電 158 電気数学 I
第 8 回
行列式

注意

- 行列式に関する教科書の説明は極めて不十分なのでいろいろ追加説明をする
- 追加説明の部分を理解できなくても単位は取れるはず

行列式の定義 (1) 77 ページ

- 行列式は n 次の正方行列に対して定義される (n は任意)
- $\det A$ あるいは $|A|$ と書く
- 1 行 1 列の行列 (a_{11}) の行列式は a_{11} そのもの

行列式の定義 (2 次の場合) (1) 77 ページ

- 2 行 2 列の行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の行列式は $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,
  - 行列の要素を $\times$ の形で掛ける
  - 左上から右下: $+$, 右上から左下: $-$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{array}{cccc} & (-1)^0 & \times & \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & \\ \hline & a_{22} \end{array}\right) \\ + & (-1)^1 & \times & \left(\begin{array}{c|c} & a_{12} \\ \hline a_{21} & \end{array}\right) \end{array}$$

行列式の定義 (2 次の場合) (2) 77 ページ

▷ 抽象的な定義 (こちらが正式)

- 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の 1 行目から順に要素を 1 個ずつ選んで積を作る; ただしひとつの列からは要素は 1 個しか選べないものとする

- 積を作ったら, 全体に $+$ か $-$ の符号をつける, 符号の付け方の規則は後述

- これら全体を足し合わせる

行列式の定義 (2 次の場合) (3) 77 ページ

1 行目 $\left(\begin{array}{cc} \color{red}{a_{11}} & \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array}\right)$	1 行目 $\left(\begin{array}{cc} & \color{blue}{a_{12}} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array}\right)$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
2 行目 $\left(\begin{array}{cc} \color{red}{a_{11}} & \\ \hline \times & \color{red}{a_{22}} \end{array}\right)$	2 行目 $\left(\begin{array}{cc} & \color{blue}{a_{12}} \\ \hline \color{blue}{a_{21}} & \times \end{array}\right)$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$\color{red}{a_{11}a_{22}}$	$\color{blue}{a_{21}a_{12}}$

行列式の定義 (2 次の場合) (3) 77 ページ

▷ 符号付けの規則

- 積の項に関係するすべての要素のあいだを直線で結ぶ
  - 項 $a_{11}a_{22}$ については a_{11} と a_{22}
  - 項 $a_{21}a_{12}$ については a_{12} と a_{12}
- 右上がりの直線の数を数える
- 右上がりの直線が偶数個 (0 は偶数とする) なら符号は $+$, 奇数個なら符号は $-$

行列式の定義 (2 次の場合) (3) 77 ページ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \\ & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} & a_{12} \\ a_{21} & \end{vmatrix}$$

右上がり 0 個	右上がり 1 個
$+a_{11}a_{22}$	$a_{12}a_{21}$

よって, $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = +a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

行列式の定義 (2 次の場合) (4) 77 ページ

- 行列式は「置換」という概念を使って定義するのが一般的
- 置換については説明に時間がかかるのでこの講義では触れない
- 今述べた定義は置換を使った定義と等価, 出典は G. Shilov, Linear Algebra, Prentice-Hall, 1971

行列式の定義 (3 次の場合) (1) 77 ページ

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} \\ &-a_{11}a_{23}a_{32} \\ &-a_{21}a_{12}a_{33} \\ &+a_{21}a_{13}a_{32} \\ &+a_{31}a_{12}a_{23} \\ &-a_{31}a_{13}a_{22} \end{aligned}$$

$$(-1)^0 \times \begin{pmatrix} a_{11} & \\ & \boxed{\begin{matrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$+ \ (-1)^1 \times \begin{pmatrix} & \boxed{\begin{matrix} a_{12} & a_{13} \end{matrix}} \\ a_{21} & \\ & \boxed{\begin{matrix} a_{32} & a_{33} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$+ \ (-1)^2 \times \begin{pmatrix} & \boxed{\begin{matrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{matrix}} \\ a_{31} & \end{pmatrix}$$

