電 158 電気数学 I
第 15 回
線形空間 (3)

- 今回の講義: 教科書の範囲を超えた話
- 演習なし
- 試験には出さない

線形写像と基底 (1)

▷ 問題設定

- V, W: 線形空間, $f : V \to W$: 線形写像
- V: n 次元, 基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$
- W: m 次元, 基底 $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$

線形写像と基底 (2)

- $f(\boldsymbol{v}_j) \in W$, $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ は W の基底
  $\Rightarrow f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{w}_i$
- まとめて行列の記法で書くと (積には行列の規則を使用)

$$\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{v}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{v}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \cdots & \boldsymbol{w}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

線形写像と基底 (3)

- $f(\boldsymbol{v}_j) \in W$, $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ は W の基底
  $\Rightarrow f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{w}_i$
- $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V の基底
  $\Rightarrow \boldsymbol{x} \in V$ を取ると $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{v}_j$ と書ける
- f は線形だから, $f(\boldsymbol{x}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} f(\boldsymbol{v}_j)x_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{w}_i x_j$

線形写像と基底 (4)

- $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} f(\boldsymbol{v}_i)x_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\boldsymbol{w}_j x_i$
- 行列の形に直すと

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \cdots & \boldsymbol{w}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- $f(\boldsymbol{x})$ を W の基底で $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{w}_i y_i$ と書く

線形写像と基底 (5)

- $f(\boldsymbol{x})$ を W の基底で $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{w}_i y_i$ と書く
- $$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
- **定義域と値域に基底を定めることにより，線形写像に対応する行列が定まる**
- 上記のように決まった行列: f の**表現行列**, これを A と書く

基底変換 (1)

▷ 問題設定

- V の基底: $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ から $\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n$ に変更
- W の基底: $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ から $\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_m$ に変更
- 線形写像の表現行列がどう影響されるかを見る

基底変換 (2)

- V の基底: $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ から $\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n$ に変更
  $$\begin{pmatrix} \boldsymbol{t}_1 & \cdots & \boldsymbol{t}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$
  右端の行列を P とする; P は正則

- $\boldsymbol{x} \in V$ を新しい基底 $(\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n)$ の 1 次結合で書いたとき
  $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \boldsymbol{t}_i$ となったとする

基底変換 (3)

- W の基底: $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n$ から $\boldsymbol{s}_1, \dots, \boldsymbol{s}_n$ に変更
$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{s}_1 & \cdots & \boldsymbol{s}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \cdots & \boldsymbol{w}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{m1} & \cdots & q_{mm} \end{pmatrix}$$
右端の行列を Q とする; Q は正則 $f(\boldsymbol{x}) \in W$ を新しい基底 $(\boldsymbol{s}_1, \dots, \boldsymbol{s}_n)$ の 1 次結合で書いたとき
$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{m} \eta_j \boldsymbol{s}_j$ となったとする

基底変換 (4)

- $f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{s}_1 & \cdots & \boldsymbol{s}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{s}_1 & \cdots & \boldsymbol{s}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \cdots & \boldsymbol{w}_m \end{pmatrix} Q \quad \Rightarrow$

  $f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \cdots & \boldsymbol{w}_m \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \cdots & \boldsymbol{w}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

- $f(\boldsymbol{x})$ は基底と無関係に定まるから

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

基底変換 (5)

- $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{t}_1 & \cdots & \boldsymbol{t}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{t}_1 & \cdots & \boldsymbol{t}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} P$

  $\Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_m \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

- $\boldsymbol{x}$ は基底と無関係に定まるから

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

基底変換 (6)

- これまでの議論から

$$
\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} = QAP^{-1} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}
$$

- 基底変換により表現行列は A から QAP^{-1} に変わる

基底変換 (7)

- $f: V \to W$; V の基底を $(\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_n) = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)P$, W の基底を $(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n) = (\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n)Q$ に;

V の基底	W の基底	表現行列
$(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$	$(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n)$	A
$(\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_n)$	$(\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n)$	QAP^{-1}

- $f: V \to V$; V の基底を $(\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_n) = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)P$ に;

