電 158 電気数学 I
第 14 回
行列の対角化

基底の変換 (1)

- f を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への 1 次変換とする
- 1 次変換の表現行列は基底の取り方によって変わる:
  定義域と値域で共通の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を取ると

$$\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{v}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{v}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ はこの基底に関する f の表現行列

基底の変換 (2)

- 別の基底 $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ を取る
- $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ と $(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n)$ の関係は

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \cdots & \boldsymbol{w}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$ は基底変換行列 (正則である)

基底の変換 (3)

- 以下, $\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{v}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{v}_n) \end{pmatrix}$ を $f\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix}$ と略記する:

$$
\begin{array}{rcll}
f\begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \cdots & \boldsymbol{w}_n \end{pmatrix} & = & f\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} P\right) & \text{基底変換} \\
& = & f\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix}\right) P & \text{線形性} \\
& = & \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} AP & \text{旧表現行列} \\
& = & \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \cdots & \boldsymbol{w}_n \end{pmatrix} P^{-1}AP & \text{新表現行列}
\end{array}
$$

- 基底を $\begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \cdots & \boldsymbol{w}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} P$ に変えると f の表現行列は $P^{-1}AP$ に変わる

- 1 次変換の性質が判りやすい基底があるのではないか?

基底の変換 (4)

- ある基底に関して 1 次変換 f の表現行列が

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & d_n \end{pmatrix}$$

という形 (対角行列) になっていれば...

  – f は第 i 番目の基底の方向に d_i 倍する写像を集めたもの

- 基底変換によって行列をこのような形にすること: 対角化
- 対角化はいつもできるとは限らない

行列の対角化 (1) (167∼175 ページ)

- 本節の内容: 対称行列は直交行列によって対角化できる
  $\Rightarrow$ これだけ!
- 換言すると, 1 次変換 f の表現行列が対称行列のときには, ある正規直交基底に関し, f の表現行列が対角行列になる
- 教科書第 3 節までの説明文は「対称行列は直交行列によって対角化できる」と言っているだけなので飛ばす
- 演習が終わったところで証明を述べる
- 後半に対称行列以外に関する事実を述べる

行列の対角化 (2) (167~175 ページ)

- 右下がりの対角線上を除く全要素が零の行列: 対角行列

$$D = \mathrm{diag}\,(d_1, \ldots, d_n) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & d_n \end{pmatrix}$$

- 対角化: $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正方行列 P を見付けること
- 対角化はいつもできるとは限らない
- 対称行列は直交行列によって対角化できる

行列の対角化 (3) (167∼175 ページ)

▷ 対称行列の対角化

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & d_n \end{pmatrix}, AP = P\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & d_n \end{pmatrix}$$

- さらに, P として直交行列 (後述) を選ぶことができる

直交行列 (1) (170~171 ページ)

- $P^T = P^{-1}$ となる n 次正方行列を直交行列という
- ベクトルの内積 $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)$ は $\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{a}_j$ とも書けることに注意
- P の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ とする:

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

- P の行ベクトルを $\boldsymbol{\alpha}_1^T, \boldsymbol{\alpha}_2^T, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n^T$ とする:

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T \\ \boldsymbol{\alpha}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^T \end{pmatrix}, \; P^T = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix}$$

直交行列 (2) (170∼171 ページ)

$$
I = P^T P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^T \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_n) \\ (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_n) \\ \vdots & & & \\ (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_n) \end{pmatrix}
$$

▷ **結論** 直交行列の列ベクトルは $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底

直交行列 (2) (170~171 ページ)

$$I = PP^T = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \ldots & \boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_n) \\ (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_n) \\ \vdots & & & \\ (\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_n) \end{pmatrix}$$

▷ 結論 直交行列の行ベクトルは $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底

対称行列の直交行列による対角化 (1)

▷ 設定

- A: n 次の対称行列 ($A^T = A$)
- $\boldsymbol{v}_1$ は A の固有値 λ_1 に対応する固有ベクトルで $|\boldsymbol{v}_1| = 1$
- $\boldsymbol{v}_1$ を含む $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を取る

i) $A\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1$

ii) $A\boldsymbol{v}_i = a_i \boldsymbol{v}_1 + \sum_{j=2}^n m_{ji}\boldsymbol{v}_j$ とする ($i \geq 2$) とする
$\boldsymbol{v}_1^T A\boldsymbol{v}_i = a_i = \boldsymbol{v}_i^T A\boldsymbol{v}_1 = 0$, よって $a_i = 0$
$k \geq 2$ なら $\boldsymbol{v}_k^T A\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_k^T \sum_{j=2}^n m_{ji}\boldsymbol{v}_j = m_{ki}$,
$\boldsymbol{v}_k^T A\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_i^T A\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{v}_i^T \sum_{j=2}^n m_{jk}\boldsymbol{v}_j = m_{ik}$, よって $m_{ik} = m_{ki}$

