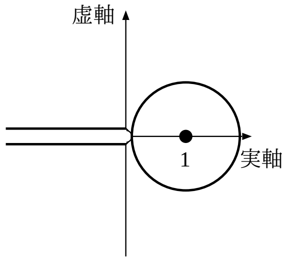
学籍番号 ＿＿＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿

講義中の指示にしたがって空欄を埋め, 正しいと思われる方を選択せよ (演習の解答は講義終了後に掲示板に貼り出す). 空欄が小さいときには横に書いてもよい.

演習 12-1　この演習では, $\mathrm{Log}\, z$ のテイラー展開について検討する.

$\mathrm{Log}\, z$ は負の実軸上で正則ではないので複素平面全体で収束するテイラー展開を求めることはできないが, $z = 1$ のまわりでテイラー展開することはできる. $\frac{1}{0!}\,\mathrm{Log}\, z\big|_{z=1} = \boxed{\quad}$, $(\mathrm{Log}\, z)' = \boxed{\quad}$, $\frac{1}{1!}(\mathrm{Log}\, z)'\Big|_{z=1} = \boxed{\quad}$, $(\mathrm{Log}\, z)'' = \boxed{\quad}$, $\frac{1}{2!}\,(\mathrm{Log}\, z)''\big|_{z=1} = \boxed{\quad}$, $(\mathrm{Log}\, z)''' = \boxed{\quad}$, $\frac{1}{3!}\,(\mathrm{Log}\, z)'''\big|_{z=1} = \boxed{\quad}$, $\cdots$なので,



$$\mathrm{Log}\, z = \boxed{\quad} + \boxed{\quad}(z-1) + \boxed{\quad}(z-1)^2 + \boxed{\quad}(z-1)^3 + \cdots$$

というテイラー展開が得られる. 一方, $|z-1| < 1$ のとき, $\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = 1-(z-1)+(z-1)^2+\cdots$ だから, これを項別に積分すると, $\mathrm{Log}\, z + A = z - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3 + \cdots$ となる. ただし, A は適当な正の定数である. 両辺に $z = 1$ を代入すると, $A = \boxed{\quad}$ となり, これを利用して整理すると, $\mathrm{Log}\, z$ のテイラー展開

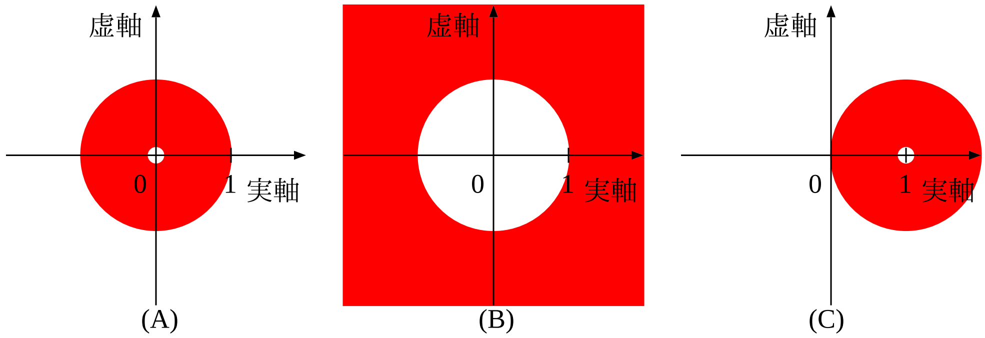
$$\mathrm{Log}\, z = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

が得られる. このテイラー展開は, 先ほど直接 $\mathrm{Log}\, z$ の微分を計算することで得られたものと一致 $\boxed{\text{する・しない}}$. 先ほどの $\frac{1}{z}$ の展開を和の記号を使って書き直すと $\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$ となるが, これを項別に積分すると, $\mathrm{Log}\, z + B = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(z-1)^{n+1}$ となる. たたし B は適当な定数である. 両辺に $z = 1$ を代入すると, $B = \boxed{\quad}$ であることがわかる. したがって, $\mathrm{Log}\, z$ のテイラー展開の n 次の項の係数を c_n とすると, $c_n = \boxed{\qquad}$ である. これを使い, 定理 4.4(p.103) によりテイラー展開の収束半径を求めると,

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\boxed{\qquad}}{\boxed{\qquad}}\right| = \boxed{\quad}$$

となる.