V の基底	W の基底	表現行列
$(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$	$(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$	A
$(\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_n)$	$(\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_n)$	PAP^{-1}

基底変換 (8)

- 零写像の表現行列は基底をどのように取っても零行列
- V 上の線形写像 $(f: V \to V)$ を考えるときは, 特別な理由がある場合を除き, 定義域と値域の基底を共通に取る
- 恒等写像 $\mathrm{id}: V \to V$ の表現行列は, 定義域と値域の基底が共通のときには, 基底によらず単位行列になる

線形写像と次元 (1)

▷ 問題設定

- V, W: 線形空間, $f : V \to W$: 線形写像
- V: n 次元, 基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$
- W: m 次元, 基底 $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$
- A: f のこの基底に関する表現行列

線形写像と次元 (2)

- $\ker f := \{\boldsymbol{x} \in V \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ は V の線形部分空間
  (理由) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \ker f$ とすると
  $f(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2) = c_1 f(\boldsymbol{x}_1) + c_2 f(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{0}$

- $\ker f := \{\boldsymbol{x} \in V \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ を f の**核**という

線形写像と次元 (3)

- $\mathrm{im}\, f := \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in V\}$ は W の線形部分空間
  (理由) $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in \mathrm{im}\, f$ とすると $\boldsymbol{y}_1 = f(\boldsymbol{x}_1)$, $\boldsymbol{y}_2 = f(\boldsymbol{x}_2)$ となる $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ があるので, $c_1\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{y}_2) = c_1 f(\boldsymbol{x}_1) + c_2 f(\boldsymbol{x}_2) = f(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2)$, よって $c_1\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{y}_2) \in \mathrm{im}\, f$

- $\mathrm{im}\, f := \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in V\}$ を **V の f による像**という

線形写像と次元 (4)

- f の表現行列を A, A の階数を r とする
- V と W の基底を取り換えることにより, 表現行列は A から QAP^{-1} に変わる
- $$QAP^{-1} = \begin{array}{r} 1) \\ \vdots \\ r) \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \hline & & & \end{array}\right)$$

  となるよう P, Q を取る (r は A の階数)

線形写像と次元 (5)

- $$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{r} 1) \\ \vdots \\ r) \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \hline & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

  と書く

線形写像と次元 (6)

- 新しい基底 $\boldsymbol{t}_1, \dots, \boldsymbol{t}_n$ と $\boldsymbol{s}_1, \dots, \boldsymbol{s}_m$ に関し,

$$\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{t}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{t}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{s}_1 & \cdots & \boldsymbol{s}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

▷ 以上の結論

- $\operatorname{im} f$ は $\boldsymbol{s}_1, \dots, \boldsymbol{s}_r$ が生成する線形部分空間に一致する
- $\ker f$ は $\boldsymbol{t}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{t}_n$ が生成する線形部分空間に一致する
- $\dim \operatorname{im} f + \dim \ker f = n$, ここに dim は次元をあらわす

Jordan 標準形 (1)

- 行列 $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を考える
- 固有多項式は $\det(N - tI) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 & 0 \\ 0 & -t & 1 \\ 0 & 0 & -t \end{pmatrix} = -t^3$
- 固有値は零のみ, 固有ベクトルは?

Jordan 標準形 (2)

- N の固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の解
- 上記を解くと $x_2 = 0, x_3 = 0$ が出る;

  固有ベクトルは 1 種類だけ, $c \neq 0$ を定数として $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Jordan 標準形 (3)

- $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, N\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, N^2\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$
- **$\boldsymbol{w}, N\boldsymbol{w}, N^2\boldsymbol{w}$ が基底, 固有ベクトルは $N^2\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$ により復元**
- 固有ベクトルだけで基底を作ることができない場合には, 似たような手順によって固有ベクトルから基底を**作る**ことができ, 線形写像のこの基底に関する表現行列は望ましい性質を持つ (**Jordan 標準形**)

Jordan 標準形 (4)

- Jordan 標準形に関する以下の解説は I. M. Gel'fand, Lectures of Linear Algebra, Interscience, 1981 (Republication: Dover, 1989) による
- 以下, 特に断わることなく, V は n 次元複素線形空間であるものとする