対称行列の直交行列による対角化 (2)

まとめると $A\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & m_{21} & \cdots & m_{nn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & m_{1n} & \cdots & m_{nn}\end{pmatrix}, m_{ij}=m_{ji}$$

よって $\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1^T\\ \boldsymbol{v}_2^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{v}_n\end{pmatrix} A\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & m_{21} & \cdots & m_{nn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & m_{1n} & \cdots & m_{nn}\end{pmatrix}$

($\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が正規直交基底だったから)

対称行列の直交行列による対角化 (3)

iii) $P_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \dots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix}$ とすると, $P_1^T A P_1 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & M_{n-1} \end{pmatrix}$ で,
M_{n-1} は $n-1$ 次の対称行列となった

iv) M_1 に対して同様の手法を適用すると, 直交行列 P_2 が取れ,
$P_2^T P_1^T A P_1 P_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \mathbf{0}^T \\ 0 & \lambda_2 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & M_{n-2} \end{pmatrix}$ となる

対称行列の直交行列による対角化 (4)

v) 上記手順を繰り返すことにより,

$$P_{n-1}^T P_2^T P_1^T A P_1 P_2 P_{n-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{n-1} & \\ & & & M_1 \end{pmatrix}$$ となるが,

M_1 は 1 次の対称行列, すなわちスカラーだから対角化終了
$P = P_1 P_2 P_{n-1}$, $\lambda_n = M_1$ とする

vi) P_1, P_2 が直交行列のとき, $(P_1P_2)^T = P_2^T P_1^T$ だから $(P_1P_2)^T P_1 P_2 = P_2^T P_1^T P_1 P_2 = I$, すなわち直交行列の積は直交行列になることに注意

対称行列の直交行列による対角化 (5)

vii) P は直交行列で $P^TAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ (空白部分は零) だから, P の n 本の列ベクトルはすべて A の固有値で, 対応する固有ベクトルは λ_n

viii) $\det P^{-1}(A - tI)P = \det(A - tI)$ である
A, B が正方行列のとき $\det AB = \det A \det B$, $\det P^{-1}P = \det I = 1$ より $\det P = 1/(\det P)$, よって $\det P^{-1}AP = \det A$, 一方 $P^{-1}IP = I$, したがって $\det P^{-1}(A - tI)P = \det(A - tI)$ である

ix) よって, 固有多項式は $(\lambda_1 - t)\cdots(\lambda_n - t)$ で, λ が m 重解のときには対応する m 個の直交する固有ベクトルがある

直交行列と回転 (179 ページ)

- $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}$, f: P に対応する 1 次変換とする
- f により $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{v}_1$ に $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{v}_2$ に移るが
- 直交性は保存される
- $\det P = 1$ のとき: 回転 (x 軸正の向きの左が y 軸正の向き)
- $\det P = -1$ のとき: x 軸の関する折り返し + 回転 (x 軸正の向きの左が y 軸負の向き)

2 次曲線 (1) (179 ページ)

- $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax^2+bxy+cy^2+px+qy=d\}$: 2 次曲線
- $A=\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$: 係数行列

$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = d$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ とおいて

$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} P^T A P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = d$,

A の固有値を α,β とし, $\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \end{pmatrix}$ すると,

$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \gamma u + \delta v = d$ (座標系の折り返し + 回転)

2 次曲線 (2) (179 ページ)

- 折り返しと回転を施した 2 次形式の式:
  $$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \gamma u + \delta v = d$$
  上記を書き直すと $\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma u + \delta v = d$, さらに $u = s + \eta, v = t + \xi$ とおくと $\alpha s^2 + \beta t^2 + 2\alpha\eta s + 2\beta\xi t + \gamma s + \gamma\eta + \delta t + \delta\xi = +\alpha\eta^2 + \beta\xi^2 = d$ だから, $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ なら, η, ξ をうまく選ぶと, 次の形にできる: $\boxed{\alpha s^2 + \beta t^2 = d'}$

2 次曲線 (3) (179 ページ)

- $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax^2+bxy+cy^2=d\}$: 2 次曲線 (1 次の項なし)

$$A=\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = d,$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ とおいて $\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} P^T A P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = d,$

A の固有値を α, β とし, $\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \end{pmatrix}$ すると,

$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = d$ (座標系の折り返し + 回転)

こちらが教科書にある形

2 次曲線 (4) (179 ページ)

- 係数行列には定数倍の不定性がある
  - $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + bxy + cy^2 + px + qy = d\}$
    係数行列は $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$
  - $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid k(ax^2 + bxy + cy^2 + px + qy) = kd\}$
    係数行列は $A = \begin{pmatrix} ka & kb/2 \\ kb/2 & kc \end{pmatrix}$
  - 上の 2 式は同じ図形を定める
    係数行列の定義は実は少し不便

