdots$なので,




$$\mathrm{Log}\, z = \boxed{\quad} + \boxed{\quad}(z-1) + \boxed{\quad}(z-1)^2 + \boxed{\quad}(z-1)^3 + \cdots$$

というテイラー展開が得られる. 一方, $|z-1|<1$ のとき, $\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = 1-(z-1)+(z-1)^2+\cdots$ だから, これを項別に積分すると, $\mathrm{Log}\, z + A = z - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3 + \cdots$ となる. ただし, $A$ は適当な正の定数である. 両辺に $z=1$ を代入すると, $A = \boxed{\quad}$ となり, これを利用して整理すると, $\mathrm{Log}\, z$ のテイラー展開

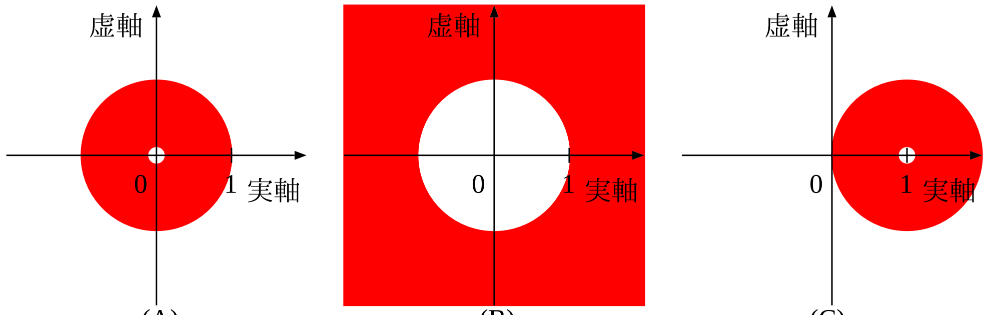
$$\mathrm{Log}\, z = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

が得られる. このテイラー展開は, 先ほど直接 $\mathrm{Log}\, z$ の微分を計算することで得られたものと一致 $\boxed{\text{する・しない}}$. 先ほどの $\frac{1}{z}$ の展開を和の記号を使って書き直すと $\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$ となるが, これを項別に積分すると, $\mathrm{Log}\, z + B = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(z-1)^{n+1}$ となる. たたし $B$ は適当な定数である. 両辺に $z=1$ を代入すると, $B = \boxed{\quad}$ であることがわかる. したがって, $\mathrm{Log}\, z$ のテイラー展開の $n$ 次の項の係数を $c_n$ とすると, $c_n = \boxed{\qquad}$ である. これを使い, 定理 4.4(p.103) によりテイラー展開の収束半径を求めると,

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\boxed{\qquad}}{\boxed{\qquad}}\right| = \boxed{\quad}$$

となる.

**演習 12-2**　この演習では, $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ の, 図の領域 (A) :$\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ における $z = 0$ を中心としたローラン展開, 領域 (B): $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ における $z = 0$ を中心としたローラン展開, 領域 (C): $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 1\}$ における $z = 1$ を中心としたローラン展開を比較する.




(A)　(B)　(C)

(A) この領域では, まず $f(z) = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-z}$ と書き直し, 続いて等比級数の公式 $\frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n$ を利用して ($|z| < 1$ に注意), $\frac{1}{1-z} = \boxed{\qquad\qquad}$ と書き直す. これに $-\frac{1}{z}$ を掛けたもの, すなわち $f(z) = \boxed{\qquad\qquad}$ が領域 $(A)$ における $z = 0$ を中心としたローラン展開である.

(B) この領域では, $|z| > 1$ だから $\frac{1}{|z|} < 1$ であり, したがって収束する整級数を作ろうとしたら $\frac{1}{z}$ に関する級数を作らなければならない. そこで, $f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{z-1}$ の右辺第 2 項の分子と分母を $z$ で割り, $f(z) = \frac{1}{z}\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$ と書き直す. 続いて等比級数の公式を利用して ($\frac{1}{|z|} < 1$ に注意), $\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \boxed{\qquad\qquad}$ と書き直す. これに $\frac{1}{z^2}$ を掛けたもの, すなわち $f(z) = \boxed{\qquad\qquad}$ が領域 $(B)$ における $z = 0$ を中心としたローラン展開である.

(C) この領域では, $|z-1| < 1$ だから, $(z-1)$ に関する級数を作ることを考える. $f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+(z-1)}\frac{1}{z-1}$ と書き直し, 続いて等比級数の公式 $\frac{1}{1+r} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n r^n$ の $r$ と $(z-1)$ を対応させることで ($|z-1| < 1$ に注意), $\frac{1}{1+(z-1)} = \boxed{\qquad\qquad}$ と書き直す. これに $\frac{1}{z-1}$ を掛けたもの, すなわち $f(z) = \boxed{\qquad\qquad}$ が領域 $(C)$ における $z = 1$ を中心としたローラン展開である.

講義の感想・質問・意見等があれば書け (成績には関係しない)