電158 電気数学I
第6回
連立1次方程式 (1)

連立１次方程式と行列 (1) (58 ページ)

- いろいろな連立１次方程式: 教科書に記述がないので注意

変数の数	式の数	
2	2	$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$
2	1	$\{a_{11}x + a_{12}y = b_1$
2	3	$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y = b_3 \end{cases}$

- 3 番目のように, 変数より式の方が多い場合もある

連立1次方程式と行列 (2) (58 ページ)

- 高校で出てくる連立方程式:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\
a_{21}x + a_{22}y &= b_2
\end{aligned}
$$

- 平面上の直線の方程式

$$
a_{11}x + a_{12}y = b_1
$$

連立１次方程式と行列 (3) (58 ページ)

変数の数	式の数	
3	3	$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$
3	2	$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \end{cases}$
3	1	$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \end{cases}$

連立１次方程式と行列 (4) (58 ページ)

- 教科書 58 ページの式: $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$
- 空間内の直線の方程式: $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \end{cases}$
- 空間内の平面の方程式: $a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$
- これらは統一的に取り扱えるが, 理解しやすい, 式と変数の数が同じ場合から始める

連立1次方程式と行列 (5) (58ページ)

- 教科書58ページの式: $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$

- 係数行列: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

連立 1 次方程式と行列 (5) (58 ページ)

- 教科書 58 ページの式: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$
- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$
- $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$: 連立 1 次方程式の行列表現
- 変数や式がもっと多い場合も書き方は同じ

連立１次方程式と行列 (6) (58 ページ)

- 教科書 58 ページの式: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$
- 拡大係数行列: $B = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$

  (縦棒を略すこともある)
- 拡大係数行列を $B = (A|\boldsymbol{b})$ とも書く
- 変数や式がもっと多い場合も書き方は同じ

連立１次方程式を解くこと (58∼59 ページ)

- $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ を連立１次方程式の解という

- 解から見た連立１次方程式の分類:

  解がない　解が唯一 (一意解)　解が複数 (無限個)

- 連立１次方程式を解くとは:

  解が存在するか否かを判定し,
  存在する場合はすべての解を求める

- 連立１次方程式のことを線形方程式系などともいう

連立１次方程式を解くこと (58∼59 ページ)

- 解がない連立方程式: $\begin{cases} 2x = 1 \\ 3x = 1 \end{cases}$

- 解が唯一の連立方程式: $\begin{cases} 5x = 1 \\ 4y = 1 \end{cases}$

- 解が複数 (無限個) の方程式: $\begin{cases} x + y + z & = & 1 \\ x + y & = & 1 \end{cases}$

  ($y = 1 - x, z = 0$ という直線上の点はすべて解)

行基本変形 (1) (59 ページ)

- どれかの式の右辺と左辺をともに零でない定数倍しても解は不変

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \quad \overset{\text{比較}}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} 2x+2y=2 \\ x-y=1 \end{cases}$$

- 式の順番を入れ換えても解は不変

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \quad \overset{\text{比較}}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$$

行基本変形 (2) (59 ページ)

- ある式の右辺および左辺に他の式の右辺および左辺を足しても解は不変

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \overset{\text{比較}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y=1 \\ x-y+(x+y)=1+1 \end{cases}$$

$$\Downarrow (\text{整理})$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x=2 \end{cases}$$

右, 左とも $x=1$, $y=0$ が一意解

行基本変形 (3) (59 ページ)

- 以下の 3 操作を行列の行基本変形という
  - 行列のある行全体を (零でない) 定数倍する
  - 行列のある行に他の行 (の定数倍) を加える
  - 行列のある行を他の行と入れ換える

ある行全体に零を掛ける演算をやってはいけない!

行基本変形 (4) (59 ページ)

- どれかの式の右辺と左辺をともに定数倍しても解は不変

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \overset{\text{比較}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x+2y=2 \\ x-y=1 \end{cases}$$

拡大係数行列 拡大係数行列

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{比較}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

行基本変形 (5) (59 ページ)

- 式の順番を入れ換えても解は不変

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \quad \overset{\text{比較}}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{拡大係数行列} & & \text{拡大係数行列} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) & \overset{\text{比較}}{\Leftrightarrow} & \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

行基本変形 (6) (59 ページ)

- ある式の右辺および左辺に他の式の右辺および左辺を足しても解は不変

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \overset{\text{比較}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y=1 \\ 2x=2 \end{cases}$$

拡大係数行列 拡大係数行列

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{比較}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

拡大係数行列の見方 (1) (59 ページ補足)

- 線形方程式 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$
- 拡大係数行列 $\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right)$
- $\begin{array}{ccccc} x & & y & \vert & \\ \times & & \times & \vert & \\ a_{11} & + & a_{12} & = & b_1 \\ a_{21} & + & a_{22} & = & b_2 \end{array}$ というふうに解釈するとよい