対角化の応用 (1) (183 ページ)

▷ 対角化すると行列の冪の計算が簡単

- 対角行列 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$ に対し, $D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^k \end{pmatrix}$ (空白の部分は零)
- $P^{-1}AP = D$ なら $A = PDP^{-1}$, $A^2 = PD\color{red}{P^{-1}P}\color{black}DP^{-1} = PD^2P^{-1}$, 同様にして $A^k = PD^kP^{-1}$

対角化の応用 (2) (183 ページ)

▷ 漸化式への応用

- 漸化式 $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$
- $\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると $\boldsymbol{a}_{n+1} = A\boldsymbol{a}_n$
- $\boldsymbol{a}_n = A^{n-1}\boldsymbol{a}_1$ だが, A を対角化すれば ($A = PDP^{-1}$), 一般解 $\boldsymbol{a}_n = PD^{n-1}P^{-1}$ が簡単に計算できる
- $\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$ のように並べる流儀もある

一般の行列の対角化 (1)

n 次正方行列 A が n 個の 1 次独立な固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を持つとき, $P = (\, \boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_n \,)$ とすると, $P^{-1}AP$ は対角行列になる (P は一般には直交行列でない)

(理由) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に対応する固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とすると

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1}A(\, \boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_n \,) = P^{-1}(\, \boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_n \,)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= P^{-1}P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

一般の行列の対角化 (2)

- n 次行列 A の固有多項式 $\varphi_A(t)$ は n 次の多項式
- $\varphi_A(t)$ の根 (固有値) がでたらめに分布しているとき, 重根が発生することは稀
- A が互いに相異なる n 個の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を持つとき対応する固有ベクトルの組 $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ は 1 次独立 (既出だが後で証明を再度述べる)
  $\Rightarrow$ このような場合には対角化可能

一般の行列の対角化 (3)

A が互いに相異なる n 個の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を持つとき対応する固有ベクトルの組 $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ は 1 次独立

▷ (理由)

A が n 次の行列であるものとし, n に関する帰納法による.

- $n = 1$ のとき: 1 次の行列はスカラー, 考える必要はない
- $n = 2$ のとき: $(\lambda_1, \boldsymbol{v}_1)$, $(\lambda_2, \boldsymbol{v}_2)$ が A の固有値と固有ベクトルの対で, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ とし, $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ が自明でない 1 次関係式として矛盾を導く. 前式を λ_1 倍して $\lambda_1 c_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_1 c_2 \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$, 一方前式両辺に A を作用させると $\boldsymbol{0} = A(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2) = c_1\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\lambda_2\boldsymbol{v}_2$, 辺々引いて $c_2(\lambda_2 - \lambda_1)\boldsymbol{v}_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ だから $c_2 = 0$, したがって c_1 も零となり自明でない 1 次関係式という仮定に矛盾.

一般の行列の対角化 (4)

> A が互いに相異なる n 個の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を持つとき対応する固有ベクトルの組 $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ は 1 次独立

▷ 理由 (つづき) A は n 次で, 固有値と固有ベクトル $(\lambda_i, \boldsymbol{v}_i)$, 固有値はすべて相異なるとき: (固有ベクトルは零でないことに注意)

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n && \text{自明でない 1 次関係式と仮定}\\
\mathbf{0} &= \lambda_1 c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \lambda_1 c_n\boldsymbol{v}_n && \text{両辺を } \lambda_1 \text{ 倍}\\
\mathbf{0} &= A(c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n)\\
&= c_1\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\lambda_n\boldsymbol{v}_n && \text{第 1 式に } A \text{ を作用}\\
\mathbf{0} &= c_2(\lambda_2 - \lambda_1)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n(\lambda_n - \lambda_1)\boldsymbol{v}_n && \text{辺々引く}
\end{aligned}$$

$\lambda_1 \neq \lambda_i (i \geq 2)$ だから, 帰納法の仮定により, $c_2 = \cdots = c_n = 0$ でなければならない. このとき, c_1 も零となり矛盾.

一般の行列の対角化 (5)

- 固有方程式が重根を持つ行列を除くと, 対角化は可能
- 応用上固有方程式が重根を持つ行列がよく出てくるので, これでは話が済むわけではない
- 対角化可能な行列はもう少し一般的で, 正規行列という範囲にまで広げられる (証明が繁雑なのでこの講義では正規行列は取り上げない)

ジョルダン標準形

- n 次正方行列 A は, 適切に正則行列 P を定めることにより,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix}$$

  という形にできる

  - ジョルダン標準形 (次回)
  - 対角線上に正方行列, $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_i & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$, ジョルダン細胞
  - ジョルダン標準形は線形常微分方程式で重要