演習 12-2 この演習では, $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ の, 図の領域 (A) :$\{z\in\mathbb{C}:0<|z|<1\}$ における $z=0$ を中心としたローラン展開, 領域 (B): $\{z\in\mathbb{C}:|z|>1\}$ における $z=0$ を中心としたローラン展開, 領域 (C): $\{z\in\mathbb{C}:0<|z-1|<1\}$ における $z=1$ を中心としたローラン展開を比較する.



(A) この領域では, まず $f(z)=-\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1-z}$ と書き直し, 続いて等比級数の公式 $\dfrac{1}{1-r}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}r^n$ を利用して ($|z|<1$ に注意), $\dfrac{1}{1-z}=\boxed{}$ と書き直す. これに $-\dfrac{1}{z}$ を掛けたもの, すなわち $f(z)=\boxed{}$ が領域 (A) における $z=0$ を中心としたローラン展開である.

(B) この領域では, $|z|>1$ だから $\dfrac{1}{|z|}<1$ であり, したがって収束する整級数を作ろうとしたら $\dfrac{1}{z}$ に関する級数を作らなければならない. そこで, $f(z)=\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{z-1}$ の右辺第 2 項の分子と分母を z で割り, $f(z)=\dfrac{1}{z}\dfrac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}=\dfrac{1}{z^2}\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}}$ と書き直す. 続いて等比級数の公式を利用して ($\dfrac{1}{|z|}<1$ に注意), $\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}}=\boxed{}$ と書き直す. これに $\dfrac{1}{z^2}$ を掛けたもの, すなわち $f(z)=\boxed{}$ が領域 (B) における $z=0$ を中心としたローラン展開である.

(C) この領域では, $|z-1|<1$ だから, $(z-1)$ に関する級数を作ることを考える. $f(z)=\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{1+(z-1)}\dfrac{1}{z-1}$ と書き直し, 続いて等比級数の公式 $\dfrac{1}{1+r}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n r^n$ の r と $(z-1)$ を対応させることで ($|z-1|<1$ に注意), $\dfrac{1}{1+(z-1)}=\boxed{}$ と書き直す. これに $\dfrac{1}{z-1}$ を掛けたもの, すなわち $f(z)=\boxed{}$ が領域 (C) における $z=1$ を中心としたローラン展開である.

演習 12-3 正しいと思うものを選べ.

1. $f(z) = \begin{cases} 1, & z = 0, \\ z, & z \neq 0 \end{cases}$ としたとき, $z = 0$ は $f(z)$ の

   特異点でない・除去可能特異点である・極である・真性特異点である.

2. $f(z) = \dfrac{1}{z}$ としたとき, $z = 0$ は $f(z)$ の

   特異点でない・除去可能特異点である・極である・真性特異点である.

3. $f(z) = e^{1/z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}$ としたとき, $z = 0$ は $f(z)$ の

   特異点でない・除去可能特異点である・極である・真性特異点である.

4. $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ $(|z| < 1)$ としたとき, $z = 0$ は $f(z)$ の

   特異点でない・除去可能特異点である・極である・真性特異点である.

演習 12-4 正しいと思うものを選べ.

1. $f(z) = z$ に対し, $z = 0$ は $f(z)$ の

   零点でない・1 位の零点である・2 位の零点である・3 位の零点である.

2. $f(z) = z^2 + z^3$ に対し, $z = 0$ は $f(z)$ の

   零点でない・1 位の零点である・2 位の零点である・3 位の零点である.

3. $f(z) = z^2 - 2z + 1$ に対し, $z = 1$ は $f(z)$ の

   零点でない・1 位の零点である・2 位の零点である・3 位の零点である.

4. $f(z) = z^2 - 2z + 1$ に対し, $z = -1$ は $f(z)$ の

   零点でない・1 位の零点である・2 位の零点である・3 位の零点である.

講義の感想・質問・意見等があれば書け (成績には関係しない)