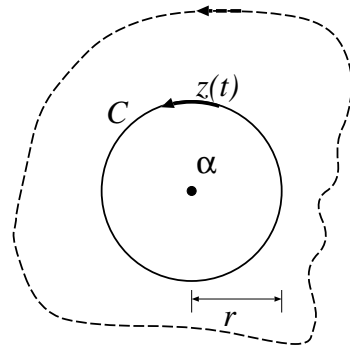


講義中の指示にしたがって空欄を埋め、正しいと思われる方を選択せよ (演習の解答は講義終了後に掲示板に貼り出す)。空欄が小さいときには横に書いてもよい。

演習 11-1

α をある複素数とし、関数 $f(z) = \frac{1}{z - \alpha}$ を右の図の点線に示す積分路に沿って積分したい、という状況を考える。 $f(z)$ は点 $z = \alpha$ で正則でないから、この積分は零になるとは限らない。さて、 $f(z)$ は α 以外で正則だから、積分路を図の点線から点 α を中心とする半径 r の円 $C : z(t) = \alpha + re^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) に変更しても結果は変わらない。

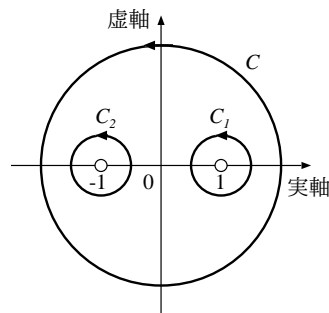


$$\int_C f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(z(t)) z'(t) dt = \int_0^{2\pi} \boxed{} \boxed{} dt = \int_0^{2\pi} \boxed{} dt$$

であり、これを計算することにより、
 $\int_C \frac{1}{z - \alpha} dz = \boxed{}$ であることがわかる。

演習 11-2

$f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$ を円 $C : \zeta(t) = 2e^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) に沿って積分することを考える。 $f(z) = \frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{(z - 1)(z + 1)}$



を部分分数展開すると、 $f(z) = \frac{\boxed{}}{z - 1} - \frac{\boxed{}}{z + 1}$ である。さて、 $f(z)$ は $z = \pm 1$ 以外の点では正則だから、 C_1 および C_2 をそれぞれ $z = \pm 1$ を中心とする半径 $1/2$ の正の向きがついた円とすると、定理 5.21 により、 $\int_C f(z) dz =$

$$\int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz$$

である。ところで、演習 11-1 の結果を使うと、 $\int_{C_1} \frac{1}{z - 1} dz = \boxed{}$ 、 $\int_{C_1} \frac{1}{z + 1} dz = \boxed{}$ 、 $\int_{C_2} \frac{1}{z - 1} dz = \boxed{}$ 、 $\int_{C_2} \frac{1}{z + 1} dz = \boxed{}$ であるから、これらをまとめると、 $\int_C f(z) dz = \boxed{}$ となる。

演習 11-3 α をある複素数, r を正の実数とし, 積分路を円 $C: \zeta(t) = \alpha + re^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) とする.

$$f(z) = 2\pi i \quad (\text{定数関数}) \quad (\star)$$

とすると, $f(z)$ は定数関数だから正則であり, ゆえに系 5.3 が適用できる. 等式 $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ に (\star) を代入して左辺に系 5.3 を適用すると, $\square = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\square}{\zeta - z} d\zeta$ となる. これは演習 11-1 の結果と一致 **する・しない**.

演習 11-4 k を 2 以上の自然数とする. r を正の実数, 円 $C: \zeta(t) = re^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) を積分路とし, この積分路に沿った $1/z^k$ の積分, すなわち $\int_C \frac{1}{\zeta^k} d\zeta$ を計算することを考える (後の比較の便宜のために, 積分に使う変数を z ではなく ζ にしてある). 系 5.5 より, 点 α の近傍で $f(z)$ が正則であれば,

$$f^{(k-1)}(\alpha) = \frac{(k-1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^k} d\zeta \quad (\#)$$

である. ここで, $f(z) = 1$ (定数関数) とすると, $f(z)$ は正則で, $k \geq 2$ であれば $f^{(k-1)}(z) = \square$ であるから, $(\#)$ で $\alpha = 0$ とおいて両辺を書き直すと, \square となる. したがって, $\int_C \frac{1}{\zeta^k} d\zeta = \square$ である.

講義の感想・質問・意見等があれば書け (成績には関係しない)