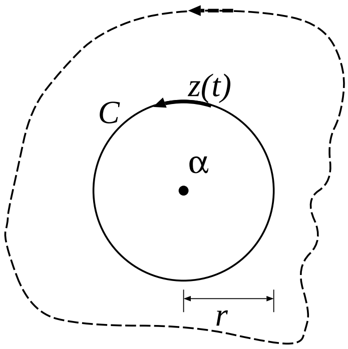
学籍番号 ____________ 氏名 __________________

講義中の指示にしたがって空欄を埋め, 正しいと思われる方を選択せよ (演習の解答は講義終了後に掲示板に貼り出す). 空欄が小さいときには横に書いてもよい.

演習 11-1

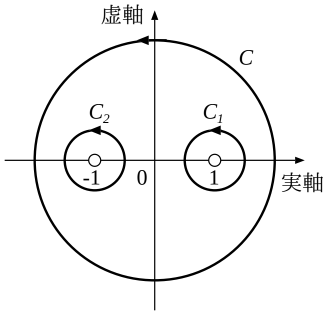
α をある複素数とし, 関数 $f(z) = \dfrac{1}{z-\alpha}$ を右の図の点線に示す積分路に沿って積分したい, という状況を考える. $f(z)$ は点 $z=\alpha$ で正則でないから, この積分は零になるとは限らない. さて, $f(z)$ は α 以外で正則だから, 積分路を図の点線から点 α を中心とする半径 r の円 $C : z(t) = \alpha + re^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ に変更しても結果は変わらない.



$\displaystyle\int_C f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(z(t))z'(t)dt = \int_0^{2\pi} \boxed{}\boxed{} dt = \int_0^{2\pi} \boxed{} dt$ であり, これを計算することにより, $\displaystyle\int_C \frac{1}{z-\alpha}dz = \boxed{}$ であることがわかる.

演習 11-2

$f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}$ を円 $C : \zeta(t) = 2e^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ に沿って積分することを考える. $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1} = \dfrac{1}{(z-1)(z+1)}$ を部分分数展開すると, $f(z) = \dfrac{\boxed{}}{z-1} - \dfrac{\boxed{}}{z+1}$ である. さて, $f(z)$ は $z = \pm 1$ 以外の点では正則だから, C_1 および C_2 をそれぞれ $z = \pm 1$ を中心とする半径 $1/2$ の正の向きがついた円とすると, 定理 5.21 により, $\displaystyle\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$ である. ところで, 演習 11-1 の結果を使うと, $\displaystyle\int_{C_1} \frac{1}{z-1}dz = \boxed{}$, $\displaystyle\int_{C_1} \frac{1}{z+1}dz = \boxed{}$, $\displaystyle\int_{C_2} \frac{1}{z-1}dz = \boxed{}$, $\displaystyle\int_{C_2} \frac{1}{z+1}dz = \boxed{}$ であるから, これらをまとめると, $\displaystyle\int_C f(z)dz = \boxed{}$ となる.



$\boxed{\textbf{演習 11-3}}$ α をある複素数, r を正の実数とし, 積分路を円 $C : \zeta(t) = \alpha + re^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ とする.

$$f(z) = 2\pi i \qquad (\text{定数関数}) \tag{★}$$

とすると, $f(z)$ は定数関数だから正則であり, ゆえに系 5.3 が適用できる. 等式 $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ に (★) を代入して左辺に系 5.3 を適用すると, $\boxed{} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{\boxed{}}{\zeta - z} d\zeta$ となる. これは演習 11-1 の結果と一致 $\boxed{\text{する・しない}}$.

$\boxed{\textbf{演習 11-4}}$ k を 2 以上の自然数とする. r を正の実数, 円 $C : \zeta(t) = re^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ を積分路とし, この積分路に沿った $1/z^k$ の積分, すなわち $\displaystyle\int_C \frac{1}{\zeta^k} d\zeta$ を計算することを考える (後の比較の便宜のために, 積分に使う変数を z ではなく ζ にしてある).
系 5.5 より, 点 α の近傍で $f(z)$ が正則であれば,

$$f^{(k-1)}(\alpha) = \frac{(k-1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^k} d\zeta \tag{♯}$$

である. ここで, $f(z) = 1$ (定数関数) とすると, $f(z)$ は正則で, $k \geq 2$ であれば $f^{(k-1)}(z) = \boxed{}$ であるから, (♯) で $\alpha = 0$ とおいて両辺を書き直すと, $\boxed{}$ となる. したがって, $\displaystyle\int_C \frac{1}{\zeta^k} d\zeta = \boxed{}$ である.

講義の感想・質問・意見等があれば書け (成績には関係しない)