電158 電気数学I
第11回
線形空間 (2)

グラム・シュミットの直交化法 (1) 124～125 ページ

- グラム (Gram) とシュミット (Schmidt) は人名, 定理, 方法等に名前を付ける際, 関係者数名の名前を連ねることは多い
- 1 次独立なベクトルの組から正規直交系を得る手順
- 零でない $\boldsymbol{a}$ を正規直交「系」(1 個だけでは系ではないが) にするにはノルムを 1 にする, すなわち $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$ とする
- 独立な 2 個のベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ から正規直交系を得るには $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{a}_1/|\boldsymbol{a}_1|$, $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{b}_2/|\boldsymbol{b}_2|$ とする

グラム・シュミットの直交化法 (2) 124∼125 ページ

▷ 一般系

準備) 1 次独立なベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が与えられているものとする

ステップ 1) $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{a}_1 / |\boldsymbol{a}_1|$ により正規化する

ステップ j) $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{j-1}$ から正規直交系 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{j-1}$ が得られているものとし, $\boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{a}_j - (\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1 - \cdots - (\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{v}_{j-1})\boldsymbol{v}_{j-1}$, $\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{b}_j / |\boldsymbol{b}_j|$ とする

グラム・シュミットの直交化法 (3) 124~125 ページ

▷ 一般形の説明

- $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ は有限個だから k 回で計算が終わる
- $\boldsymbol{v}_1$ は $\boldsymbol{a}_1$ の「1 次結合」(定数倍),
  $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1/|\boldsymbol{a}_1|)\boldsymbol{v}_1/|\boldsymbol{a}_1|$, $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{b}_2/|\boldsymbol{b}_2$ だから, $\boldsymbol{v}_2$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の 1 次結合, 同様に $\boldsymbol{v}_j$ は $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j$ の 1 次結合である
- $\boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{a}_j - (\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1 - \cdots - (\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{v}_{j-1})\boldsymbol{v}_{j-1}$ とすると $(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{v}_1) = 0, \ldots, (\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{v}_{j-1}) = 0$ となる
- $\boldsymbol{b}_j \neq \boldsymbol{0}$ となるのは, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j$ が独立だから, 仮に $\boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{0}$ とすると $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j$ の自明でない 1 次関係式が得られるので不合理
- $\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{b}_j/|\boldsymbol{b}_j|$ としているから $|\boldsymbol{v}_j| = 1$

グラム・シュミットの直交化法 (4) 124~125 ページ

- $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}$ に対し, $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$ として, $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{e}$ を $\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{a}$ 方向の正射影あるいは $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}$ に射影してできたベクトルという (9 ページ, 121 ページと定義が変わっているので注意)
- $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{e} = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}$ とも書ける
- グラム・シュミットの直交化法によって得られるベクトル $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ のいくつかの向き (正負) を変えても正規直交系であることは不変
- k はいくつでもよいが, k をベクトル空間の次元より大きくすると 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が取れない

線形部分空間 (129～130 ページ)

- 線形空間 V の部分集合 W において, どのように $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in W$ (V ではないので注意) と c_1, c_2 を取っても $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 \in W$ となるとき, W は V の線形部分空間という
- $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in W$ であって, W のどのベクトルも $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ の 1 次結合で表されるとき, これを W の生成系という
- W の 1 次独立な生成系を W の基底という
- W の基底の個数を W の次元といい, $\dim W$ であらわす
- $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ の線形結合がつくる集合を $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ で生成される線形部分空間という

ベクトルの組の基本変形 (1) (134 ページ)

▷ ベクトルの組の基本変形とは:

- 2 個のベクトルの順序の入れ換え
- あるベクトルの (零でない) スカラー倍
- あるベクトルに他のベクトルのスカラー倍を加える

▷ 2 個のベクトルの基本変形

- $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix}$: $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ を並べたもの
- $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}\boldsymbol{a}_1 + c_{21}\boldsymbol{a}_2 & c_{21}\boldsymbol{a}_1 + c_{22}\boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix}$
  とする (通常の行列の積と同じ)