行列式の定義 (3 次の場合) (2) 77 ページ

「サラスの公式」: 斜めに要素を 3 個選んで掛け, 足し合わせる, 左上から右下: +, 右上から左下: −

$$
\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & a_{13} \\ a_{21} & & \\ & a_{32} & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & a_{12} & \\ & & a_{23} \\ a_{31} & & \end{pmatrix}
$$

$$
- \begin{pmatrix} & & a_{13} \\ & a_{22} & \\ a_{31} & & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & a_{12} & \\ a_{21} & & \\ & & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & & a_{23} \\ & a_{32} & \end{pmatrix}
$$

行列式の定義 (3 次の場合) (3) 77 ページ

▷ 抽象的な定義 (こちらが正式)

- 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の 1 行目から順に要素を 1 個ずつ選んで積を作る; ただしひとつの列からは要素は 1 個しか選べないものとする
- 積を作ったら, 全体に $+$ か $-$ の符号をつける (規則は 2 次と同じ)
- これら全体を足し合わせる

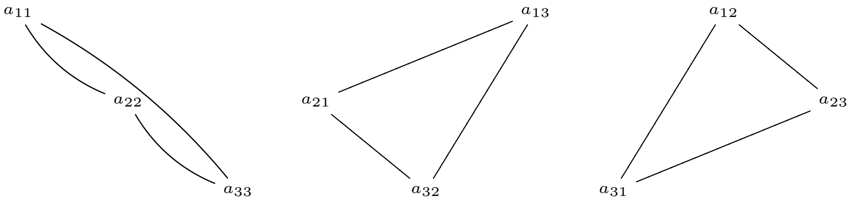
行列式の定義 (3 次の場合) (3) 77 ページ

▷ 符号付けの規則

- 積の項に関係するすべての要素のあいだを直線で結ぶ
  - 項 $a_{11}a_{22}a_{33}$ については a_{11} と a_{22}, a_{11} と a_{33}, a_{23} と a_{33}
  - 項 $a_{21}a_{12}a_{33}$ については a_{21} と a_{12}, a_{21} と a_{33}, a_{12} と a_{33}
  - 以下同じ
- 右上がりの直線の数を数える
- 右上がりの直線が偶数個なら符号は $+$, 奇数個なら符号は $-$

行列式の定義 (3 次の場合) (4) 77 ページ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & & a_{13} \\ a_{21} & & \\ & a_{32} & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & a_{12} & \\ & & a_{23} \\ a_{31} & & \end{pmatrix}$$

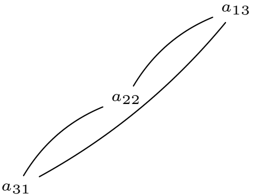


右上がり 0   右上がり 2   右上がり 2

$+$ $+$ $+$

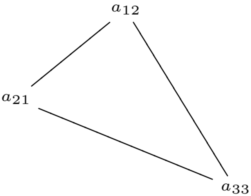
行列式の定義 (3 次の場合) (5) 77 ページ

$$\begin{pmatrix} & & a_{13} \\ & a_{22} & \\ a_{31} & & \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} & a_{12} & \\ a_{21} & & \\ & & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & & a_{23} \\ & a_{32} & \end{pmatrix}$$



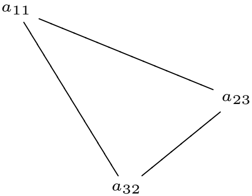
右上がり 3

$-$



右上がり 1

$-$



右上がり 1

$-$

行列式の定義 (n 次の場合) (1) 77 ページ

教科書に (ry

- 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ の 1 行目から順に要素を 1 個ずつ選んで積を作る; ただしひとつの列からは要素は 1 個しか選べないものとする

- 積を作ったら, 関係するすべての要素のあいだを直線で結び, 右上がりの直線が偶数個なら $+$, 奇数個なら $-$ の符号を付ける

- これら全体を足し合わせる

行列式の定義 (n 次の場合) (2) 77ページ

▷ n 次行列の行列式の計算に必要な項の数は?

上の行から順に要素を選ぶ
ある列から要素を選ぶと, その列はもう選べない

第1行からの要素の選び方は n 通り

第2行からの要素の選び方は $n-1$ 通り (重複不可だから)

第3行からの要素の選び方は $n-2$ 通り (重複不可だから)

. . . .

