電 158 電気数学 I
第 9 回
行列式 (つづき)
行列式の応用

電 158 電気数学 I 2013 年度前学期 琉球大学工学部電気電子工学科 (夜間主コース) 担当: 半場

余因子と逆行列 (1) 85 ページ

- 記法の簡単のために 2 次の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ で説明する

- 第 1 列に関する余因子展開:
  $\det A = \widetilde{a}_{11}a_{11} + \widetilde{a}_{12}a_{12} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}$

- 第 2 列に関する余因子展開:
  $\det A = \widetilde{a}_{21}a_{21} + \widetilde{a}_{22}a_{22} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ はどうなるか?

余因子と逆行列 (2) 85 ページ

- $\begin{pmatrix} \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}$:

  $\widetilde{a}_{21} = (-1)^3 \det(a_{12})\,, \widetilde{a}_{22} = (-1)^4 \det(a_{11})$ だから

  $\widetilde{a}_{21} a_{11} + \widetilde{a}_{22} a_{12} = -a_{12} a_{11} + a_{11} a_{12} = 0$

- $\begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$

  $\widetilde{a}_{11} = (-1)^2 \det(a_{22})\,, \widetilde{a}_{12} = (-1)^3 \det(a_{21})$ だから

  $\widetilde{a}_{11} a_{21} + \widetilde{a}_{12} a_{22} = a_{22} a_{21} - a_{21} a_{22} = 0$

余因子と逆行列 (3) 85 ページ

▷ **2 次の場合の結論** $D = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ とすると

- $\begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{21} \\ \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $\dfrac{1}{D} \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{21} \\ \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{22} \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の逆行列

$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{21} \\ \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{22} \end{pmatrix}$: 余因子行列 (添字 i, j の並び方が A と逆)

余因子と逆行列 (4) 85 ページ

▷ n 次の場合

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$
- 第 j 列に関する余因子展開より, $a_{1j}\widetilde{a}_{1j} + \cdots + a_{nj}\widetilde{a}_{nj} = \det A$
- $p \neq j$ のとき, $a_{1p}\widetilde{a}_{1j} + \cdots + a_{np}\widetilde{a}_{nj} = ?$

余因子と逆行列 (5) 85 ページ

$$
A = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc}
a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,a} \\
\hline
a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & {\color{red} a_{i,j}} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\
\hline
a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
\end{array}\right)
$$

余因子と逆行列 (6) 85 ページ

余因子展開に関する復習:

$$
{\color{red}a_{ij}}\widetilde{a}_{ij} = \det \left(\begin{array}{ccc|c|ccc}
a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,a} \\
\hline
a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & {\color{red}a_{i,j}} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\
\hline
a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
\end{array}\right)
$$

余因子と逆行列 (7) 85 ページ

a_{ij} を a_{ip} に変えても等式は変わらないから

$$a_{ip}\widetilde{a}_{ij} = \det \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,a} \\ \hline a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,p} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ \hline a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{array} \right)$$

余因子と逆行列 (8) 85 ページ

したがって, $a_{1p}\widetilde{a}_{1j} + \cdots + a_{np}\widetilde{a}_{nj}$

$$
= \det \left(\begin{array}{ccc|c|ccc}
a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,p} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,p} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,a} \\
\hline
a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,p} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\
\hline
a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,p} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,p} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
\end{array}\right)
$$

$= 0$ 理由: $p \neq j$ より, 第 j 列は他のどれかの列と一致

余因子と逆行列 (9) 85 ページ

▷ n 次の場合の結論

- $D = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ とすると $\dfrac{1}{D} \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \cdots & \widetilde{a}_{n1} \\ & & \\ \widetilde{a}_{1n} & \cdots & \widetilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ の逆行列
- $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \cdots & \widetilde{a}_{n1} \\ & & \\ \widetilde{a}_{1n} & \cdots & \widetilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$: 余因子行列 (添字 i, j の並び方が A と逆)

文字の入った行列式 (88∼89 ページ)

- 行列に文字 (パラメータ t など) が入っている場合も, 行列の計算 (基本変形等) の相当部分は, 数の場合と同様にできる (全部ではないので注意)
- 多項式の計算のようなものと思えばよい
- 行列式についても同様
- 加算, 減算, 乗算のみを使う範囲では問題はないが除算には注意が必要 (有理式なら OK), 他, 階数や 1 次独立性の概念も変更が必要だが 1 年次の線形代数の範囲ではない

クラメルの解法 (1) (95 ページ)

- 行列 A が正方行列のとき:
  $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$: 一意解
  $\det A = 0 \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$: 不能解あるいは不定解

- 行列 A が正則な正方行列のとき, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は, これから説明する, 「クラメルの解法」と呼ばれる解法で解ける
- クラメル (Cramer) は人名
- クラメルの解法は理論的には重要だが実用的にはあまり価値がない