Jordan 標準形 (5)

- Jordan 標準形の例 (空白部分は零)

$$
\left(\begin{array}{ccc|cccc}
7 & 1 & & & & & \\
 & 7 & 1 & & & & \\
 & & 7 & & & & \\
\hline
 & & & 5 & 1 & & \\
 & & & & 5 & 1 & \\
 & & & & & 5 & 1 \\
 & & & & & & 5
\end{array}\right),
\left(\begin{array}{cc|cc|cc}
2 & 1 & & & & \\
 & 2 & & & & \\
\hline
 & & 2 & 1 & & \\
 & & & 1 & & \\
\hline
 & & & & 2 & 1 \\
 & & & & & 2
\end{array}\right)
$$

Jordan 標準形 (6)

- 以下では, f を線形写像とし, 変換 f の表現行列が Jordan 標準形になるような基底を構成する. 行列 $\boldsymbol{A}$ の Jordan 標準形を求めるときには, $\boldsymbol{A}$ に対応する線形写像を考えればよい.
- V を n 次元の複素ベクトル空間とし, $f : V \to V$ を線形写像とする. 示すべきことは次の事実である.

ある $k > 0$ と, k 個のスカラー $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ および各 λ_i に対応する m_i 個のベクトル $\boldsymbol{v}_{i,1}, \dots, \boldsymbol{v}_{i,m_i}$ が存在し (ただし $m_i > 0$, $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$), $\{\boldsymbol{v}_{ij} : 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m_i\}$ は V の基底で, 各 i について次式を満たす:

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{v}_{i,1}) &= \lambda_i \boldsymbol{v}_{i,1} \\
f(\boldsymbol{v}_{i,2}) &= \lambda_i \boldsymbol{v}_{i,2} + \boldsymbol{v}_{i,1} \\
&\dots, \\
f(\boldsymbol{v}_{i,m_i}) &= \lambda_1 \boldsymbol{v}_{i,m_i} + \boldsymbol{v}_{i,m_i-1}
\end{aligned}
$$

Jordan 標準形 (8)

- $f(\boldsymbol{v}_{i,j})$ に関する式を行列を使って書き直すと,
  $f((\boldsymbol{v}_{i,1},\dots,\boldsymbol{v}_{i,m_i})) = (\boldsymbol{v}_{i,1},\dots,\boldsymbol{v}_{i,m_i})\boldsymbol{J}_i$ となる．よって,
  $$f((\boldsymbol{v}_{1,1},\dots,\boldsymbol{v}_{1,m_1},\dots,\boldsymbol{v}_{k,1},\dots,\boldsymbol{v}_{k,m_k})) \\ = (\boldsymbol{v}_{1,1},\dots,\boldsymbol{v}_{1,m_1},\dots,\boldsymbol{v}_{k,1},\dots,\boldsymbol{v}_{k,m_k})\boldsymbol{J}$$
  であり, したがってこの基底に関する f の表現行列は Jordan 標準形である.

- 証明は V の次元 n に関する帰納法による. $n = 1$ の場合は, f の表現行列はスカラーだから, 証明すべきことは何もない.
- $n-1$ まで主張は正しいと仮定して, n に対しても主張が正しいことを示す.
- (定義) $f(W) \subset W$ を満たす V の部分空間 W のことを f-不変部分空間という.
- (補題) $f : V \to V$ が線形写像であれば, V の $n-1$ 次元 f-不変部分空間 W が存在する.

(補題の証明) V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を取り, この基底に関する f の表現行列を $\boldsymbol{A}$ とする. $\boldsymbol{A}^*$ のある固有値を λ とし, 対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{w}$ とする. $X = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n : \boldsymbol{w}^*\boldsymbol{x} = 0\}$ とおくと, X は $\mathbb{C}^n$ の $n-1$ 次元部分空間であり, よって $W = \{(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in X\}$ は V の $n-1$ 次元線形部分空間である. (ただし $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{v}_1 x_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_n x_n$ を意味する). また, $f((\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ で, $\boldsymbol{w}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{w}} = \overline{\lambda\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{w}} = \overline{\lambda}\boldsymbol{w}^*\boldsymbol{x} = 0$ だから, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \in X$. よって W は f-不変である.