第 n 行からの要素の選び方は1通り (1個しか残っていない)

結論	$n!$ 個の項に符号をつけて足し合わせる 個々の項は行列の要素 n 個の積

行列式の定義 (n 次の場合) (3) 77 ページ

▷ n 次行列の行列式の計算に必要な項の数は? (つづき)

- 定義にしたがって行列式を計算すると計算の量は膨大
- 行基本変形などにより計算の量を大幅に減らせる
- 線形代数が応用される現場では, 行列の大きさが万単位であることも多い
- こういう場合, 手計算は無理; コンピュータを使う

n	$n!$
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800

行列式の性質 (1) (78 ページ)

- 教科書には証明がないが, 講義では完全な証明を付ける
- 証明は理解できなくても問題ない
- いくつか教科書に記載されていない事項も述べる

行列式の性質 (2) (78 ページ)

A を n 次行列, A^T をその転置行列とすると, $\det A = \det A^T$

- 考え方は n 次でも 2 次と同じ, 2 次で説明: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

A の各行から要素を (列の重複なく) 選ぶ	A の各列から要素を (列の重複なく) 選ぶ	A^T の各行から要素 (列の重複なく) 選
a_{12}	a_{12}	a_{21}
a_{21}	a_{21}	a_{12}

- 要素間に引いた線の傾きは変わらないから, A と A^T の行列式の計算に出てくるすべての項の符号は一致する; A^T では A の要素が転置されているだけで, 個々の要素の値は変わらないから, $\det A = \det A^T$

行列式の性質 (3) (78 ページ)

▷ **先の議論の副産物** 行列式の定義は,

- 行から要素を (列の重複なく) 選び,「要素間の線の傾き」に対応する符号を掛けて合計する
- 列から要素を (行の重複なく) 選び,「要素間の線の傾き」に対応する符号を掛けて合計する

のどちらでもよい (結果は一致する)

行列式の性質 (4) (78 ページ)

行列の第 i 行と第 j 行を入れ換えると符号が反転する

5 行 5 列の行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

行列 A から $\det A$ を計算するための項を選ぶ

$$\begin{pmatrix} & a_{12} & & & \\ & & {\color{red}a_{23}} & & \\ & & & & a_{35} \\ {\color{blue}a_{41}} & & & & \\ & & & a_{54} & \end{pmatrix}$$

2 行目と 4 行目を入れ換え

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

行列 A' から対応する項を選ぶ

$$\begin{pmatrix} & a_{12} & & & \\ {\color{blue}a_{41}} & & & & \\ & & & & a_{35} \\ & & {\color{red}a_{23}} & & \\ & & & a_{54} & \end{pmatrix}$$

符号 $\times a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{54}$ の形, 符号が違うかどうかが問題

行列式の性質 (5) (78 ページ)

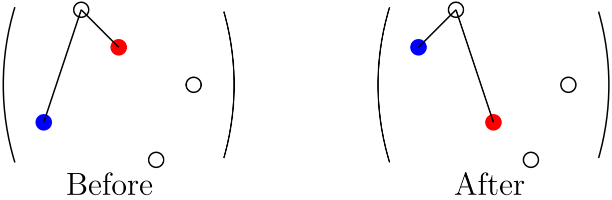
図を見易くするため, a_{ij} を $\circ$ で置き換えた図を描く

$$
\begin{pmatrix}
 & a_{12} & & & \\
 & & a_{23} & & \\
 & & & & a_{35} \\
a_{41} & & & & \\
 & & a_{53} & &
\end{pmatrix}
\qquad
\begin{pmatrix}
 & a_{12} & & & \\
a_{41} & & & & \\
 & & & & a_{35} \\
 & & a_{23} & & \\
 & & a_{53} & &
\end{pmatrix}
$$

$$
\text{Before}
\begin{pmatrix}
 & \circ & & & \\
 & & \bullet & & \\
 & & & & \circ \\
\bullet & & & & \\
 & & \circ & &
\end{pmatrix}
\qquad
\text{After}
\begin{pmatrix}
 & \circ & & & \\
\bullet & & & & \\
 & & & & \circ \\
 & & \bullet & & \\
 & & \circ & &
\end{pmatrix}
$$