ベクトルの組の基本変形 (2) (134 ページ)

▷ 2 個のベクトルの基本変形 (つづき)

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
\begin{pmatrix} c\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},
$$

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & c\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

ベクトルの組の基本変形 (3) (134 ページ)

- ベクトルの組の基本変形は基本行列を使って表現できる
- k 個のベクトルの組の基本変形には k 次の基本行列を使う
- 基本行列は正則, その逆行列も基本行列
  $\Rightarrow$ ベクトルの組の基本変形は可逆 (変形を取り消せる)
  $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ が $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ から基本変形によって得られるなら
  $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ は $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ から基本変形によって得られる

ベクトルの組の基本変形 (4) (134 ページ)

$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ と $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ が互いに基本変形で移り変わるとき...

I) $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が 1 次独立 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ が 1 次独立

II) $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が 1 次従属 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ が 1 次従属

- 「1 次独立」の否定が「1 次従属」
  $\Rightarrow$ I) と II) で言っていることは同じ
- 上記が成り立つ理由をこれから述べる
- $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ を横に並べたものを $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k \end{pmatrix}$ と書く

ベクトルの組の基本変形 (5) (134 ページ)

▷ $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$ が 1 次独立 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_k$ が 1 次独立となる理由

$\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k\end{pmatrix} P$ (P は基本行列の積 $U_N \cdots U_1$) とする. $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$ が 1 次独立であるとき, $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_k$ が 1 次従属であると仮定して矛盾を導く. $c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{0}$ を自明でない 1 次関係式とすると, $\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1 \\ \vdots \\ c_k\end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$; よって $\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k\end{pmatrix} U \begin{pmatrix}c_1 \\ \vdots \\ c_k\end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ となるが, U が正則であることから, $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$ の自明でない 1 次関係式が得られたことになり, 仮定に矛盾する.

ベクトルの組の基本変形 (6) (135 ページ)

$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が数ベクトル, $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ が $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ から基本変形によって得られた数ベクトルとし, $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_k \end{pmatrix}$ とすると, ある正則行列 P によって $AP = B$ となる

- 理由はさっき述べたことと同じ
- $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が数ベクトルでないときには $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ をならべたものは教科書の意味での行列にはならないので注意 (教科書には明示されていない)
- $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)P = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k)$ と書けばいつでも大丈夫

基底の変形 (1) (135 ページ)

$\boxed{\text{基底にベクトルの組の基本変形を施したものは基底である}}$

(理由) 基本行列は正則だから

基底の変形 (2) (135 ページ)

$\boxed{\begin{array}{l}\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k,\ \boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_l \text{ が基底であるとすると}, k=l\text{ であり},\\ \boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_k \text{ は } \boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k \text{ から基本変形によって得られる}\end{array}}$

(理由) $k<l$ と仮定して矛盾を導く．$\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k$ および $\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_k$ は基底だから, $\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_l\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k\end{pmatrix} P$ となる (k,l) 行列 P がある．P の階数は最大でも k で, $k<l$ だから, $P\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は自明でない解を持つ．このとき, $\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_l\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ となり, $\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_k$ が 1 次独立であることに矛盾．したがって $k\geq l$ でなければならない．同様にして $k\leq l$ がいえるから, $k=l$．また, P が正則でないと仮定すると $P\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は自明でない解を持ち矛盾, よって P は正則だから, 基本行列の積である．したがって $\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_k$ は $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k$ から基本変形によって得られる．

次元の判定 (1) (135 ページ)

- 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix}$
  行ベクトルが並んだものと解釈
  $\Rightarrow$ 行基本変形は行ベクトルに対する基本変形
- ベクトルの組の基本変形, 基底の変形の関する授業中の議論「列ベクトルを並べて行列をつくる」という部分以外はすべて成り立つ