クラメルの解法 (2) (95 ページ)

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ が正則のとき, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一意解:

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \cdots & \widetilde{a}_{n1} \\ & & \\ \widetilde{a}_{1n} & \cdots & \widetilde{a}_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x}$ の第 j 成分: $x_j = \frac{1}{\det A}(\widetilde{a}_{1j}b_1 + \cdots + \widetilde{a}_{nj}b_n)$

$(\det A) \times x_j$	$\det A$ を第 j 列で余因子展開
$\widetilde{a}_{1j}\color{red}{b_1} + \cdots + \widetilde{a}_{nj}\color{red}{b_n}$	$\widetilde{a}_{1j}\color{red}{a_{1j}} + \cdots + \widetilde{a}_{nj}\color{red}{a_{nj}}$

クラメルの解法 (3) (95 ページ)

$(\det A) \times x_i$	$\det A$ を第 j 列で余因子展開
$\tilde{a}_{1j} b_1 + \cdots + \tilde{a}_{nj} b_n$	$\tilde{a}_{1j} a_{1j} + \cdots + \tilde{a}_{nj} a_{nj}$

$$\det \left(\begin{array}{cc|c|cc} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right) = \tilde{a}_{1j} a_{1j} + \cdots + \tilde{a}_{nj} a_{nj}$$

$$\det \left(\begin{array}{cc|c|cc} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{array} \right) = \tilde{a}_{1j} b_1 + \cdots + \tilde{a}_{nj} b_n$$

クラメルの解法 (4) (95 ページ)

▷ クラメルの公式 (解法)

- $$x_j = \frac{1}{\det A} \det \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & & j & & \phantom{a_{1n}} \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$
- 行列 A の第 j 列ベクトルを $\boldsymbol{b}$ で置き換えた行列を B_j とすると $x_j = \det B_j / \det A$
- 教科書には 2 次と 3 次の例

1 次変換と逆写像 (1) (99 ページ)

- $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は:
  単射: $\boldsymbol{x} \neq \widetilde{\boldsymbol{x}}$ なら $f(\boldsymbol{x}) \neq f(\widetilde{\boldsymbol{x}})$
  全射: すべての $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ も f による $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ の像
  全単射: 全射かつ単射

- f が全単射のとき, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ となる $\boldsymbol{x}$ を対応させる写像を f の逆写像といい, f^{-1} であらわす

- f が 1 次変換のとき,
  f が全単射 (逆写像を持つ) $\Leftrightarrow$ A が正則 $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$

1 次変換と逆写像 (2) (99 ページ)

- 1 次変換 f が全単射 (逆写像を持つ) なら
  - 逆写像 f^{-1} も 1 次変換

    (理由) $\boldsymbol{y}_1 = f(\boldsymbol{x}_1), \boldsymbol{y}_2 = f(\boldsymbol{x}_2)$ とすると, f は線形だから,

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(\alpha_1 \boldsymbol{y}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{y}_1) &= f^{-1}(\alpha_1 f(\boldsymbol{x}_1) + \alpha_2 f(\boldsymbol{x}_1)) \\
&= f^{-1}(f(\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_1)) \\
&= \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_1 \\
&= \alpha_1 f^{-1}(\boldsymbol{y}_1) + \alpha_2 f^{-1}(\boldsymbol{y}_1)
\end{aligned}
$$

  - f^{-1} の表現行列は A^{-1}

    (理由) 写像の合成は行列の積に対応するから

1 次変換と行列式 (1) (103 ページ)

- 2 次のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対し, $(0, 0)$, (a_1, a_2), (b_1, b_2), $(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ を 4 頂点とする平行四辺形を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ からできる平行四辺形という

- 上記において, $(0, 0)$ を $P(p_1, p_2)$ に平行移動してもよい (これが教科書の定義)

- $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ からできる平行四辺形の面積は $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ の絶対値

1 次変換と行列式 (2) (103 ページ)

▷ 証明:

- $\boldsymbol{a}$ の x_1 軸とのなす角を α とする角度 $-\alpha$ に対応する 1 次変換は $R(-\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ である．$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ とおく．

- $\det R(-\alpha) = 1$ だから $\det(R(\alpha)A) = \det A$, よって回転後の図形の面積が $\det(R(\alpha)A)$ の絶対値であることをいえばよい

- $R(-\alpha)\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1\cos\alpha + a_2\sin\alpha \\ a_1\cos\alpha - a_2\sin\alpha \end{pmatrix}$ だが, 第 2 成分は実は零,