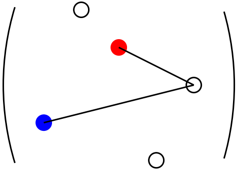
行列式の性質 (6) (78 ページ)

- 交換された行の上から 2 行, 4 行目の要素に線を引いても右上がりの線の数は不変

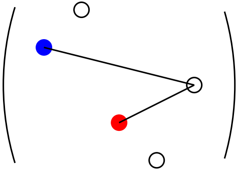


行列式の性質 (7) (78 ページ)

- 交換された行のあいだから 2 行, 4 行目の要素に線を引いても右上がりの線の数は不変



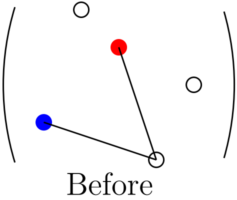
Before

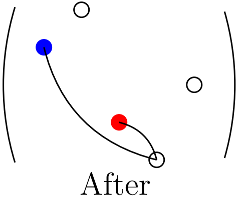


After

行列式の性質 (8) (78 ページ)

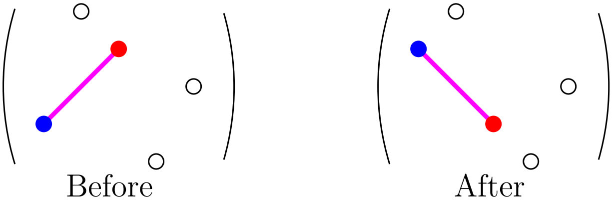
- 交換された行の下から 2 行, 4 行目の要素に線を引いても右上がりの線の数は不変





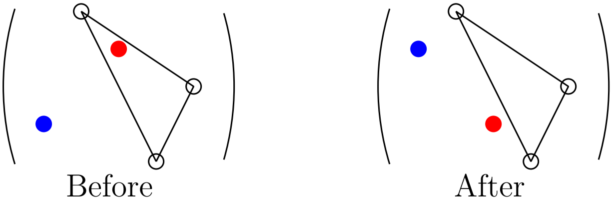
行列式の性質 (9) (78 ページ)

- 交換された行どうしの線の傾きは反転する



行列式の性質 (10) (78 ページ)

- 交換と関係がない要素のあいだの線は不変



行列式の性質 (11) (78 ページ)

▷ ここまでの結論

5 行 5 列の行列の第 2 行と第 4 行を入れ換えると, 行列式を計算するときに出てくるすべての項に掛ける $\pm$ の符号が一斉に反転する

行列式の性質 (12) (78 ページ)

- n 次行列 A から行列式を計算するのに必要な項を選ぶ
- A の第 i 列と第 j 列 $(i < j)$ を入れ換えた行列 A' から対応する項を選ぶ
- 符号を計算するためには
  - i 行より上の行の要素から i 行と j 行の要素に引いた線
  - i 行と j 行の間の要素から i 行と j 行の要素に引いた線
  - j 行より下の行の要素から i 行と j 行の要素に引いた線
  - i 行と j 行の要素の間の線
  - i 行, j 行と無関係な要素間の線

  の傾きを考えればよい
- 5 行 5 列で第 2 行と第 4 行を入れ換えたときの議論は, すべての可能性を網羅している

行列式の性質 (13) (78 ページ)

▷ 結論

n 次行列の第 i 行と第 j 行を入れ換えると行列式を計算するときに出てくるすべての項に掛ける $\pm$ の符号が一斉に反転する; したがって行列式の符号も反転する

行列式の性質 (14) (78 ページ)

講義第 6 回で出た
基本行列 II:
左から掛けると第 i 行と第 j 行の入れ換え,
右から掛けると第 i 列と第 j 列の入れ換え
行列式は?

