学籍番号 ＿＿＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿

講義中の指示にしたがって空欄を埋め, さらに指示された作業をおこなえ (演習の解答は講義終了後に掲示板に貼り出す). 空欄が小さいときには横に書いてもよい.

演習 5-1

$$(z^3)' = \boxed{}, \quad \left(\frac{z+1}{z+2}\right)' = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}, \quad (z^{-4})' = \boxed{}$$

演習 5-2 空欄を埋め, 正しいと思う方を選択せよ.

1. $z = x + iy$ とし, $f(z) = z$ を $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ の形に書き直すと $u(x, y) = \boxed{}$, $v(x, y) = \boxed{}$ である. $\frac{\partial u}{\partial x} = \boxed{}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \boxed{}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \boxed{}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \boxed{}$ であるから, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ と [なり・ならず], $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ と [なる・ならない]. したがって, $f(z)$ は正則で [ある・ない].

2. $z = x + iy$ とし, $f(z) = \overline{z}$ を $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ の形に書き直すと $u(x, y) = \boxed{}$, $v(x, y) = \boxed{}$ である. $\frac{\partial u}{\partial x} = \boxed{}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \boxed{}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \boxed{}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \boxed{}$ であるから, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ と [なり・ならず], $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ と [なる・ならない]. したがって, $f(z)$ は正則で [ある・ない].

3. $z = x + iy$ とし, $f(z) = \frac{1}{z}$ とする (ただし $z \neq 0$).

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

だから, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ の形に書き直すと

$$u(x, y) = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}, \quad v(x, y) = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

である. $\frac{\partial u}{\partial x} = \boxed{}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \boxed{}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \boxed{}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \boxed{}$ であるから, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ と [なり・ならず], $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ と [なる・ならない]. したがって, $f(z)$ は正則で [ある・ない].

演習 5-3　$z = x + iy$ とし, $f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$ という関数を考える. $u(x,y)$ を $f(z)$ の実部, $v(x,y)$ を $f(z)$ の虚部とすると, $u(x,y) = \boxed{}$, $v(x,y) = \boxed{}$ である. このとき, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \boxed{}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \boxed{}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \boxed{}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \boxed{}$ である (計算に間違いがなければコーシー・リーマンの方程式が成り立つので, 合わないときやり直すこと). 系 3.2 にしたがって $f'(z)$ を計算すると,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \boxed{} + i\boxed{}$$

あるいは

$$f'(z) = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{i}\left(\boxed{} + i\boxed{}\right)$$
$$= \boxed{} + i\boxed{}$$

となる.

演習 5-4　空欄を埋め, 正しいと思う方を選択せよ.
正則な関数 $f(z) = z^2$ を考える. $z = x + iy$ とし, $u(x,y)$ を $f(z)$ の実部, $v(x,y)$ を $f(z)$ 虚部とすると, $u(x,y) = \boxed{}$, $v(x,y) = \boxed{}$ である.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \boxed{}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \boxed{}$$

なので, $u(x,y)$ はラプラスの方程式を 満たし・満たさず.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \boxed{}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \boxed{}$$

なので, $v(x,y)$ はラプラスの方程式を 満たす・満たさない.

講義の感想・質問・意見等があれば書け (成績には関係しない)