- 先の補題により, V には $n-1$ 次元 f-不変部分空間 W が存在する.
- 帰納法の仮定により, f を W に制限した写像については主張は正しい. すなわち, ある $k > 0$ と, k 個のスカラー $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ および各 λ_i に対応する m_i 個のベクトル $\boldsymbol{v}_{i,1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i,m_i}$ が存在し (ただし $m_i > 0$, $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$), $\{\boldsymbol{v}_{ij} : 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m_i\}$ は W の基底で, $f((\boldsymbol{v}_{i,1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i,m_i})) = (\boldsymbol{v}_{i,1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i,m_i})\boldsymbol{J}_i$ となる.
- $\Omega = \{\boldsymbol{v}_{i,j} : 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m_i\}$ とし, $\Omega \cup \{\boldsymbol{v}\}$ が V の基底となるよう $\boldsymbol{v}$ を選ぶ.
- $f(\boldsymbol{v}) = \lambda_0 \boldsymbol{v} + \sum a_{i,j} \boldsymbol{v}_{i,j}$ となる (λ_0 は固有値とは無関係)
- $I(\cdot)$ を恒等写像とし, $f'(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - \lambda_0 I(\boldsymbol{x})$ とおく; すると $f'(\boldsymbol{v}) = \sum a_{i,j} \boldsymbol{w}_{i,j}$ となる

- ある座標系で f' の表現行列が Jordan 標準形になれば, f の表現行列は f' のそれに $\lambda_0\boldsymbol{I}$ を加えたものになるので, やはり Jordan 標準形である. よって, f' について主張を示せばよい.
- f と f' の基底 $\Omega \cup \{\boldsymbol{v}\}$(この順に並べる) に関する表現行列は, それぞれ, 次のようになる. ただし, $\boldsymbol{J}_i'$ は $\boldsymbol{J}_i$ の対角要素を $\lambda_i - \lambda_1$ で置き換えたもの.
$$f \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{J}_1 & & & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \boldsymbol{J}_k & * \\ & & & \lambda \end{array}\right),\ f' \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{J}_1' & & & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \boldsymbol{J}_k' & * \\ & & & 0 \end{array}\right)$$
- $\lambda_i' = \lambda_i - \lambda_1$ と定義する.

- 基底を取り直すことで, f' の表現行列を簡単にすることを考える.
- 先のページの $*$ の部分がはじめから零であれば, すでに Jordan 標準形が得られているので, これ以上やるべきことは何もない.
- そうでない場合, $*$ の部分が零になるよう基底を取り直す.
- まず, $\forall i, \lambda_i' \neq 0$ の場合を考える. $\{p_{i,j} : 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m_i\}$ をパラメータとし, $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \sum_{i=1}^{k}\left(p_{i,1}\boldsymbol{v}_{i,1} + \sum_{j=2}^{m_i} p_{i,j}\boldsymbol{v}_{i,j}\right)$ とする. $\Omega \cup \{\boldsymbol{v}'\}$ は基底である. $f'(\boldsymbol{v}') = \sum_{i,j} a_{i,j}\boldsymbol{v}_{i,j} + + \sum_{i=1}^{k}\left(p_{i,1}\lambda_i\boldsymbol{v}_{i,1} + \sum_{j=2}^{m_i} p_{i,j}\left(\lambda_i\boldsymbol{v}_{i,j} + \boldsymbol{v}_{i,j-1}\right)\right)$ だから, 各 i に対し, $p_{i,m_i} = -a_{i,j_i}/\lambda_i$ とし, $j = m-1, \ldots, 1$ の順に $p_{i,j} = -(a_{i,j} - p_{i,j+1})/\lambda_i$ によってパラメータを計算すれば, $*$ の部分を零にできる.