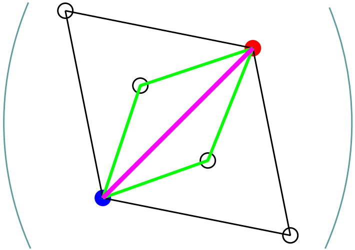
$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ i) \\ \\ j) \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 0 & & 1 & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & 1 & & 0 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

- 積が零にならない要素の選び方は 1 通りしかないから, 行列式は ± 1, 符号が問題

行列式の性質 (15) (78 ページ)

6 次, 2 行目と 5 行目の入れ換えの場合, 右上がりの直線は奇数

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



- 2 行 5 列目と 5 行 2 列目の「1」(入れ換え行) 以外では, 右上がりの直線は対になって発生する
- 2 行 5 列目と 5 行 2 列目の「1」(入れ換え行) には 1 本の右上がりの直線

行列式の性質 (16) (78 ページ)

- 一般の次元でも議論はまったく同じ
- 行列の第 i 行と第 j 行を入れ換えると符号が反転する
- 基本行列 II (i 番目と j 番目の行 (列) の入れ換え) の行列式は -1
- U を基本行列 II とすると, $\det UA = \det U \det A$
- 列基本変形についても同様に, $\det AU = \det A \det U$
- 行列の第 i 列と第 j 列を入れ換えると符号が反転する

行列式の性質 (17) (78 ページ)

- 行列 A を列ベクトル $\boldsymbol{a}_j$ を横に並べたものと見たとき, 以下が成り立つ

$$
\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{a}'_j & \boldsymbol{a}_{j+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \\
&\quad = \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \boldsymbol{a}_j & \boldsymbol{a}_{j+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \\
&\quad + \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \boldsymbol{a}'_j & \boldsymbol{a}_{j+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- どの列についても同じ性質が言える

行列式の性質 (18) (78ページ)

- 2次の場合について理由を示す(一般の場合も同じこと)

$$
\det\begin{pmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12} \\ a_{21}+a'_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+a'_{11} & \\ & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & a_{12} \\ a_{21}+a'_{21} & \end{pmatrix}
$$

$$
\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \\ & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & a_{12} \\ a_{21} & \end{pmatrix}
$$

$$
\det\begin{pmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & \\ & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & a_{12} \\ a'_{21} & \end{pmatrix}
$$

行列式の性質 (19) (78 ページ)

- 行列 A を行ベクトル $\boldsymbol{\alpha}_i$ を縦に並べたものと見たとき, 以下が成り立つ (理由は列ベクトルのときと同じ)

$$\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_{j-1} \\ \boldsymbol{\alpha}_j + \boldsymbol{\alpha}'_j \\ \boldsymbol{\alpha}_{j+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_{j-1} \\ \boldsymbol{\alpha}_j \\ \boldsymbol{\alpha}_{j+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_{j-1} \\ \boldsymbol{\alpha}'_j \\ \boldsymbol{\alpha}_{j+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix}$$

行列式の性質 (20) (78 ページ)

- 行列 A を列ベクトル $\boldsymbol{a}_j$ を横に並べたものと見たとき, 以下が成り立つ

$$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{j-1} & k\boldsymbol{a}_j & \boldsymbol{a}_{j+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix} = k\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \boldsymbol{a}_j & \boldsymbol{a}_{j+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}$$

- どの列についても同じ性質が言える

行列式の性質 (22) (78 ページ)

- 2 次の場合について理由を示す (一般の場合も同じこと)

$$
\det\begin{pmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & \\ & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & a_{12} \\ ka_{21} & \end{pmatrix}
$$

$$
= k\begin{pmatrix} a_{11} & \\ & a_{22} \end{pmatrix} - k\begin{pmatrix} & a_{12} \\ a_{21} & \end{pmatrix}
$$

$$
= k\left(\begin{pmatrix} a_{11} & \\ & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & a_{12} \\ a_{21} & \end{pmatrix}\right)
$$

$$
= k\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}
$$

行列式の性質 (23) (78 ページ)

- 行列 A を行ベクトル $\boldsymbol{\alpha}_i$ を縦に並べたものと見たとき, 以下が成り立つ (理由は列ベクトルのときと同じ)

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_{j-1} \\ k\boldsymbol{\alpha}_j \\ \boldsymbol{\alpha}_{j+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix} = k \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_{j-1} \\ \boldsymbol{\alpha}_j \\ \boldsymbol{\alpha}_{j+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix}$$

行列式の性質 (24) (78 ページ)

講義第 6 回で出た
基本行列 I:
基本行列 I を左から掛けると第 i 行が k 倍,
右から掛けると第 i 列が k 倍
行列式は?

