電 158 電気数学 I
第 7 回
連立 1 次方程式 (2)

電 158 電気数学 I 2013 年度前学期 琉球大学工学部電気電子工学科 (夜間主コース) 担当: 半場

不定解と不能解 (1) (65 ページ)

- 解から見た連立 1 次方程式の分類:
  - 解がない... 不能解, 例: $\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$
  - 解が唯一... 一意解
  - 解が複数 (無限個) ... 不定解, 例: $x + y = 1$
- 係数行列が正方行列の場合にも不能解や不定解が発生することがある
- 掃き出し法により不能解や不定解の判定ができる

不定解と不能解 (2) (65ページ)

- $$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_1 \end{cases}$$
- 掃き出し法が「これ以上進まない」状況をいくつか考える
- 掃き出しの終了条件: 最終列を除き, 拡大係数行列の下側が零ばかりになったら終了

不定解と不能解 (3) (65 ページ)

i) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 & \beta_2 \end{array}\right)$ (一意解)

ii) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x + \alpha_1 y = \beta_1 \\ 0y = 0 \end{cases},$

y は何でもよい (不定解), 直線の方程式

iii) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & 0 & \beta_2 \end{array}\right), \beta_2 \neq 0 \Longrightarrow \begin{cases} x + \alpha_1 y = \beta_1 \\ 0y = \beta_2 \end{cases},$

解がない (不能解)

不定解と不能解 (4) (65 ページ)

iv) $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \beta_1 \\ 0 & 0 & \beta_2 \end{array}\right)$, $\beta_2 \neq 0 \Longrightarrow \begin{cases} y = \beta_1 \\ 0 = \beta_2 \end{cases}$, 解がない (不能解)

v) $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} y = \beta_1 \\ 0 = 0 \end{cases}$,

x は何でもよい (不定解), 直線の方程式

vi) $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 0 & \beta_2 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} 0 = \beta_1 \\ 0 = \beta_2 \end{cases}$,

$\beta_1 = \beta_2 = 0$ なら x, y は何でもよい (不定解), 解は平面全体

$\beta_1 \neq 0$ あるいは $\beta_2 \neq 0$ のときは解がない (不能解)

不定解と不能解 (5) (65 ページ)

- 掃き出し法が「これ以上進まない」ときの拡大係数行列の形から, 一意解, 不定解, 不能解の判定ができる
- 値が「何でもよい」パラメータを自由定数という (自由定数は 1 個とは限らない);
- 教科書では自由定数の記号を t としているが, これは本質的でない

不定解と不能解 (6) (65 ページ)

- 次元が高いとき, 変数の数と式の数が異なるときも考え方は同じ, 教科書には係数行列が 3 行 3 列の場合
- 不定解は

2 変数のとき 直線あるいは平面全体,

3 変数のとき 直線, 空間内の平面あるいは空間全体

次元がもっと高い場合も同様 (超平面という言葉を使う)
教科書にないので (ry

行列の階数と連立 1 次方程式 (1) (68 ページ)

- 掃き出し法が終わったときの拡大係数行列 (2 行 3 列) の状態:
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 & \beta_2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & 0 & \beta_2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \beta_1 \\ 0 & 0 & \beta_2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 0 & \beta_2 \end{array}\right)$$

- $\alpha_1, \beta_1, \beta_2$ を記号 $*$ で置き換えてみると:
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c} 1 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \end{array}\right)$$

- 最初のものだけ 1 段階前に戻すと:
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c} 1 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \end{array}\right)$$

行列の階数と連立 1 次方程式 (2) (68 ページ)

- 変形後に拡大係数行列が取るパターンは以下の 4 種類:
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c} 1 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \end{array}\right)$$
- 当面, 縦線の左の部分のみ考える
- 縦線の左側: 階段行列

行列の階数と連立1次方程式 (3) (68ページ)

▷ 階段行列とは

- 行を右に動いてゆくと, 以下のパターンのどれかになる:

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{i)} & 1 & * & & \cdots & & & * \\
\text{ii)} & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\
\text{iii)} & 0 & & \cdots & & & 0 & 1 \\
\text{iv)} & 0 & & & \cdots & & & 0
\end{array}
$$

- 1の左はすべて零, 1の右側は任意, 1を含まない行はすべて零だけ, 行列全体を見ると1の系列は右斜め下に進む (真下不可) (教科書の説明と式は正確でないので注意)

掃き出し法と階段行列 (1) (69 ページ)

▷ 行列は行基本変形によって階段行列に変形できる

(証明) 行の数に関する帰納法による.

▷**1 行の行列** はじめから「階段行列」なので証明不要

▷$\boldsymbol{m}$ **の行列**

- 行の数が $m-1$ まで主張は正しいものする
- A を m 行 n 列の行列とする

掃き出し法と階段行列 (2) (69 ページ)

A の列を左から順に調べ, 第 j 列に初めて零でない要素が含まれていたものとし ($j=1$ なら左端の零のみのブロックは無い), j 列の零でない要素をひとつ選ぶ (a_{ij} とする); 他の数値 ($*$) は任意

$$
\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{ccccccc} & & & j & & & \end{array} \\
i) & \begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\
\vdots & & \vdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & a_{ij} & * & \cdots & * \\
\vdots & & \vdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & *
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

掃き出し法と階段行列 (3) (69 ページ)

行基本変形により第 i と第 1 行を入れ換える

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} & & & j & & & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & a_{ij} & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\
\vdots & & \vdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & *
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

掃き出し法と階段行列 (4) (69 ページ)

第 1 行を $a_{ij}(\neq 0)$ で割る

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} & & & j & & & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\
\vdots & & \vdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & *
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

掃き出し法と階段行列 (5) (69 ページ)