次元の判定 (2) (135 ページ)

- A の行ベクトルを $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ とする
- 掃き出しによって A が次の形になったとする (空白は零)

$$
\begin{array}{c}
1) \\ \vdots \\ r) \\ \\ \\ \\
\end{array}
\left(
\begin{array}{ccccc}
1\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & 1\cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & & 1\cdots \\
\hline
 & & & & \\
 & & & & \\
 & & & &
\end{array}
\right)
$$

この行ベクトルを $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_r, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}$ とする

次元の判定 (3) (135 ページ)

- $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ が生成する部分空間と $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_r, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}$ が生成する部分空間は一致する

- $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_r$ は1次独立: $\begin{array}{c} 1) \\ \vdots \\ r) \end{array} \begin{pmatrix} 1\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & 1\cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & 1\cdots \end{pmatrix}$

- よって, $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ が生成する部分空間の次元は r, 階数は行基本変形の手順によらずに定まる

次元の判定 (4) (135 ページ)

- 列ベクトルについても同じことがいえる
- 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$
  列ベクトルが並んだものと解釈
- W を $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が生成する部分空間とすると $\dim W$ は A の階数と一致し, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の中で 1 次独立なものの最大個数とも一致する

次元の判定 (5) (135 ページ)

▷ 理由:列ベクトルの張る空間の次元と行列の階数の一致 (1)

- A が行基本系列の系列 L によって次の形になったものとする (空白部分は零)

$$
\begin{array}{c}
1) \\ \vdots \\ r) \\ \\ \\
\end{array}
\left(
\begin{array}{cccccc}
1 & \cdots & \cdots & & & \\
 & & 1 & \cdots & \cdots & \\
 & & & & 1 & \cdots \\
\hline
 & & & & & \\
 & & & & & \\
\end{array}
\right)
$$

次元の判定 (6) (135 ページ)

▷ 理由:列ベクトルの張る空間の次元と行列の階数の一致 (2)

- 列基本変形 (列の入れ換え) の系列 R_1 によって 1 を対角線上させる

$$\begin{array}{c} 1) \\ \vdots \\ r) \\ \\ \\ \end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & \cdots & \cdots \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \cdots \\ \hline & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

次元の判定 (7) (135 ページ)

▷ 理由:列ベクトルの張る空間の次元と行列の階数の一致 (3)

- 列基本系列の系列 R_2(列に他の列の定数倍を加算) により対角線上の要素以外を零にする

$$\begin{array}{r} 1) \\ \vdots \\ r) \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \hline & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

次元の判定 (8) (135 ページ)

▷ 理由:列ベクトルの張る空間の次元と行列の階数の一致 (4)

$R = R_1R_2$ とすると $LAR = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ で, LAR の階数は A と等しい. $AR = L^{-1}\left(\begin{smallmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ だから, A の列ベクトルが生成する部分空間は $L^{-1}\left(\begin{smallmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ の列ベクトルが生成する部分空間と一致する. $L^{-1}\left(\begin{smallmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ には零でない列ベクトルは r 本しかないのだが, これらが 1 次独立であることを見る. $L^{-1}\left(\begin{smallmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ とすると $LAR\left(\begin{smallmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$, よって $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, したがって $L^{-1}\left(\begin{smallmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ の零でない r 本の列ベクトルは 1 次独立であり, AR, したがって A の列ベクトルが張る空間の次元は r である.

次元の判定 (9) (135 ページ)

▷ 結論

- ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_l$ の中で k 個までは 1 次独立な組み合わせを選べ, $k+1$ 個のベクトルをどのように選んでもこれらが 1 次従属になるとき, ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_l$ が生成する部分ベクトル空間の次元は k

- ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_l$ が数ベクトルのとき, これらを横にならべて作った行列 $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_l \end{pmatrix}$ の階数はベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_l$ が生成する部分ベクトル空間の次元と一致する