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} \\
i) & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

- 行列式の定義にしたがって各行から要素を選ぶと, 積が非零なのは対角線上の要素を選んだ場合のみ, 要素間を線で結ぶと右上がりの直線なし

行列式の性質 (25) (78ページ)

- 基本行列 I の行列式は k
- U を基本行列 I とすると, $\det UA = \det U \det A$
- 列基本変形についても同様に, $\det AU = \det A \det U$

行列式の性質 (26) (78 ページ)

- A が n 次の行列なら $\det kA = k^n \det A$
  (理由) すべての行 (列) が k 倍されているから
- A のある行が他の行の定数倍なら $\det A = 0$
  (理由)

$$
k \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha \\ \vdots \\ \alpha \\ \vdots \end{pmatrix}
\underset{\text{下を } k \text{ 倍}}{=} \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha \\ \vdots \\ k\alpha \\ \vdots \end{pmatrix}
\underset{\text{上下入換}}{=} -\det \begin{pmatrix} \vdots \\ k\alpha \\ \vdots \\ \alpha \\ \vdots \end{pmatrix}
\underset{k \text{ を外へ}}{=} -k \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha \\ \vdots \\ \alpha \\ \vdots \end{pmatrix}
$$

行列式の性質 (27) (78ページ)

- ある行の要素がすべて零の行列の行列式は零
- A のある列が他の列の定数倍なら $\det A = 0$
  (理由) $\det A = \det A^T$ より
- ある列の要素がすべて零の行列の行列式は零

行列式の性質 (28) (78 ページ)

- A のある行に他の行の定数倍を加えても行列式は不変

(理由) $$\det\begin{pmatrix}\vdots\\ \alpha\\ \vdots\\ k\alpha+\beta\\ \vdots\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\vdots\\ \alpha\\ \vdots\\ k\alpha\\ \vdots\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}\vdots\\ \alpha\\ \vdots\\ \beta\\ \vdots\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\vdots\\ \alpha\\ \vdots\\ \beta\\ \vdots\end{pmatrix}$$

- A のある列に他の列の定数倍を加えても行列式は不変

(理由) 転置行列を考えればよい

行列式の性質 (29) (78 ページ)

講義第 6 回で出た
基本行列 III:
左から掛けると第 j 行に第 i 行の k 倍を加え, 右から掛けると第 i 列に第 j 列の k 倍を加える
行列式は?

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ i) \\ \\ j) \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & k & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

- 行列式の定義通り各行から要素を選ぶと対角線上の要素を選んだ場合のみ積は非零, 要素間を線で結ぶと右上がりの直線なし

行列式の性質 (30) (78 ページ)

- 基本行列 III の行列式は 1
- U を基本行列 III とすると, $\det UA = \det U \det A$
- 列基本変形についても同様に, $\det AU = \det A \det U$

行列式の性質 (31) (78 ページ)

- A が正則なら $\det A \neq 0$
(理由) 前回の講義で，A が正則なら行基本変形によって A を単位行列に変形できることを見た ($U_N \cdots U_1 A = I$); よって $\det U_N \cdots \det U_1 \det A = 1$, 基本行列の行列式は零でないから $\det A \neq 0$

- $\det AB = \det A \det B$
(理由) 前回の講義で正則行列は基本行列の積であることを見たから, A, B がともに正則であるときの証明はすでにできている; B が正則でないときには $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は自明でない解を持つから $AB\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は自明でない解を持ち, よって $\det AB = 0$, A が正則でないときには $(AB)^T = B^T A^T$ について同様に考えればよい

行列式の性質 (32) (78 ページ)

- $$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

  理由: 行列式の定義にしたがって各列から要素を選ぶとき, 第 1 列から選べる零でない要素は a_{11} だけで, a_{11} とその下段の要素を結ぶ直線はすべて右下がりだから符号には寄与しない.

行列式の性質 (32) (78 ページ)

- $$\det\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ 0 & a_{22} & & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$ 理由: 行列式の定義にしたがって各列から要素を選ぶとき, 第 1 列から選べる零でない要素は a_{11} だけ, 第 2 列から選べる, 未選択の行の中の零でない要素は a_{22} だけ, 以下同様.

