電 158 電気数学 I
第 13 回
固有値と固有ベクトル (2)

固有値と固有ベクトルの計算 (1) (154 ページ)

- 教科書では実数の範囲に議論を限定しているが, 講義では複素数を含める
- 固有値を計算するには, 固有方程式 $\det(A - tI) = 0$ を解けばよい
- 解があるかどうかが問題

固有値と固有ベクトルの計算 (2) (154 ページ)

> A を n 次の行列とすると, 固有多項式 $\varphi_A(t) = \det(A - tI)$ は n 次の多項式である

(理由) A が 3 次の場合を例に取って説明する.

$$A - tI = \begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - t & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - t \end{pmatrix}$$ で, 行列式を定義通りに計算する

(各行から要素を 1 個ずつ選んで積を作る) と, t に関する次数が最大になるのは対角線上の要素のみを選んだ場合で, 積は $(a_{11}-t)(a_{22}-t)(a_{33}-t)$. よって, 固多項式の次数は 3 で, 係数は -1. A が n 次の場合も, 同様の議論により, 固有多項式の次数は n で, 最高次の係数は $(-1)^n$ となる.

固有値と固有ベクトルの計算 (3) (154 ページ)

[代数学の基本定理] 複素係数の代数方程式
$t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots a_n = 0$ は複素数の範囲で必ず 1 個解を持つ

[系] 実係数の代数方程式
$t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots a_n = 0$ は複素数の範囲で必ず 1 個解を持つ

- 証明はこの講義の範囲では無理
- 複素解析を使った証明，ガロア理論を使った証明など色々ある
- 「代数学の基本定理」と呼ばれるのは歴史的理由．現代の代数学では代数学の基本定理は基本的でない

固有値と固有ベクトルの計算 (4) (155 ページ)

多項式 $\varphi(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots a_n$ に対し, λ が代数方程式 $\varphi(t) = 0$ の解であれば, $(t - \lambda)$ は $\varphi(t)$ を割り切る

(理由) 多項式の除算により,

$$\varphi(t) = (t - \lambda)(t^{n-1} + a'_1 t^{n-2} + \cdots + a'_{n-1}) + r$$

と書ける (r は剰余). 両辺に $t = \lambda$ を代入すると, 左辺は零であるから, 右辺も零, 右辺第 1 項は零になるから, $r = 0$ でなければならない.

[系] $t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots a_n = 0$ は, 複素数の範囲で, 重複を許せば, n 個の解を持つ

固有値と固有ベクトルの計算 (4) (155 ページ)

- 代数方程式の「解の公式」があるのは 4 次の場合まで
- 5 次以上の代数方程式には解の公式が存在しないことが証明されている (詳しい説明はこの講義の範囲を超えるので取り扱わない)
- 高次の代数方程式を解くときにはコンピュータで数値計算
- 試験に出るような問題では, 手計算で固有値が計算できるようになっている

固有値と固有ベクトルの計算 (5) (155 ページ)

- 固有値 λ がわかっていれば, 固有ベクトルも計算できる
- $(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の自明でない解を求めればよい
  $\det(A - \lambda I) = 0$ だから解は存在する
  不定解になるが, 不定の部分は都合が良いように決める
- 実行列でも固有値は一般に複素数, 対応する固有ベクトルも複素数 (対称行列では実数だけで話が済む)
- 固有ベクトルの計算も少し大きい行列では手計算は無理, コンピュータを使う

固有値と固有ベクトルの計算 (6) (155 ページ)

- 「1 次変換 f の固有値と固有ベクトルを計算する」ことは,「対応する行列の固有値と固有ベクトルを計算する」こと

対称行列の固有ベクトル (1) (159 ページ)

- n 次行列には n 個の固有値がある (重複を許す; 既出)
- 対称行列の固有値は実数 (既出)
- n 個の固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とすると固有多項式は

$$(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n) \xrightarrow{\text{同じ固有値をまとめる}} (t-\lambda_1)^{m_1}\cdots(t-\lambda_k)^{m_k}$$

- m_i を固有値 λ_i の重複度という

対称行列の固有ベクトル (2) (159 ページ)

- 対称行列では, 固有値 λ_i に対応する m_i 本の 1 次独立な固有ベクトルがある

  (理由) 次回に説明する

- 対称行列では, 異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交する

  (理由) A が対称行列, λ_1, λ_2 を A の固有値で $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が対応する固有ベクトルとすると, $\boldsymbol{x}_2^T A \boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{x}_1$, 一方 $\boldsymbol{x}_2^T A \boldsymbol{x}_1 = (\boldsymbol{x}_2^T A \boldsymbol{x}_1)^T = \boldsymbol{x}_1^T A^T \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1^T A \boldsymbol{x}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{x}_1$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ だったから $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{x}_1^T \boldsymbol{x}_2 = 0$.

固有ベクトルと固有空間 (1) (162∼163 ページ)

A: n 次行列のとき

- $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が固有値 λ に対応する固有ベクトルなら $c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2$ も固有値 λ に対応する固有ベクトル
  (理由) $A(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2) = c_1A\boldsymbol{x}_1 + c_2A\boldsymbol{x}_2 = c_1\lambda\boldsymbol{x}_1 + c_2\lambda\boldsymbol{x}_2 = \lambda(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2)$

- λ に対応する固有ベクトルすべてが生成する線形部分空間を固有値 λ に対応する固有空間という

- 固有空間は線形方程式 $(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解全体と一致する

固有ベクトルと固有空間 (2) (162〜163 ページ)

- 教科書の「固有値をまったく持たない場合」の記述は理系向きでないので無視してよい
- λ が A の固有値でないときには $(A-\lambda I)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ は自明な解のみを持つ
- $\mathbf{0}$ のみから成る線形空間のことを 0 次元ベクトル空間という
- A が対称行列で, A の固有値 λ が固有多項式の r 重解であるときには, 対応する固有ベクトル空間は r 次元になる
  (理由) 次回に説明する