学籍番号 ____________ 氏名 __________________

講義中の指示にしたがって空欄を埋めよ (演習の解答は講義終了後に掲示板に貼り出す). 空欄が小さいときには横に書いてもよい.

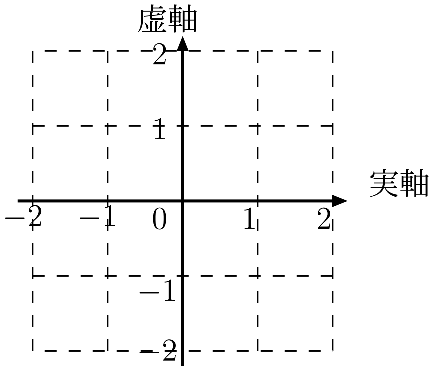
演習 8-1 この演習では, $i^2 = -1$ であることを確認する. 2 次元の実ベクトルの記法と対比すれば, $i \times i = (0,1) \times (0,1) = -(1,0) = -1$ である. 複素数の乗算の規則は $(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ であり, $(x_1, y_1) = (0,1)$, $(x_2, y_2) = (0,1)$ をこれに代入すると, $(0,1) \times (0,1) = (\boxed{\quad}\boxed{\quad} - \boxed{\quad}\boxed{\quad}, \boxed{\quad}\boxed{\quad} + \boxed{\quad}\boxed{\quad}) = (\boxed{\quad}, \boxed{\quad})$ となる.

演習 8-2

$$\alpha = 4 + 9i \quad \mathrm{Re}\,\alpha = \boxed{\quad}, \quad \mathrm{Im}\,\alpha = \boxed{\quad}$$
$$\alpha = 1.3 \quad \mathrm{Re}\,\alpha = \boxed{\quad}, \quad \mathrm{Im}\,\alpha = \boxed{\quad}$$
$$\alpha = \pi i \quad \mathrm{Re}\,\alpha = \boxed{\quad}, \quad \mathrm{Im}\,\alpha = \boxed{\quad}$$

演習 8-3 次の点を複素平面にプロットせよ.

A: i, B: $-1-i$ C: $-2+2i$ D: -2



演習 8-4

1. $(-1+i) + (1-i) = \boxed{\quad} + \boxed{\quad}i$
2. $(2-i) - (3-4i) = \boxed{\quad} + \boxed{\quad}i$
3. $(1+i)(1+i) = \boxed{\quad} + \boxed{\quad}i$
4. $\dfrac{1}{1-i} = \dfrac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \boxed{\quad} + \boxed{\quad}i$

演習 8-5

- $-i$ の共役複素数は $\square + \square i$
- 1 の共役複素数は $\square + \square i$
- $\pi + \sqrt{2}i$ の共役複素数は $\square + \square i$

演習 8-6 $z = -64 = 2^6 e^{i\pi}$ の 6 乗根 $w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5$ を計算すると

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \square\, e^{i(\square)} \\
w_1 &= \square\, e^{i(\square)} \\
w_2 &= \square\, e^{i(\square)} \\
w_3 &= \square\, e^{i(\square)} \\
w_4 &= \square\, e^{i(\square)} \\
w_5 &= \square\, e^{i(\square)}
\end{aligned}
$$

(偏角を主値に直さなくてよい)

演習 8-7 次の極限を計算せよ.

$$\lim_{z \to 0} \frac{4z - i}{iz + 2} = \square \qquad \lim_{z \to 2i} \frac{3i - z}{3i} = \square$$

演習 8-8

$$(z^5)' = \square, \quad \left(\frac{z - \pi i}{z}\right)' = \frac{\square}{\square}, \quad (z^{-1})' = \square$$

演習 8-9 空欄を埋め, 正しいと思う方を選択せよ. $z = x + iy$ とし, $f(z) = \overline{z}$ を $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ の形に書き直すと $u(x,y) = \square$, $v(x,y) = \square$ である. $\frac{\partial u}{\partial x} = \square$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \square$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \square$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \square$ であるから, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ と なり・ならず, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ と なる・ならない. したがって, $f(z)$ は正則で ある・ない.

演習 8-10 $z = x + iy$ とし，$f(z) = (x^2 - y^2) + 2xyi$ という関数を考える．$u(x, y)$ を $f(z)$ の実部，$v(x, y)$ を $f(z)$ の虚部とすると，$u(x, y) = \boxed{}$，$v(x, y) = \boxed{}$ である．このとき，$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \boxed{}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \boxed{}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \boxed{}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \boxed{}$ である (計算に間違いがなければコーシー・リーマンの方程式が成り立つので，合わないときやり直すこと)．系 3.2 にしたがって $f'(z)$ を計算すると，

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \boxed{} + i\boxed{}$$

あるいは

$$f'(z) = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{i}\left(\boxed{} + i\boxed{}\right)$$

$$= \boxed{} + i\boxed{}$$

となる．

演習 8-11 この演習では, 複素級数

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots \tag{6-A}$$

を取り扱う. 以下の空欄を埋めよ.

1. 複素級数 $1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$ と (6-A) を対応させると, $c_0 = \boxed{\quad}$, $c_1 = \boxed{\quad}$, $\ldots$, $c_n = \boxed{\quad}$, $c_{n+1} = \boxed{\quad}$ である. $\dfrac{c_n}{c_{n+1}} = \dfrac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}} = \boxed{\quad}$ であるから, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{c_{n+1}} = \boxed{\quad}$ である. よって, 定理 4.4 により, この複素級数の収束半径 r は $r = \boxed{\quad}$ である. $|z| < r$ のとき, $f(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$ とすると,
$$\begin{array}{rcccccc} f(z) & = & 1+ & z+ & z^2+ & z^3+ & \cdots \\ zf(z) & = & & z+ & z^2+ & z^3+ & \cdots \end{array}$$
であるから, $(1-z)f(z) = \boxed{\quad}$ であり, よって $f(z) = \dfrac{\boxed{\qquad}}{\boxed{\qquad}}$ と書ける.

2. 複素級数
$$e^z = \frac{1}{0!} + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$
と (6-A) を対応させると (ただし ! は階乗の記号で, $0! = 1$ とする), $c_0 = \boxed{\quad}$, $c_1 = \boxed{\quad}$, $\ldots$, $c_n = \boxed{\quad}$, $c_{n+1} = \boxed{\quad}$ である. $\dfrac{c_n}{c_{n+1}} = \dfrac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}} = \boxed{\quad}$ であるから, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{c_{n+1}} = \boxed{\quad}$ である. よって, 定理 4.4 により, この複素級数の収束半径 r は $r = \boxed{\quad}$ である. これが指数関数の定義であった.

<u>講義の感想・質問・意見等があれば書け (成績には関係しない)</u>