- 次に $\exists i, \lambda'_i = 0$ の場合を考える．基底を並べ換えて, $\forall j \le q$, $\lambda'_j = 0$, $m_1 \ge m_2 \ge \cdots \ge m_q$, $\forall j \ge q+1$, $\lambda'_j \ne 0$ のであるようにする．

  1. $\{p_{i,j} : q+1 \le i \le k, 1 \le j \le m_i\}$ を パラメータ とし，$\boldsymbol{v}^{(1)} = \boldsymbol{v} + \sum_{i=q+1}^{k} \left(p_{i,1}\boldsymbol{v}_{i,1} + \sum_{j=2}^{m_i} p_{i,j}\boldsymbol{v}_{i,j} \right)$ とする．$\Omega \cup \{\boldsymbol{v}^{(1)}\}$ は基底である．先と同様に，各 $i \ge q+1$ に対し，$p_{i,m_i} = -a_{i,j_i}/\lambda_i$ とし，$j = m-1, \ldots, 1$ の順に $p_{i,j} = -(a_{i,j} - p_{i,j+1})/\lambda_i$ とすれば, 第 $q+1$ ブロック以降の $*$ の部分を零にできる．
  2. $i \le q$ であれば，$f(\boldsymbol{v}_{i,1}) = \boldsymbol{0}$ かつ $\forall j : 2 \le j \le m_i$，$f(\boldsymbol{v}_{i,j}) = \boldsymbol{v}_{i,j-1}$ である．$\boldsymbol{v}^{(2)} = \boldsymbol{v}^{(1)} - \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{m_i-1} a_{i,j}\boldsymbol{v}_{i,j+1}$ とする．$\Omega \cup \{\boldsymbol{v}^{(2)}\}$ は基底である．さらに，$f(\boldsymbol{v}^{(2)}) = \sum_{i=1}^{q} a_{i,m_i}\boldsymbol{v}_{i,m_i}$ となる．

- $(\exists i, \lambda_i' = 0$ の場合, 続き (1))

    3. $\forall i, a_{i,j_i} = 0$ の場合には $*$ の部分はすべて零になっているので終了. そうでない場合には, $r = \min\{j : a_{j,m_j} \neq 0\}$ とする. すると, $f(\boldsymbol{v}^{(2)}) = \sum_{i=r}^{q} a_{i,m_i}\boldsymbol{v}_{i,m_i}$ となる.
    4. $\boldsymbol{v}^{(3;0)} = \boldsymbol{v}^{(2)}$ とし, $j \geq 1$ に対し, 帰納的に, $\boldsymbol{v}^{(3;j)} = f(\boldsymbol{v}^{(3;j-1)})$ と定義する. 記法の 簡単のために, $l \leq 0$ のときには $\boldsymbol{v}_{i,l} = \boldsymbol{0}$ と定義すると, $\boldsymbol{v}^{(3;1)} = f(\boldsymbol{v}^{(3;0)}) = \sum_{i=r}^{q} a_{i,m_i}\boldsymbol{v}_{i,m_i}$ であり, $\boldsymbol{J}_i'$ の構造より, $\boldsymbol{v}^{(3;j)} = \sum_{i=r}^{q} a_{i,m_i}\boldsymbol{v}_{i,m_i-j+1}$ となる. したがって, $\boldsymbol{v}^{(3;m_r)} = \sum_{i=r}^{q} a_{i,m_i}\boldsymbol{v}_{i,m_i-m_r+1}$ となり, $i \geq r$ なら $m_r \geq m_i$ であったから, $f(\boldsymbol{v}^{(3;m_r)}) = \boldsymbol{0}$ である.

- ($\exists i, \lambda'_i = 0$ の場合, 続き (2))

  5. 前段で構成したベクトルを逆順に並べると, $f((\boldsymbol{v}^{(3,m_i)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(3,0)})) = (\boldsymbol{v}^{(3,m_i)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(3,0)})\boldsymbol{N}_{m_r+1}$ となり, Jordan 標準形の一部が構成されている. このステップにおける新しい基底の構成に関与したベクトルは, $\boldsymbol{v}^{(2)}$ 以外には, $\{\boldsymbol{v}_{i,j} : r \le i \le q, 1 \le j \le m_i\}$ のみなので, $\mathcal{B}_1$ を $\{\boldsymbol{v}^{(3;m_r-j+1)} : 1 \le j \le m_r\} \cup \{\boldsymbol{v}_{i,j} : r+1 \le i \le q, 1 \le j \le m_i\}$ をこの順に並べた基底の一部, $\mathcal{B}_2$ を $\{\boldsymbol{v}_{i,j} : r \le i \le q, 1 \le j \le m_i\}$ をこの順に並べた基底の一部としたとき, $\mathcal{B}_1$ と $\mathcal{B}_2$ の張る空間が一致することを証明できれば, Jordan 標準形の構成が完了する.