余因子展開 (1) (81 ページ)

- n 次行列 A から第 i 行と第 j 列を取り除くと $n-1$ 次の行列ができる
- この行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ をかけたものを A の (i,j) 余因子, あるいは a_{ij} の余因子といい, $\tilde{a}_{ij}$ であらわす

余因子展開 (2) (81 ページ)

$$
A = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc}
a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,a} \\
\hline
a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\
\hline
a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
\end{array}\right)
$$

余因子展開 (3) (81 ページ)

$$\widetilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,a} \\ \hline a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{array} \right)$$

余因子展開 (4) (81 ページ)

- トランプのカード $\boxed{\mathrm{A}}$,$\boxed{2}$,$\boxed{3}$,$\boxed{4}$,$\boxed{5}$が並んでいたものとする
- 隣のカードとの入れ換えだけで$\boxed{5}$,$\boxed{\mathrm{A}}$,$\boxed{2}$,$\boxed{3}$,$\boxed{4}$に並び換えるのに必要な工程数は 4

A	2	3	4	5	初期状態
A	2	3	5	4	1 回目
A	2	5	3	4	2 回目
A	5	2	3	4	3 回目
5	A	2	3	4	4 回目

余因子展開 (4) (81 ページ)

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{21} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{31} \end{pmatrix}$
- $\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

余因子展開 (4) (81 ページ)

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\widetilde{a}_{11}$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (-1)\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= a_{21} \times (-1)\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{21}\widetilde{a}_{21}$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (-1)\det\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = (-1)^2\det\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$= a_{31} \times (-1)^2\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = a_{31}\widetilde{a}_{31}$$

- 余因子の定義の $(-1)^{i+j}$ は上記の行の入れ換えに対応
- 行列の大きさがどれだけ大きくてもやることは同じ

余因子展開 (5) (81 ページ)

- 第 1 列に関する展開: $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\widetilde{a}_{i1}$
- 第 1 行に関する展開: $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\widetilde{a}_{1j}$

余因子展開 (6) (81 ページ)

▷ 第 j 列に関する展開

$$
\det \begin{pmatrix} & a_{1,j} & \\ & a_{2,j} & \\ & a_{3,j} & \\ & \vdots & \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} & a_{1,j} & \\ & 0 & \\ & 0 & \\ & \vdots & \end{pmatrix}
$$

$$
+ \det \begin{pmatrix} & 0 & \\ & a_{2,j} & \\ & 0 & \\ & \vdots & \end{pmatrix} + \cdots
$$

余因子展開 (7) (81 ページ)

$$\det\left(\begin{array}{ccc|c|ccc}
a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,a} \\
\hline
a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & {\color{red}a_{i,j}} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\
\hline
a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
\end{array}\right)$$

余因子展開 (7) (81 ページ)

$$
= (-1)^{j-1} \det \left(\begin{array}{c|ccc|ccc}
0 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,a} \\
\hline
{\color{red} a_{i,j}} & a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\
\hline
0 & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
\end{array} \right)
$$

余因子展開 (7) (81 ページ)

$$= (-1)^{(j-1)+(i-1)} \times \qquad \boxed{\text{注意:}}\ (-1)^{i+j-2} = (-1)^{i+j}$$

$$\det \left(\begin{array}{c|ccc|ccc}
\color{red}{a_{i,j}} & a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ \hline
0 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,a} \\ \hline
0 & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
\end{array} \right)$$

余因子展開 (7) (81 ページ)

$$
= {\color{red}a_{i,j}} \times
$$

$$
\det \left(\begin{array}{c|ccc|cc}
a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,a} \\
\hline
a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
\end{array} \right)
$$

$$
= {\color{red}a_{i,j}} \widetilde{a}_{i,j}
$$

余因子展開 (8) (81 ページ)

- 第 j 列に関する展開: $\det A = \sum_{p=1}^{n} a_{pj}\widetilde{a}_{pj}$
- 第 i 行に関する展開: $\det A = \sum_{q=1}^{n} a_{iq}\widetilde{a}_{iq}$