# 電158 電気数学I
# 第12回
# 固有値と固有ベクトル (1)

# 1 次変換と固有値 (1) (143 ページ)

- $f$ を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ の 1 次変換とする． $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ (あるいは $\lambda \in \mathbb{C}$) が $f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$ をみたすとき，
  - $\lambda$: $f$ の固有値
  - $\boldsymbol{x}$: $f$ の固有ベクトル
- $A$ を $n$ 次行列とする． $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ (あるいは $\lambda \in \mathbb{C}$) が $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ をみたすとき，
  - $\lambda$: $A$ の固有値
  - $\boldsymbol{x}$: $A$ の固有ベクトル

# 1次変換と固有値 (2) (143ページ)

- 歴史的理由から, 固有値には $\lambda$(ラムダ, ギリシャ文字) を使うことが多い (付録参照)

- $\boldsymbol{x}$ が $n$ 次行列 $A$ の固有値 $\lambda$ に対応する固有ベクトルであるとき, $k \neq 0$ に対し, $k\boldsymbol{x}$ も $\lambda$ に対応する固有ベクトルである
  (理由) $A(k\boldsymbol{x}) = kA\boldsymbol{x} = k\lambda\boldsymbol{x} = \lambda(k\boldsymbol{x})$
  1次変換で考えた場合も証明は同じ

# 1 次変換と固有値 (3) (143 ページ)

- 歴史的理由から, 固有値には $\lambda$(ラムダ, ギリシャ文字) を使うことが多い (付録参照)
- $\boldsymbol{x}$ が $n$ 次行列 $A$ の固有値 $\lambda$ に対応する固有ベクトルであるとき, $k > 0$ に対し, $k\boldsymbol{x}$ も $\lambda$ に対応する固有ベクトルである<br>(理由) $A(k\boldsymbol{x}) = kA\boldsymbol{x} = k\lambda\boldsymbol{x} = \lambda(k\boldsymbol{x})$
- 1 次変換についても上と同じ

$\Rightarrow$ 固有ベクトルにはノルムの分の不定性がある<br>ノルムが 1 等, 状況次第で使いやすいものを取る

# 1 次変換と固有値 (4) (143 ページ)

**異なる固有値に対応する固有ベクトルは 1 次独立である**

(理由) 相異なる固有値の数に関する帰納法による．固有値 $\lambda_k$ に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_k$ と書く．固有値が 1 個のときには証明すべきことはない．$k-1$ まで主張は正しいと仮定し, $k$ について主張を示す．$k$ 個の固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ の間に自明でない 1 次関係式 $c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{0}$ が成り立つと仮定して矛盾を導く．$A(c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}) = \lambda_1 c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_k c_k\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$ だから, 第 2 式から第 1 式の $\lambda_1$ 倍を引くと, $(\lambda_2 - \lambda_1)c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots (\lambda_k - \lambda_1)c_k\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$, $\lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j)$ と帰納法の仮定より $c_i = 0 (i = 2, \ldots, k)$．$\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{0}$ だから $c_1$ も零となり矛盾．よって $k$ 個の相異なる固有値に対応する固有ベクトルは 1 次独立.

# 1 次変換と固有値 (5) (143 ページ)

ひとつの固有値に対応する複数の 1 次独立なベクトルが存在することがある

- 極端な例は単位行列, $I$ を単位行列とすると, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ であれば $I\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ だから, 零でないすべてのベクトルは固有値 1 に対応する固有ベクトルになる; 1 次変換でこれに対応するのは恒等変換

- ひとつの固有値に対応する固有ベクトルの全体は線形部分空間を生成する; 詳しくは 162 ページ

# 固有値・固有ベクトルを求める (146 ページ)

## ▷ $A$ を $n$ 次の行列とするとき:

$$
\begin{aligned}
\lambda \text{ が固有値} \quad &\Leftrightarrow \quad A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \text{ が零でない解を持つ} \\
&\Leftrightarrow \quad (A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \text{ が自明でない解を持つ} \\
&\Leftrightarrow \quad (A - \lambda I) \text{ の階数が } n \text{ より小さい} \\
&\Leftrightarrow \quad \det(A - \lambda I) = 0 \text{ (詳しくは次の節)}
\end{aligned}
$$

## ▷ 固有値 $\lambda$ がわかっているときには:

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \text{ の自明でない解はすべて固有ベクトル}$$

# 固有方程式 (1) (150 ページ)

- $\varphi_A(t) = \det(A - tI)$: $A$ の固有多項式 ($A$ に 1 次変換 $f$ が対応するとき, $f$ の固有多項式ということもある)

- $\varphi_A(t) = 0$: $A$ の固有方程式

$\lambda$ が固有値 $\Leftrightarrow$ $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ が零でない解を持つ
$\Leftrightarrow$ $(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ が自明でない解を持つ
$\Leftrightarrow$ $(A - \lambda I)$ の階数が $n$ より小さい
$\Leftrightarrow$ $\det(A - \lambda I) = 0$ (詳しくは次の節)

$\boxed{\text{固有値は固有方程式の解}}$

# 固有方程式 (2) (150 ページ)

- 固有値は固有方程式の解
- 教科書では複素数の議論を回避するために実数解にこだわっているが, 電気系では複素解が重要

# 固有方程式 (3) (150 ページ)

対称行列の固有値は実数になる

(理由) $A$, $\boldsymbol{x}$ の全要素の複素共役を取ったものを $\overline{A}$,$\overline{\boldsymbol{x}}$ とし, $\lambda$ の複素共役を $\overline{\lambda}$ とする. $\lambda$ を $A$ の固有値とし, $\boldsymbol{x}$ を対応する固有ベクトルとする.

- $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \xrightarrow{\text{複素共役}} \overline{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}$, $A$ は実行列だから $A = \overline{A}$
  $\longrightarrow$ $\overline{\lambda}$ は固有値で, 対応する固有ベクトルは $\overline{\boldsymbol{x}}$
- $$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{x}}^T(A\boldsymbol{x}) &= \lambda\overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x} && (\boldsymbol{x}\text{は固有ベクトル}) \\ \overline{\boldsymbol{x}}^T(A\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{x}^T(A^T\overline{\boldsymbol{x}}) && (\text{スカラーは転置で不変}) \\ &= \boldsymbol{x}^T(A\overline{\boldsymbol{x}}) && (A\text{ は対称行列}) \\ &= \overline{\lambda}\boldsymbol{x}^T\overline{\boldsymbol{x}} && (\overline{\boldsymbol{x}}\text{は固有ベクトル}) \end{aligned}$$

  $\boldsymbol{x}^T\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x}$ だから $\lambda = \overline{\lambda}$, 固有値は実数 (証明の過程では複素固有値が必要であることに注意)