拡大係数行列の見方 (2) (59 ページ補足)

- 線形方程式 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$
- 拡大係数行列 $\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array} \right)$
- $\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ という方程式に対応する

  という解釈もできる

掃き出し法 (1) (59 ページ)

- とりあえず教科書通りに説明
- 連立 1 次方程式 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$
- 拡大係数行列 $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$
- この方程式が一意解を持つとき, 拡大係数行列に行基本変形を施すと, 次の形にできる: $\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & 0 & p \\ 0 & \beta & 0 & q \\ 0 & 0 & \gamma & r \end{array}\right)$

掃き出し法 (2) (59 ページ)

- $\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & 0 & p \\ 0 & \beta & 0 & q \\ 0 & 0 & \gamma & r \end{array}\right)$ の第 1 行を α, 第 2 行を β, 第 3 行を γ で割る

  と $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & p/\alpha \\ 0 & 1 & 0 & q/\beta \\ 0 & 0 & 1 & r/\gamma \end{array}\right)$ になる

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p/\alpha \\ q/\beta \\ r/\gamma \end{pmatrix}$ がこの方程式の解

掃き出し法 (3) (59 ページ)

連立方程式	$\begin{cases} x+y &= 2 \\ x-y &= 0 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	拡大係数行列
第 2 式に第 1 式を加える	$\begin{cases} x+y &= 2 \\ 2x &= 2 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	第 2 行に第 1 行を加える
第 2 式を 1/2 に	$\begin{cases} x+y &= 2 \\ x &= 1 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	第 2 行を 1/2 に
第 1 式と入れ換えに	$\begin{cases} x &= 1 \\ x+y &= 2 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	第 1 行と入れ換え
第 2 式から第 1 式を引く	$\begin{cases} x &= 1 \\ y &= 1 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	第 2 行から第 1 行を引く

掃き出し法 (4) (59 ページ)

- 変数がいくつある場合もやることは同じ
- 5 変数, 方程式が 5 個ある場合に...
- 拡大係数行列を変形して以下のようにできれば...

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_5 \end{pmatrix}$$

掃き出し法 (5) (59 ページ)

- 対応する連立 1 次方程式は次の形に変形されていることになり...

$$
\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= b_1 \\
x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &= b_2 \\
x_3 \qquad\qquad\qquad &= b_3 \\
x_4 \qquad\qquad &= b_4 \\
x_5 &= b_5
\end{aligned}
$$

- 解は一目瞭然

行基本変形と行列 (1) (59 ページ補足)

- $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k & k & k \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & k & k & k \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ a & a & a & a \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ ka+e & kb+f & kc+g & kd+h \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+ke & b+kf & c+kg & d+kh \\ e & f & g & h \end{pmatrix}$

行基本変形と行列 (2) (59 ページ補足)

▷ 型が合っている (掛算ができる) とき

- 行列 $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を左からかけると第 1 行が k 倍
- 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ を左からかけると第 2 行が k 倍
- 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を左からかけると第 1 行と第 2 行の入れ換え
- 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ を左からかけると第 2 行に第 1 行の k 倍を加算
- 行列 $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を左からかけると第 1 行に第 2 行の k 倍を加算

基本行列 (1) (59 ページ補足)

- 基本行列 I:
  次の形の正方行列

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & i & & \end{matrix} \\ i) & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- 「$\ddots$」は 1 の略記, 空白は零の略記
- 基本行列 I を左から掛けると第 i 行が k 倍,
  右から掛けると第 i 列が k 倍

基本行列 (2) (59 ページ補足)

- 基本行列 II:
  次の形の正方行列

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i) \\ \\ j) \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- 左から掛けると第 i 行と第 j 行の入れ換え, 右から掛けると第 i 列と第 j 列の入れ換え

基本行列 (3) (59 ページ補足)

基本行列 II の例:

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots
$$

基本行列 (4) (59 ページ補足)

- 基本行列 III(i):
  次の形の正方行列

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} \quad & \quad & i & \quad & j & \quad & \quad \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ i) \\ \\ j) \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & k & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

- 左から掛けると第 j 行に第 i 行の k 倍を加え, 右から掛けると第 i 列に第 j 列の k 倍を加える

基本行列 (5) (59 ページ補足)

- 基本行列 III(ii):
  次の形の正方行列

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} \;\; & \;\; & \underset{\smile}{i} & \;\; & \underset{\smile}{j} & \;\; & \;\; \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ i) \\ \\ j) \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & k & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

- 左から掛けると第 i 行に第 j 行の k 倍を加え, 右から掛けると第 j 列に第 i 列の k 倍を加える

基本行列 (6) (59 ページ補足)

基本行列 III の例:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix},
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots
$$

基本行列 (7) (59 ページ補足)

$\boxed{\text{基本行列の逆行列は基本行列である}}$

理由: 2 次の場合も n 次の場合も考え方は同じなので, 2 次の場合を見る.

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$