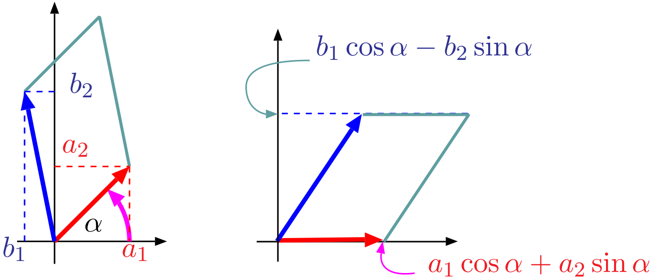
  一方, $R(-\alpha)\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1\cos\alpha + b_2\sin\alpha \\ b_1\cos\alpha - b_2\sin\alpha \end{pmatrix}$ だから,

  $|\det(R(-\alpha)A)| = |(a_1\cos\alpha + a_2\sin\alpha)(b_1\cos\alpha - b_2\sin\alpha)|$

1 次変換と行列式 (3) (103 ページ)

▷ 平行四辺形の面積に関する証明のつづき:

- 平行四辺形の面積も $\begin{array}{l}|\det(R(-\alpha)A)| \\ = |(a_1 \cos\alpha + a_2 \sin\alpha)(b_1 \cos\alpha - b_2 \sin\alpha)|\end{array}$



- 回転を使わない証明は a_1, a_2, b_1, b_2 の符号で場合分け, 面倒

1 次変換と行列式 (4) (103 ページ)

- 3 次のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ が同一平面上にないものとする
- $\boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ の先端を頂点とする図形を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ からできる平行六面体という
- 全体を平行移動してもよい (教科書の定義はこの形)

1 次変換と行列式 (5) (103 ページ)

- $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ からできる平行六面体の体積: $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ の絶対値

▷ 証明:

- 3 次元の回転は x_1 軸まわり, x_2 軸まわり, x_3 軸まわりの回転の組み合わせ, x_i 軸まわりの回転は 2 次元の回転と同じ
- まず, 回転によって $\boldsymbol{a}$ の方向を x_1 軸の方向に一致させる
- x_1 軸のまわりの回転によって, $\boldsymbol{b}$ を (x_1, x_2) 平面に入れる
- 回転行列の行列式は 1 だから, 回転後のベクトルについてこの主張を証明すればよい

1 次変換と行列式 (6) (103 ページ)

▷ 平行 6 面体の体積に関する証明のつづき:

- 回転後のベクトルは $\boldsymbol{a}' = \begin{pmatrix} a'_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c}' = \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \end{pmatrix}$ となっている (零に注意)

- $\det \begin{pmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ 0 & b'_2 & c'_2 \\ 0 & 0 & c'_3 \end{pmatrix} = a'_1 b'_2 c'_3$

- 平行六面体: 底面積は $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}'$ のつくる平行四辺形の面積, $|a'_1 b'_2|$, 高さは $|c'_3|$, よって体積は $|a'_1 b'_2 c'_3|$ で行列式の絶対値と一致

1 次変換と行列式 (7) (103 ページ)

- $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は 1 次変換
- A: f の表現行列
- P,Q は (n 次元) 体積を持つ $\mathbb{R}^n$ の図形 $f(P)=Q$

のとき, Q の体積は P の体積の $|\det A|$ 倍になる

- n 次元体積とは, 1 次元では長さ, 2 次元では面積, 3 次元では体積のこと, もっと高次元でも定義できる
- 証明は微積分の範囲なのでこの講義では取り扱わない

行列式と外積ベクトル (1) (106~107 ページ)

- $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ を x, y, z 方向をあらわす記号として,

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \boldsymbol{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \boldsymbol{e}_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} \text{あるいは}$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \text{と覚えればよい}$$

  (前半は第 2 回で既出, 後半は行列式の性質から)

- $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の順で右手系, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の長さは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のつくる平行四辺形の面積 (第 2 回で既出)

行列式と外積ベクトル (2) (107 ページ)

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を 3 次のベクトル, $M = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$ とし, これらは同一平面内にないものとする. このとき,

- $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が右手系 $\Leftrightarrow \det M > 0$
- $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が左手系 $\Leftrightarrow \det M < 0$

行列式と外積ベクトル (3) (107 ページ)

▷ 理由 (右手系, 左手系と行列式の符号): 行列式が回転によって不変であることを使う．回転によって $\boldsymbol{a}$ を x_1 軸の正の方向に一致させ，さらに $\boldsymbol{b}$ を (x_1, x_2) 平面内で x_2 の正の方向を向くようにする．回転後のベクトルを $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}'$ とすると，$\boldsymbol{a}' = \begin{pmatrix} a'_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c}' = \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \end{pmatrix}$ という形になっていて，$a'_1 > 0, b'_2 > 0$ である．右手系 (左手系) を回転しても右手系 (左手系) だから，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が右手系 $\Leftrightarrow$ $c'_3 > 0$，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が左手系 $\Leftrightarrow$ $c'_3 < 0$ である．一方，$\det M = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}' & \boldsymbol{b}' & \boldsymbol{c}' \end{pmatrix}$ より，$\det M$ の符号は $c'_3 > 0$ の符号と一致する．