- $(\exists i, \lambda'_i = 0$ の場合, 続き (3))

    6. $m_r \geq m_{r+1} \geq \cdots geqm_q$ であったことに注意する． $r \leq j \leq q$ に対し, $\boldsymbol{D}_j = a_{j,m_j}\boldsymbol{I}_{m_j}$ とし, $r+1 \leq j \leq q$ に対して $\boldsymbol{E}_j = (\boldsymbol{0}_{m_j \times (m_r - m_j)}, \boldsymbol{D}_j)$ とすると, $\mathcal{B}_1$ は $\mathcal{B}_2$ に以下の正方行列を右から乗ずることで得られる．この行列は正則なので, 我々がおこなったことが基底変換であることが示される.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_r & & & \\ \boldsymbol{E}_{r+1} & \boldsymbol{I}_{m_{r+1}} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \boldsymbol{E}_q & & & \boldsymbol{I}_{m_q} \end{pmatrix}$$

Jordan 標準形 (22)

- 以上の証明は, I. M. Gelfand (Translated by A. Shenitzer, Lectures on linear algebra, Dover, 1989 の記述に手を加えたものである. 証明が長くて難しいことに驚いたと思うが, これでも相対的には簡単な証明であり, 線形代数の (きちんとした) 教科書では, Jordan 標準形の導出に 30 ページ前後が費されているものもある.
- 以上の証明は相対的には簡単なのだが, Jordan 標準形におけるブロック $\boldsymbol{J}_i$ の大きさが行列 (あるいは対応する線型写像) から一意的に決まることが示せないという欠点がある.

より進んだ話題 (1)

- 実行列については実数の範囲で構成できるよう工夫された**実 Jordan 標準形**という標準形もある; 実係数の多項式が複素根 (解) を持つときには必ず共役複素根 (解) とペアになっていることが証明できるが, 実 Jordan 標準形では複素根を必ずその共役複素根とペアで取り扱わねばならないため繁雑
- 行列には Jordan 標準形以外にも色々な標準形がある
- 固有値を一般化した**特異値**という概念を導入することがある
- 逆行列を持たない行列について, **一般化逆行列**という概念を導入することがある

より進んだ話題 (2)

- 線形代数の舞台は実数体や複素数体などの**体**上で定義された有限次元の線形空間
- 線形代数の拡張
  - 無限次元へ: **関数解析 (解析学)**
  - 体上のベクトル空間ではなく**環上の加群**を取り扱う: **代数学**
  - 要素が多項式や有理式の行列, 行列方程式, 行列不等式, 行列の関数 **制御, 信号処理**

より進んだ話題 (3)

- 線形代数の応用
  - 線形回路網の解析 (回路理論) では線形代数は不可欠
  - システム系の分野 (制御, 信号処理, 数理計画法, 数値解析) では線形代数を常用
  - 表計算は数学的には線形代数の世界
  - 経済学, 統計学
  - コンピュータグラフィックス

文献について

- 1959年に出版された F. R. Gantmacher, The Theory of Matrices (出版社: Chelsea) は I, II 巻計 640 ページ, **当時の線形代数に関する知識の集大成**, 証明も詳しく書かれている
- 2009 年に第 2 版が出版された D. S. Bernstein, Matrix Mathematics (出版社: Princeton University Press) は 1139 ページで証明抜き, 参考文献は 1540 件
- 線形代数に関して「何でも書いてある本」を探すのは無理, いろいろな本を見るしかない
- 線形代数を本格的に使う人は上記文献を入手して情報検索の手がかりにするとよい
- ネットの情報 (Wikipedia 等) は便利だが間違いも多い. 裏を取ってから使うこと. 盲信は禁物.