　第 2 行以降に第 1 行の定数倍 ($*$ の数値に -1 をかけたもの) を加える (零のときは何もしない)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & \overbrace{}^{j} & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} \end{array}$$

掃き出し法と階段行列 (6) (69 ページ)

- 2 行目以降, 第 1 列から第 j 列まではすべて零, 行基本変形して零のまま

- 第 1 行を除いた行列を行基本変形によって階段行列に変形すれば終了 (帰納法の仮定からこれは可能)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & j & & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right) \end{array}$$

階数 (ランク) (69 ページ)

- 行列 A を階段行列に変形したとき, 零でない行の数を, 行列 A の階数 (ランク) といい, $\mathrm{rank}A$ という記号であらわす
- 行列 A の階数は階段行列に変形する手順によらず決まる (理由: 1 次独立な行ベクトルの本数になっているから (詳しくは第 7 章))

連立１次方程式の解の判別 (1) (69 ページ)

教科書には 3 変数の場合しか書かれていないので注意

- n 変数の連立１次方程式の係数行列を A, 拡大係数行列を B とする
- $\mathrm{rank}A < \mathrm{rank}B$ なら不能解
- $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}B = n$ なら一意解
- $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}B < n$ なら不定解

連立１次方程式の解の判別 (2) (69 ページ)

- A が２行２列で, 行基本変形が終わった状態を考える
- $*$ は任意の数値, $\color{red}{\bigstar}$ は零でない数値とする
- $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c} 1 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \end{array}\right)$
  の４種類のパターンを思い出す

連立１次方程式の解の判別 (3) (69 ページ)

- $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \end{array}\right)$ のとき: 方程式は $\left\{\begin{array}{rcl} x+\boxed{*}\,y & = & \boxed{*} \\ y & = & \boxed{*} \end{array}\right.$, 一意解

$$A=\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{rank}A=2,\ B=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \end{array}\right), \mathrm{rank}B=2$$

連立１次方程式の解の判別 (4) (69 ページ)

- $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & * & * \\ 0 & 0 & \bigstar \end{array}\right)$ のとき: 方程式は $\begin{cases} x + \boxed{*}\, y = \boxed{*} \\ 0 = \bigstar \end{cases}$, 不能解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{rank} A = 1,\ B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & * & * \\ 0 & 0 & \bigstar \end{array}\right), \mathrm{rank} B = 2$$

- $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ のとき: 方程式は $\begin{cases} x + \boxed{*}\, y = \boxed{*} \\ 0 = 0 \end{cases}$ 不定解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{rank} A = 1,\ B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \mathrm{rank} B = 1$$

連立１次方程式の解の判別 (5) (69 ページ)

- $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & \bigstar \end{array}\right)$ のとき: 方程式は $\begin{cases} y = \boxed{*} \\ 0 = \bigstar \end{cases}$, 不能解

  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{rank}A = 1$, $B = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & \bigstar \end{array}\right)$, $\mathrm{rank}B = 2$

- $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ のとき: 方程式は $\begin{cases} y = \boxed{*} \\ 0 = 0 \end{cases}$, 不定解

  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{rank}A = 1$, $B = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, $\mathrm{rank}B = 1$

連立1次方程式の解の判別 (6) (69 ページ)

- $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & \bigstar \end{array}\right)$ または $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \bigstar \\ 0 & 0 & * \end{array}\right)$:
  方程式は $0 = \bigstar$ を含むので不能解
  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{rank}A = 0,$
  $B = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \bigstar \\ 0 & 0 & * \end{array}\right)$ または $B = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & \bigstar \end{array}\right)$, $\mathrm{rank}B = 1$

- $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ のとき: 方程式なし, 不定解,
  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{rank}A = 0,\ B = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \mathrm{rank}B = 0$

逆行列と連立１次方程式 (1) (72 ページ)

正方行列 A に対し, $(A|I)$ が行基本変形によって $(I|X)$ の形に変形できたとする．このとき, A は正則で, X は A の逆行列である.

▷ 証明の概略

i) 行基本変形とは基本行列を左から掛けることであった
ii) 基本行列 U_1 を $(A|I)$ に左から掛けると $(U_1A|U_1)$ となる
iii) N 回行基本変形を続けることは, $U_1, \ldots, U_N$ を $(A|I)$ に左から順に掛けることに対応
iv) $(U_N \cdots U_1A|U_N \cdots U_1) = (I|X)$ となっているから $X = U_N \cdots U_1$
$XA = I$, よって X は A の逆行列

逆行列と連立 1 次方程式 (2) (72 ページ)

> 逆もいえる: 正方行列 A に対し, A が正則なら, $(A|I)$ は行基本変形によって $(I|X)$ の形に変形できる

▷ 証明の概略

i) A を n 次とし, これを行基本変形の系列 $U = U_N \cdots U_1$ によって階段行列に変形したものとする

ii) UA(階段行列) の下側に零だけの行があるか否かで場合分けする (零行なし) $UA = I$ だから $U(A|I) = (I|U)$ となっている (零行あり) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の拡大係数行列は $B = (A|\boldsymbol{0})$, UA の下段に零のみの行があるから $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}B < n$, 不定解一方, A が正則なら $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は一意解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を持つので矛盾

逆行列と連立１次方程式 (2) (72 ページ)

先の結果と, 前回の講義で見た, 基本行列の逆行列が基本行列であるという事実を使うと, 以下がいえる:

$$\boxed{\text{正則行列は基本行列の積である}}$$

逆行列と連立1次方程式 (3) (72ページ)

- 行列 A が正則なときには, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ によって得られる
- コンピュータで数値計算をするときには, 逆行列を使わないようにすることが多い